Uppgifter i matematik för 1 betyg

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, UPPSALA
1963

Uppgifter i matematik för 1 betyg

Samlingen innehåller väsentligen problem, som givits vid lektionsundervisning och tentamensskrivningar under senare år vid Uppsala Universitet. Den färdigställdes under höstterminen 1963 och utdelades efter hand på hålslagna lösblad till de studerande. Inom varje kapitel är uppgifterna systematiskt ordnade så att de i stort sett svarar mot den ordning i vilken kursmomentengenomgås. Tentamensproblem har utmärkts med understrykning. Svar har givits, utom i de fall där svar skulle ha givit väsentlig ledning för lösande av uppgiften.

Matematiska institutionen, Uppsala
1963

Innehåll

A. Uppgifter ur gymnasiekursen

1. $\sin v = \dfrac{2}{3}$. Bestäm de övriga trigonometriska funktionernas värden för vinkeln v.

2. $\cos\alpha = c$. Bestäm värdet av $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$.

3. $\sin\alpha = -0,8$. Sök $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

4. Beräkna utan tabell och i exakt form

$$\frac{a\tan 945^\circ - b\sin(-270^\circ) + b\cos(-405^\circ) - a\sin 855^\circ}{a\tan 570^\circ - b\cot(-300^\circ)}$$

5. Förenkla så långt som möjligt

$$\frac{\cos 20^\circ \tan 50^\circ \sin 190^\circ \cot 245^\circ}{\cot 220^\circ \cos 280^\circ \sin 250^\circ \tan 155^\circ}$$

6. Visa formlerna

a) $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

b) $\dfrac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a} = \tan^2\dfrac{a}{2}$

c) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

d) $\dfrac{\sin^3 v}{\cos v - \cos^3 v} = \tan v$

7. Lös följande ekvationer

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = \frac{1}{2}$ c) $\tan x = \sqrt{3}$

e) $\cot x = -1$ f) $\sin 6x = \frac{1}{2}$ g) $\cos 2(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i) $\cos 3x = \sin 4x$ j) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = \cot 3x$

k) $\cos mx + \cos 3x = 0$

8. Lös ekvationerna

a) $\sin^2 x \cdot \tan x = 0$

b) $\sin 2x = \sin x\cos x(1 - \cot 2x)$.

9. Lös ekvationerna

a) $(x-3)(x^2 - 9x + 20) = 0$

b) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

c) $\dfrac{(x-3)-(3-x^2)}{x+3} = 2$.

10. Förenkla följande uttryck; ange villkor för att uttrycken skall vara definierade.

a) $\dfrac{1-x^2}{2-x}\cdot\dfrac{(x-2)^2}{x^3-1}$

b) $\dfrac{(3ab^2)^4\cdot(2b)^3\cdot|(a+c)^2|^3}{12\cdot(a^2b^5)^2\cdot(ab+bc)^2}$

c) $(4a^4 + 1 - 5a^2) : (2a^2 + 1 - 3a) - (2a^3 - 9a^2 + 9a) : a - 3$.

11. Man har $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 = 3$. Visa, att $a^3 + \dfrac{1}{a^3} = 0$.

12. Visa, att om $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$ och $\frac{1}{b-c}$ bildar aritmetisk serie, så bildar a, b och c geometrisk serie.

13. Drag med egen hand kvadratroten ur 13 med så många decimaler Ni orkar.

14. Visa, att ${}^{3}\log 100 \cdot {}^{10}\log 27 = 6$.

15. Om ${}^{a}\log 2 = 7$, vad är då ${}^{a}\log \sqrt[5]{0,125}$?

16. Beräkna utan att använda logaritmtabell värdet av uttrycket

$$\sqrt{\frac{3\cdot {}^{10}\log 1728}{1+\frac{1}{2}\cdot {}^{10}\log 0,36+\frac{1}{3}\cdot {}^{10}\log 8}}.$$

17. Bestäm de reella rötterna till följande ekvationer:

a) ${}^{2}\log(x+1) + {}^{2}\log(x-1) = 5$

b) $2\cdot 7^{2+x} + 3\cdot 7^{3+x} = 161$

c) $16^{x} + 16^{-x} = 2\frac{1}{2}$

d) $6^{2x} = 3^{x^2}\cdot 2^{x+2}$.

18. Sök reella rötter till ekvationen $(1000x)^{(3-{}^{10}\log x)} = 2^5\cdot 5^5$.

19. a) Lös ekvationen $3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$.

b) Vad är en rotekvation? Varför måste man alltid pröva en rotekvation? Hur skall man förändra ekv. i a) för att $x = 5$ men ej $x = 1$ skall satisfiera ekvationen?

20. Lös ekvationen $\sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x}$.

21. Lös ekvationen $\sqrt{x^2-x-10} - \sqrt{x^2-11x} = 10$.

22. Visa följande satser:

a) En rät linje från en cirkels medelpunkt till en kordas mittpunkt är vinkelrät mot kordan.

b) I en cirkel är medelpunktsvinkeln dubbelt så stor som periferivinkeln, om de står på samma båge.

c) Vinkeln mellan en tangent till en cirkel och en korda genom tangeringspunkten är lika stor som vinkeln i segmentet på andra sidan kordan.

d) I en fyrhörning inskriven i en cirkel är två motstående vinklar supplementvinklar.

e) Om från en punkt utanför en cirkel en tangent och en sekant är dragna, så är kvadraten på tangenten lika med produkten av hela sekanten och dess utanför cirkeln liggande del.

f) Diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.

B. Logik och mängdlära

1. Ange elementen i följande delmängder av mängden $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, \}$.

a) $\{x | x > 7 \text{ och } x < 12\}$

b) $\{x | x > 12 \text{ och } x < 7\}$

c) $\{x | x^2 > 8 \text{ och } x > 8\}$

d) $\{x | x^2 > 8 \text{ eller } x > 8\}$

e) $\{x|x < 10 \text{ eller } x > 12\}$

f) $\{x|x < 7 \text{ eller } x > 5\}$

2. Bestäm mängden $\complement A$ i följande fall

a) $G = \{x|x \text{ är en studentnation i Uppsala}\}$
$A = \{x \in G|x \text{ har mindre än 500 medlemmar}\}$

b) $G = \{\text{heltal}\}$
$A = \{x \in G|x \text{ ger vid division med 3 resten 1}\}$

c) $G = \{\text{svenska medborgare}\}$
$A = \{x \in G|x \text{ är född före 1940}\}$

d) $G = \{\text{medlemmar i Norrlands nation}\}$
$A = \{x \in G|x \text{ är född i Norrbottens län eller tog studenten i Luleå}\}$

3. Betrakta följande delmängder av $\mathbb{R}$: $M_1 = \{x|0 < x < 3\}$, $M_2 = \{x|1 < x < 5\}$, $M_3 = \{x|2 \leq x \leq 4\}$. Vad är

a) $M_1 \cup M_2 \cup M_3$

b) $M_1 \cap M_2 \cap M_3$

c) $(M_1 \cup M_2) \cap M_1$

d) $(M_1 \cap M_2)\ \ (M_1\ \ (M_1 \cap M_2))$?

I följande fyra exempel är A, B, ... godtyckliga delmängder av en viss grundmängd.

4. Representera följande mängder i diagram

a) $(\complement A \cap B) \cup (A \cap \complement C)$

b) $\complement(A \cup B) \cap C$

c) $(A \cup \complement B) \cup \complement C$.

5. Avgör med hjälp av diagram vilka av följande utsagor som är sanna

a) $\complement(\complement a \cup B) = A \cap \complement B$

b) $\complement A \cup \complement B = \complement(A \cup B)$

c) $A \cup \complement(B \cap c) = (A \cup \complement C) \cap \complement C$.

6. Är det sant att

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

7. Om A innehåller 24 st element, B 16 st och $A \cap B$ 5 st, hur många element innehåller $A \cup B$? Formel?

8. Betrakta följande mängder av plana figurer:
A: {alla kvadrater}
B: {alla romber}
C: {alla rektanglar}
D: {alla parallellogrammer}
E: {alla parallelltrapets med minst tre lika långa sidor}
F: {alla parallelltrapets med minst en rät hörnvinkel}

a) Ange alla förekommande fall då någon av mängderna är delmängd av en annan.

b) Är följande sant?
$B \cup C = D$, $D \cap F = C$, $D \cap E = B$, $F \subset (D \cup E)$, $E \cap F = B \cap C$.

9. Vilka av följande utsagor är sanna?

a) (2 är mindre än 3)$\bigwedge$(Hjo är Sveriges huvudstad)

b) (2 är mindre än 3)$\bigvee$ (Hjo är Sveriges huvudstad)

c) (hästen är ett däggdjur)$\bigwedge$(7 är ett primtal)

d) (hästen är ett däggdjur)$\bigvee$(7 är ett primtal)

e) (8 är kvadraten på ett primtal)$\bigwedge$(det finns inget primtal som är större än 100)

f) (8 är kvadraten på ett primtal)$\bigvee$(det finns inget primtal som är större än 100).

10. Betrakta utsagorna (x betyder reella tal)
A: $x > 2$
B: $x > -1$
C: $x^2 > 4$
Vilka av följande utsagor är sanna?
a) $A \Longrightarrow B$ b) $A \Longleftrightarrow C$ $(C \bigwedge B) \Longrightarrow$ d) $C \Longleftarrow (A \bigwedge \text{icke-}B)$.

11. Betrakta utsagorna
A: Vinkeln x ligger mellan 90° och 180°
B: Vinkeln x ligger mellan 90° och 270°
C: $\sin x$ är ett positivt tal.
Vilka av följande utsagor är sanna?
a) $A \Longrightarrow C$ b) $C \Longrightarrow A$ c) $A \Longleftrightarrow C$ d) $(B \bigwedge C) \Longrightarrow A$.

12. Formulera motsatsen till

a) Alla fåglar kan flyga

b) Inga hundar kan flyga

c) högst fem personer är frånvarande

d) minst två personer är närvarande

e) varje elev fick godkänt i minst ett övningsämne

f) Ingen elev fick godkänt i alla övningsämnen

g) den reella talmängden S är sådan att för varje reellt tal N det finns (minst) ett element x i S sådant att $x > N$

h) den reella talmängden S har egenskapen: det finns ett rellt tal N, sådant att varje element x i S, som är större än N, är ett heltal.

Skriv g) och h) med användande av logiska symboler.

13. Om A och B är öppna utsagor definieras mängderna M_A och M_B som i läroboken sid 15. Rita figurer för de mängder som svarar mot utsagorna a) $A \bigwedge B$ b) $A \bigvee B$ c) antingen A eller B.

14. Implicerar talspråkets utsaga ”antingen A eller B” följande utsaga (oberoende av utsagorna A och B)?

a) $(A \bigwedge \text{icke-}B) \bigvee (B \bigwedge \text{icke-}A)$

b) $(A \bigvee B) \bigwedge (\text{icke-}A \bigvee \text{icke-}B)$.

Gäller omvändningen?

15. Vilken av följande relationer är ekvivalensrelationer? Beskriv i förekommande fall motsvarande ekvivalensklasser.
$M = N = \{\text{alla människor}\}$

a) aSb om a och b har minst en gemensam förälder

b) aSb om a och b har samma födelseår

$M = N = \{\text{alla räta linjer i planet}\}$

c) aSb om $a = b$ eller a och b ej är parallella

d) aSb om a är parallell med b eller $a = b$

e) aSb om a och b skär varandra under 60° vinkel, eller $a = b$ eller a och b är parallella.

16. $M = N =$ de naturliga talen. Relationen S definieras av att $aSb \iff a \cdot b =$ kvadraten på ett naturligt tal.

a) Visa att S är en ekvivalensrelation.

b) Ange två ekvivalensklasser.

C. Talmängder, absolutbelopp, olikheter

Följande beteckningar användes: $G =$ övre gräns, $g =$ undre gräns.

1. Visa att $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ej är ett rationellt tal.

2. Bestäm rationella α och β så att $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \alpha + \beta\sqrt{3}$.

3. Lös ekvationen $|x + 5| - 2|x| = 1$.

4. Lös ekvationen $|x + 1| + |x - 1| = |x|$.

5. Visa att $\sqrt[3]{2}$ ej kan vara rot till en andragradsekvation med rationella koefficienter.

6. För vilka x gäller $0 < |x - 1| < 3$?

7. För vilka reella tal gäller $10x - 3x^2 - x^3 \geq 0$?

8. För vilka reella x gäller $\dfrac{10x - x^3}{x^2} \geq 3$?

9. Visa att $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{x^2}{3} \geq 1$ om $x > 0$.

10. Lös olikheten $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} < 0$.

11. Lös olikheten $\dfrac{9(1 - x)}{4} < \dfrac{1}{1 - x} \leq 2$.

12. När gäller $\left|\dfrac{2x^2 + 6x - 15}{2x - 9}\right| < 1$?

13. Konstruera på egen hand en olikhet, där svaret skall vara: ”Den gäller för $1 < x < 3$ och $x < -4$”.

14. För vilka x gäller $\dfrac{\sin 2x \cdot \arctan x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} > 0$?

15. Vilka x i intervallet $(0, 2\pi)$ uppfyller

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} > 0?$$

16. Visa att $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ om $a > 0$, $b > 0$.

17. Visa att om $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ så gäller

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc.$$

18. Bland rektanglar med given omkrets L, bestäm den vars yta är störst.

19. Visa att om $c > 0$, $d > 0$ samt $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d}$ så gäller $\dfrac{a}{c} < \dfrac{a+b}{c+d} < \dfrac{b}{d}$.

20. Visa att $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-d} > \dfrac{a+b}{a^2} + \dfrac{b+c}{b^2} + \dfrac{c+d}{c^2}$, om $1 > a > b > c > d > 0$.

21. Låt L vara omkretsen och Y ytan för en rektangel. Visa olikheten $L^2 \geq 16Y$.

22. α, β, γ är vinklar i en triangel. Visa att $\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} < \dfrac{1}{4}$.

23. Bestäm aritmetiskt, geometriskt och harmoniskt medelvärde till talen 10 och 20. Verifiera $H < G < A$.

24. Bestäm aritmetiskt, geometriskt och harmoniskt medelvärde till talen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kontrollera olikheten $H < G < A$.

25. Två tal har det aritmetiska mediet 4 och det harmoniska mediet 3. Vilket är det geometriska mediet?

26. Ange geometriskt de punkter (x, y) för vilka $||x| + y| < 2$.

27. Skriv $0,1204204204\ldots$ som rationellt tal på formen $\dfrac{p}{q}$.

28. Beräkna a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

29. Vad blir $\displaystyle\prod_{k=1}^{1000}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$?

30. Vilka av följande talmängder $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsade? Uppåt begränsade? Nedåt begränsade? då $a_n =$

a) $1 \pm \dfrac{1}{n^2}$ b) $1 + (-1)^n$ c) $n + \sin\dfrac{\pi}{2}n$

d) $\tan\left(\dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$ e) $1 + n(-1)^n$ f) $\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2n}{2n+1}$

g) 2^{-n} h) $n - \sqrt{n}(-1)^n$

31. Låt M vara mängden av reella tal som uppfyller olikheten $4x - x^2 \geq 0$. Är M begränsad? Ange ev. övre resp. undre begränsning.

32. Ange övre och undre gräns för mängden $\{a_n\}_1^{\infty}$ där $a_n =$

a) $\dfrac{1}{n} + (-1)^n\dfrac{1}{n+1}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin n\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{2n+1}{3n+2}$

d) $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^{2n}}{2n} + \dfrac{(-1)^{3n}}{3n}$ e) $n - \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n+1}$ f) $\sqrt{1+n^2} - n$

33. Konstruera en talmängd som uppfyller följande tre villkor

a) den består av oändligt många element,

b) övre gräns 2 tillhör ej mängden,

c) undre gräns 1 tillhör mängden.

34. Mängden M består av de tal som kan skrivas på formen $\frac{1}{m} \pm \frac{1}{n}$ där m, n är naturliga tal. Ange övre resp. undre gräns för mängden. Undersök även om dessa tillhör M.

35. M är den mängd av tal som kan skrivas på formen $\frac{p}{q}$, $p > 0$, $q > 0$, där p är delbart med 6 och 7 går jämnt upp i q. Är M begränsad uppåt? Nedåt? Ange ev. övre resp. undre gräns.

36. M är mängden av tal $\{x^3 + 2\}$ där x uppfyller $x^2 < 4$. Bestäm övre gränsen G och undre gränsen g.

37. Mär mängden av rationella tal x som uppfyller villkoret $0 < x < 1$ och att deras decimalbråksutveckling ej innehåller talen 1 eller 9. Bestäm $\sup M$ och $\inf M$. Tillhör dessa M?

38. Ange g och G till $\{a_n\}_1^\infty$ där $a_{2n-1} = \cos\frac{1}{n} + (-1)^n$ och $a_{2n} = \sin\frac{1}{n} + (-1)^n$. Tillhör de mängden eller ej?

39. Ange ev. övre och undre gränser och huruvida de tillhör mängden eller ej för $\{a_n\}_1^\infty$, då $a_n =$
a) $(-1)^{n-1} + \log(1+n) - \log n$ b) $\cos\pi n + \sin\frac{\pi n}{4}$.

40. Visa med hjälp av definitionen på G och g att $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}_1^\infty$ har $G = 2$ och $g = 1$. Ange ett tal i mängden som är störe än $G - 10^{-5}$ och ett som är mindre än $g + 10^{-5}$.

41. En talföljd är given genom rekursionsformeln $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$. Ange övre och undre gräns för $\{a_n\}_1^\infty$ om $a_1 =$
a) 2 b) 1 c) -1 d) k.

42. Visa att om en uppåt begränsad oändlig talföljd är strängt växande, så kan övre gränsen ej tillhöra följden.

43. Använd definitionen på G och g för att visa att talen $3/2$ och 2 uppfyller villkoren för g resp. G till följden $\{a_n\}_1^\infty$ där $a_n = 2 - \frac{n}{1+n^2}$.

44. M är talföljden $\{a_n\}_1^\infty$ där $a_{2n} = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ och $a_{2n-1} = -\frac{1}{1 + a_{2n}}$. Undersök existensen av övre och undre gräns och om någon av dessa tillhör M.

45. Låt $a_0 = 2$. Bilda en talmängd genom att sätta $a_{n+1} = -a_n\left(1 - \frac{1}{1+n}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ange övre resp. undre gräns till denna mängd. Tillhör de mängden?

<u>46.</u> Betrakta den mängd $\{a_n\} = M$ av reella tal som definieras för alla heltal (även negativa) genom $2a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{3}{2}$. Undersök om M har övre resp undre gräns och bestäm i så fall de förekommande.

47. M_1 och M_2 är mängder med element x_1 resp. x_2 sådana att $x_1 > x_2$ gäller för varje val av $x_1 \in M_1$ och $x_2 \in M_2$. Ingen av mängderna är tom. Bevisa eller motbevisa påståendet att det alltid gäller $\sup M_2 < \inf M_1$.

48. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Visa att talföljden $\{a_n\}_1^\infty$ är monotont växande och uppåt begränsad.

49. Satsen att varje begränsad talföljd har en övre gräns och en undre gräns antas känd.

Bevisa med hjälp därav att en begränsad monoton talföljd är konvergent. Definiera först begreppen ”övre gräns” och ”konvergent talföljd”.

D. Induktion, kombinatorik, binomialteoremet

1. Visa formeln

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \cdots + (n+1)(n+5) = \frac{n}{2}(2n+7)(n+7).$$

2. Beräkna summan

$$S_n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1)$$

då man vet att $S_n = an^3 + bn^2 + cn$, där a, b och c är konstanter.

3. Visa formeln

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

4. Visa formeln

$$\cos\frac{v}{2} + \cos\frac{3v}{2} + \cdots + \cos\frac{2n-1}{2}v = \frac{\sin nv}{2\sin\frac{v}{2}}.$$

5. Visa induktivt att

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

6. Bevisa att

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

7. Bevisa att

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

8. Bevisa relationen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + k} = \frac{2n}{n+1}.$$

9. Bevisa att $2^n > n^3$ för varje naturligt tal $n \geq 10$.

10. Visa att $3^n \geq n^3$ för varje naturligt tal n.

11. Visa att $3^n > 4n^2 + 2^n$ för varje naturligt tal $n \geq 4$.

<u>12.</u> Visa att för varje heltal $n \geq 0$

$$\sum_{m=0}^{n} 2^{m-1}\sin mx = \frac{2^{n+1}\sin nx - 2^n \sin(n+1)x + \sin x}{5 - 4\cos x}$$

<u>13.</u> Visa (t.ex. med induktion) att om n är ett naturligt tal och $x \geq 1$ så gäller

$$(n+1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \leq 2(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}).$$

14. Betrakta talföljden 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, där varje nytt element bildas som summan av de båda närmast föregående (Fibonaccis talföljd). Visa att för n:te elementet a_n i denna talföljd gäller

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

15. Visa med induktion att

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

för alla naturliga tal n.

16. Låt p_n beteckna det n:te primtalet, $n = 1, 2, \ldots$ Visa att $p_n < 2^{2^n}$.

17. Hur många ”ord” kan bildas av ordet FLICKA? (”ord” = bokstavspermutation av högst 6 bokstäver.)

18. Hur många ”ord” (=bokstavspermutationer) omfattande 7 bokstäver kan erhållas av ordet UPPSALA?

19. En idrottsförening skall välja en styrelse bestående av ordförande, vice ordförande, sekreterare och kassör. Man har för valet utsett 10 kandidater. På hur många sätt kan denna styrelse sammansättas?

20. Ett politiskt parti har två olika röstsedlar, A med 8 namn och B med 6 andra namn. Man vill göra en samlingslista med dessa 14 namn, så att ursprungliga ordningen mellan namnen från A bibehålles och likaså mellan namnen från B, men så att ordningsföljden mellan ett namn från A och ett från B är godtycklig. På hur många olika sätt kan en sådan lista göras?

21. Hur många olika sexsiffriga tal finns det som innehåller
a) siffrorna 1,1,1,2,2,3 b) 0,1,3,5,7,9.

22. a) Hur många trianglar med hörn i n givna punkter i planet kan högst uppritas?
b) De n punkterna sammanbindas till en n-hörning. Hur många trianglar med hörn i de n punkterna kan högst uppritas, om varje triangel skall ha minst en sida gemensam med n-hörningen?

23. Hur många ”böcker” om 500 sidor och 2000 tecken per sida kan högst författas, om man använder 27 bokstäver samt punkt, komma och mellanslag?

24. Hur många *olika* tipsrader kan det finnas med
a) 10 rätt b) n rätt ($0 \leq n \leq 12$).

25. 4 kast göres med en tärning. a) Hur många olika kastserier är möjliga? b) Hur många av dessa innehåller minst en sexa? c) Bör det vara fördelaktigt att ingå ett vad, i vilket man håller på att minst en sexa kommer upp?

26. Utveckla $(x^2 + 2y)^5$.

27. Sök koefficienten för x^{21} i utvecklingen av $(x^3 + 3)^{15}$.

28. Finns i utvecklingen $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{32}{x^8}\right)^{30}$ någon konstant term? Ange i så fall dess värde.

29. Finns i utvecklingen $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{18}$ någon konstant term? Bestäm i så fall dess värde.

30. Verifiera att

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}.$$

Bevisa sedan den allmänna formeln

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

31. Visa att

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

då $j + k \leq n$.

32. Bevisa att

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

33. Visa att

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

34. Visa att

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{k-p}\binom{m}{p}.$$

E. Komplexa tal

1. $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$. Vad är

a) $\operatorname{Re} z_1$ b) $\operatorname{Im} z_2$ c) $z_1 + z_2$ d) $z_1 \cdot z_2$ e) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Svaren till c), d) och e) anges på formen $a + bi$.

2. Skriv på formen $a + bi$

a) $(3 - i)^3$ b) $\dfrac{5}{4i - 3}$ c) $\dfrac{2 - 5i}{3 + 4i} + \dfrac{1}{2 - i}$

3. Bestäm absolutbeloppet av

a) $\dfrac{(3 - 2i)(1 - i)}{(2 + i)^2}$ b) $\dfrac{i}{1 + \dfrac{i(\sqrt{3} - 1)}{1 + i}}$.

4. Bestäm absolutbeloppet av $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

5. Skriv följande komplexa tal på formen $r(\cos v + i\sin v)$

a) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$ b) $(1 + i)(1 - i)$ c) $\dfrac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12} - 2i)}$

6. Skriv $(1 - i\sqrt{3})^{69}$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal.

7. Bestäm $\arg \dfrac{i}{1 + \dfrac{i(\sqrt{3} - 1)}{1 + i}}$.

8. Beräkna på formen

a) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{75}$ b) $(4\sqrt{3} - 4i)^{22}$

9. Beräkna $\sin 5v$ och $\cos 5v$ med hjälp av de Moivres formel (uttryckt i enbart $\sin v$ resp. $\cos v$).

10. Visa med hjälp av de Moivres formel $8\cos^4\phi = \cos 4\phi + 4\cos\phi + 3$.

11. Beräkna $(1+i)^{100}$ a) med b) utan användning av de Moivres formel.

12. Tolka följande relationer geometriskt:

a) $\operatorname{Re} z \geq 1$ b) $|\operatorname{Im} z| < 1$ c) $2 < |z - i| \leq 3$

d) $0 < R \leq |z| < R'$ e) $\dfrac{\pi}{4} < \arg z \leq \dfrac{2\pi}{3}$ f) $z \cdot \overline{z} < 1$.

13. Bestäm den punktmängd i det komplexa talplanet som bildas av de z för vilka gäller

a) $z + \overline{z} = 0$

b) $z\overline{z} = k > 0$ och $|\arg z| \leq 1$

c) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = a$, där a har värdet 2, 1, 0 eller -1.

14. Vilken punktmängd i det komplexa talplanet bildas av de z för vilka $|z + \overline{z}| = 3|z - \overline{z}|$? Rita figur.

15. Var i det komplexa talplanet gäller

a) $|z - i| + |z + i| = 3$ b) $\arg \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\pi}{6}$? Grafisk bild.

16. Vilket område i det komplexa talplanet karakteriseras av olikheten

a) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$ b) $\left|\dfrac{z+i}{z}\right| = \dfrac{\pi}{6}$?

17. Lös ekvationen $z^2 = \dfrac{1+i}{1-i}$. Rötterna skall anges på formen $a + bi$.

18. Lös ekvationen $z^2 = -7 + 24i$.

19. Lös ekvationen $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$ och ange rötterna på formen $a + bi$.

20. Lös ekvationen $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$.

21. Lös ekvationen $(4-3i)z^2 - 25z + 31 - 17i = 0$.

22. Lös ekvationen $z^3 = 5 - 5i$.

23. Lös ekvationen $z^6 = -7$.

24. Visa att

a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ c) $\overline{\overline{z_1} + z_2} = z_1 + \overline{z_2}$.

25. z_1 och z_2 är godtyckliga komplexa tal. Visa att

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}.$$

26. z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, är komplexa tal sådana att $z_k^n = 1$ för alla k och så att $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$. Beräkna för ett godtyckligt komplext tal a summan

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - a|^2.$$

27. Bevisa för godtyckliga komplexa tal z_1 och z_2 den s.k. triangelolikheten

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Visa att likhet gäller om och endast om $z_1\overline{z_2}$ är reellt och icke-negativt. Ge exempel på icke-reella tal z_1 och z_2 för vilka det råder a) likhet, b) sträng olikhet.

28. Bevisa olikheten $|z+1| \geq |z| - 1$ för alla komplexa z.

29. Visa att $\left|\dfrac{z-a}{z+\overline{a}}\right| = 1$ om z är rent imaginärt och $z \neq a$.

30. z_1 och z_2 är två komplexa tal. Visa att ett nödvändigt villkor för att $zz_1 + \overline{z}z_2$ skall vara reellt för godtyckliga komplexa värden på z är att $z_1 = \overline{z_2}$. Är villkoret tillräckligt?

31. z_1 och z_2 är två skilda komplexa tal. Visa att det komplexa talet

$$z = \frac{1 - z_1\overline{z_2}}{z_1 - z_2}$$

har absoluta beloppet 1 om och endast om åtminstone ett av talen z_1 och z_2 har absoluta beloppet 1.

32. De komplexa talen z_1, z_2, z_3 ligger på enhetscirkeln i det komplexa planet. Vidare är $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Visa att talen utgör hörnen i en liksidig triangel.

33. Ni har på en öde ö funnit en pergamentrulle med följande text: ”Utgå från galgen. Stega till den vita stenen och gå sedan lika långt rakt åt vänster. Utmärk denna punkt. Stega därefter från galgen till den svarta stenen och gå sedan lika långt rakt åt höger. Utmärk även denna punkt. Kapten Kidds skatt ligger mitt emellan de utmärkta punkterna.”
Ni finner den vita och den svarta stenen men däremot inget spår av galgen. Ni hittar emellertid ändå skatten, ty dess läge är oberoende av var galgen stått. Bevisa detta. (Ledning: Räkningarna blir enklast om man använder komplexa tal.)

34. Talen z_ν, $\nu = 1, 2, 3, 4$, ligger på en cirkel i det komplexa talplanet. Visa att då ligger också talen $az_\nu + b$, där a och b är godtyckliga komplexa tal, på en cirkel.

35. Visa att

a) $e^{i\pi} + 1 = 0$ b) $e^{2+\frac{\pi i}{3}} = \dfrac{e^2}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

36. Bestäm realdel, imaginärdel, belopp och argument av det komplexa talet e^{z^2} då $z = x + yi$ (x och y reella).

37. Visa att

$$\left|e^{e^z}\right| = e^{e^{\mathrm{Re}\, z}\cos \mathrm{Im}\, z} \quad \text{och} \quad \arg e^{e^z} = e^{\mathrm{Re}\, z} \sin \mathrm{Im}\, z.$$

38. Bevisa olikheten

$$\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x - y|$$

där x och y är reella tal. Vilken geometrisk tolkning har olikheten?

39. Framställ

a) $\sin^3 x$ som en summa av sinusfunktioner av första graden

b) $\cos^3 x$ som en summa av cosinusfunktioner av första graden.

F. Hela tal, polynom, algebraiska ekvationer

1. Vilken rest erhålles då $411 \cdot 821 + 376 \cdot 297$ delas med 7?

2. Vilken rest erhålles då 207^{61} divideras med 13?

3. Visa att $(17^{47} + 2^{12})^{14} - 4$ är delbart med 13.

4. Låt $n \geq 2$. Visa att $11^{2n} + 5^{2n+1} - 6$ är delbart med 24. (3 betyg mars –59)

5. Skriv det decimala talet 1000 i a) 7-systemet; b) 12-systemet.

6. 1011 och 1101 är binära tal (basen är 2). Multiplicera dem! Kontrollera svaret genom övergång till decimalsystemet.

7. Skriv det decimala talet 12 648 430 sedecimalt, dvs. med 16 som bas. (Siffror: 0, 1, 2,…9, A, B, C, D, E, F).

8. Ange samtliga äkta delare till 15.

9. Visa att $n(n^2 - 1)$ är delbart med 6 för alla heltal n.

10. Beräkna $(24, 16) + (32, 44) + (12, -20)$. (a, b) betyder största gemensamma delaren (sgd) till a och b.

11. Förkorta så långt som möjligt $\frac{2147}{7571}$.

12. Bestäm största gemensamma delare till 8037 och 10089.

13. Visa att talet $3n^2 - 1$ ej kan vara en jämn kvadrat för något heltal n. (Ledning: Antag motsatsen och visa att motsägelse erhålls.)

14. Sök gemensamma faktorer till $2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ och $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

15. Bestäm a) samtliga b) alla äkta delare till polynomet $3x^3 - 3x$.

16. Sök gemensamma faktorer till $z^4 - z^3 + z^2 + 2$ och $z^3 + 4z^2 + 4z + 3$. Utnyttja detta för att bestämma samtliga *reella* rötter till ekvationerna $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$ och $z^3 + 4z^2 + 4z + 3 = 0$.

17. Ekvationen $z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = 0$ satisfieras av $z_1 = i$. Verifiera detta. Bestäm sedan övriga rötter.

18. $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ är ett polynom med egenskapen att $P(z)$ är reellt om z är reellt. Visa att alla koefficienter a_k är reella. (Ledning: Studera $P(z) - \overline{P(\overline{z})}$.)

19. Ekvationerna $z^3 - 3z^2 - 4z + 12 = 0$ och $z^3 + z^2 - 10z + 8 = 0$ har en gemensam rot. Lös ekvationerna.

20. Ekvationen $9x^3 - 6x^2 + 15x - 10 = 0$ har en rationell rot. Lös ekvationen.

21. Uppdela i reella faktorer polynomet $P(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. (Ledning: Betrakta först $P(x) \cdot (x - 1)$.)

22. $P(x)$ är ett polynom som ger resten 7 vid division med $x - 4$ och resten 5 vid division med $x - 3$. Vilken rest ger $P(x)$ vid division med $(x - 3)(x - 4)$?

23. Visa att polynomet $(x - 1)^{2n} - x^{2n} + 2x - 1$ är delbart med $2x^3 - 3x^2 + x$.

24. Uppdela i reella faktorer $z^4 - z^2 - 6$.

25. En algebraisk ekvation uppfyller följande villkor

a) har reella koefficienter

b) har rötterna $1 + i$ och $2 + i$

c) har minsta möjliga gradtal.

Hur ser ekvationen ut?

26. Ekvationen $z^4 + az^3 + bz^2 - 12z = 15$ har för lämpligt valda reella konstanter a och b en rot $z_1 = -(2+i)$. Bestäm a och b och lös ekvationen fullständigt.

27. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0$ har en dubbelrot. Lös ekvationen.

28. $x^6 - 3a^2x^2 + 6 =$ har en rot av multplicitet lägst 2, a reellt. Bestäm vilka värden multipelroten kan anta.

G. Funktionsbegreppet, elementära funktioner

1. Betrakta mängden av alla par (x, a) av reeella tal som löser ekvationen
(a) $y^3 + 3y + x^2 = 0$.
Är mängden en funktion?
Samma fråga för

(b) $x \sin y = 107$

(c) $|x + \sqrt{y}| = 1$

(d) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$

(e) $[xy] = 2$, där $[xy]$ betecknar heltalsdelen av xy.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$, $x \in D$, definierar under vissa villkor på D en reell funktion. Ange de svagaste villkoren på D för att så skall vara fallet.

3. Skissera grafen till nedanstående funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{för } -4 \le x \le -2 \\ -x-3 & \text{"} \quad -2 < x < -1 \\ 2x^2 & \text{"} \quad -1 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{"} \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{"} \quad 1 < x < 2 \\ |x-1| & \text{"} \quad 2 \le x < 4 \\ 3 & \text{"} \quad x = 4 \end{cases}$$

4. $f(x) = |x+1| - |x-1|$ för alla x. Undersök om $f(x)$ i hela eller någon del av sitt definitionsområde har en invers. Ange i så fall inversen med dess definitionsområde och värdeförråd samt rita upp den.

5. Visa att följande funktioner är strängt monotona (utan användande av begreppet derivata) och ange inverserna

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $0 < x < 1$

b) $f(x) = x - x^2$, $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $-\infty < x \le -\dfrac{100}{99}$

6. En funktion definieras på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{för } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{5}{2} - x & \text{"} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

a) Är den sträng monoton i hela definitionsområdet?

b) Existerar inversen? Ange i så fall denna.

7. Visa att följande funktioner är strängt monotont växande och ange deras inverser

$$\text{a)}\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{för } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{12} & \text{för } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{b)}\quad g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{för } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{"} \quad 0 \le x < 1 \\ x & \text{"} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$

8. Bestäm reella lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^{{}^{10}\log\sqrt{y}}} = 2 \\ \dfrac{{}^{2}\log x^2}{{}^{10}\log 5} = {}^{5}\log y^3. \end{cases}$$

9. Lös ekvationen $\sin kx = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ där k är en reell konstant.

10. Bestäm exakta värdet av $\sin(2\alpha+\beta)$ då $\sin\alpha = -0,6$, där α är en vinkel i tredje kvadranten, och $\tan\beta = -2,4$.

11. Visa formeln $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ för vinklarna i den icke rätvinkliga triangeln ABC.

12. Är följande funktioner udda eller jämna?

$$\text{a)}\quad f(x) = x\sin x \qquad \text{b)}\quad f(x) = \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

13. Vilken period har följande funktioner

$$\text{a)}\quad f(x) = \sin(2n+1)x \qquad \text{b)}\quad f(x) = \cos^2 x \qquad \text{c)}\quad f(x) = \sin^3 x?$$

14. Beräkna $2\arctan 7 + 2\arctan\frac{31}{17} + \arctan\frac{17}{31}$.

15. Beräkna $\arcsin\frac{99}{101} + 2\arctan\frac{1}{10}$.

16. För vilka x-värden gäller $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$?

17. Visa att $\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ för alla x.

<u>18.</u> Hur många lösningar har ekvationen $\operatorname{arccot} x = -\frac{\pi}{2}$?

H. Gränsvärden

1. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$. Sök ett $N(\varepsilon)$ sådant att $|a_n - 1| < \varepsilon$ för alla $n > N(\varepsilon)$. Bestäm sedan t.ex. $N(10^{-3})$. Vad är $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x\cdot\sin x}{1+2x^2}$. Beräkna $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ och ange ett tal A sådant att $f(x)$ avviker med mindre än 10^{-2} från gränsvärdet för alla $x > A$.

3. Bestäm ett A så att $\left|\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1\right| < \dfrac{1}{10}$ för $x > A$. Bestäm så ett $A(\varepsilon)$ så att $\left|\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1\right| <$ ε för varje $\varepsilon > 0$.

4. Bestäm ett ω så att $|y - \frac{3}{2}| < \dfrac{1}{100}$ för $x > \omega$, där y är funktionen $y = \dfrac{3x^2+5x+1}{2x^2+5}$.

5. $y = \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}-10\sin x^2}$. Bestäm ett ω så att $|y| < 10^{-5}$ för $x > \omega$.

6. Bestäm ett $\delta(\varepsilon)$ så att $|f(x)-a| < \varepsilon$ för $|x| < \delta(\varepsilon)$ om $f(x) = (x+4)^{1/4}$ och $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

7. Bestäm gränsvärdet a då$x \to +\infty$ och ange ett tal A, så att för $x > A$ gäller $|f(x)-a| <$ 10^{-2} för funktionerna

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad \text{b)}\quad f(x) = \frac{x-1}{x^2(1+x)}\sin x \qquad \text{c)}\quad f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{x^2+x}{x^2-1}$$

8. Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm de som existerar

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x+1}{2x^3-x^2+2} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1}{x^2+4x} \qquad \text{c)}\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

9. Bestäm, om de existera, följande gränsvärden:

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{(1,01)^n} \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2} \qquad \text{c)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^{8n}}{n!} \qquad \text{d)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$$

10. Betäm, om de existera, följande gränsvärden:

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[4]{n^3}}{n-\sqrt[5]{n^3}+2n^{3/2}} \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{1+n\log n} \qquad \text{c)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log n^2}{2+\log n}$$

$$\text{d)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}} \qquad \text{e)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}} \qquad \text{f)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log(2^n+3)}{\log(4^n+5)}$$

11. Undersök om följande gränsvärden existera och bestäm i förekommande fall gränsvärdet

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+100} \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+100}\right)^{n} \qquad \text{c)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

$$\text{d)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \qquad \text{e)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} \qquad \text{f)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

12. Bestäm följande gänsvärden

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+x\sin 3x}{\cos x+x^2} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x^3}{x^2} \qquad \text{c)}\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot\log x$$

13. Bestäm

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+3}-x} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+3}-x}$$

14. Beräkna

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2\log x^2+x\sqrt{\log x}+\log(x^3+1)}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}+x^3\log\left(e+\dfrac{1}{x}\right)}$$

15. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n^3+3}{2n^2+n+1}$$

16. Visa att $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar om $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$. Sök även visa att det gäller $\dfrac{1}{2} < \lim_{n\to\infty} a_n \le 1$.

17. Beräkna följande gränsvärden i den mån de existera

$$\text{a)}\ \lim_{x\to a+0} \frac{x-a}{2(x-a)-|x-a|} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to a-0} \frac{x-a}{2(x-a)-|x-a|}$$

18. Undersök följande gränsvärden och beräkna de som existera ändligt

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{x} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{4x} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{\tan qx} \quad (p, q \text{ reella})$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{|x|}}{x} \qquad \text{e)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}$$

19. Bestäm, om de existera, följande gränsvärden:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{2\arctan x}{3\sin 2x} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 2x \cdot \arcsin 4x}{x \cdot \sin x^2 \cdot \tan 3x}$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 7x}{6(\cos x - 1)} \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos 11x - \cos 5x}$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 0} \frac{(\cos 3x - \cos 5x)\sin(\cos x)}{\sin x^2 \cdot \cos(\sin x)}$$

20. Bestäm, om de existera, följande gränsvärden

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to +0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x^2+\cos x^5} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \sin(\cot x)$$

21. Bestäm, om de existera, följande gränsvärden

$$\text{a)}\ \lim_{x\to \pi/3} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{3x-\pi} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to \pi/3} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{|3x-\pi|}$$

22. Bestäm

$$\text{a)}\ \lim_{x\to +\infty} 2^{-x|\sin x|} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to +\infty} (2^x+3^x)^{1/x} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{|x^2-1|}$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin x^4 + x}{x\arctan x} \qquad \text{e)}\ \lim_{x\to -1-0} (1-x)^k \log(1-x) \text{ om } k>0.$$

23. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{2\sin 2x + \tan 2x}{2\sin x - \tan x}$. Bestäm de x-värden för vilka detta är ett obestämt uttryck av formen $\dfrac{0}{0}$ och bestäm därefter funktionens gränsvärden för dessa x.

24. Beräkna

$$\text{a)}\ \lim_{x\to +0} x^x \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to +0} \sin x \log(4x-x^2) \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to +0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$$

25. $\{a_n\}_1^\infty$ är en oändlig talföljd där $0 \le a_1 \le 1$ och $a_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n}{2}}$. Visa att följden är konvergent och bestäm gränsvärdet.

26. $P(x)$ är ett polynom. Visa att $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x+1)}{P(x)}$ existerar. Vad blir gränsvärdet?

27. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ..., $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Visa att talföljden är konvergent. Bestäm gränsvärdet.

28. Man vet att $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Bestäm $\lim_{x\to+\infty} f(g(x))$.

29. För vilka värden på a, b och c gäller att

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-(ax^2+bx+c)\right\} = 0.$$

30. Visa att talföljden $\{a_n\}_0^\infty$ är konvergent och bestäm gränsvärdet om

a) $a_0 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ b) $a_0 = -\dfrac{1}{5},\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n-1}{a_n+1}$

31. Låt a_1 vara ett givet reellt tal. Definiera a_n, $n = 2, 3, \ldots$ genom $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Visa att talföljden konvergerar och bestäm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

32. a_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ är tal så beskaffade att $\sum_{k=1}^N a_k = 0$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^N a_k\sqrt{n+k} = 0.$$

33. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{\sin 10\pi x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{3\tan\pi x}{\log x^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\sin\pi x\cdot\tan\frac{\pi}{2x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

34. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\tan x-1}{\sin 4x}$

35. Bestäm följande gränsvärden

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x\sin x-2\cos x+2}{2x^2-2x\sin 2x-\cos 2x+1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

36. Bestäm

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$

37. $y = f(x)$ är en kontinuerlig funktion med kontinuerliga första och andra derivator i närheten av $x = 0$. Beräkna

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{f(3x)-f(3x)}.$$

a) om $f'(0) = 1$ b) om $f'(0) = 0$ och $f''(0) = 1$.

38. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\pi\log x+\sin\pi x}{1+\cos\pi x}$.

39. Beräkna med hjälp av medelvärdessatsen följande gränsvärden

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to1/2}\frac{\arcsin x-\frac{\pi}{6}}{e^x-\sqrt{e}}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan(\sin x)-\tan(\sin x)}$

40. Bestäm med MacLaurinutveckling följande gränsvärden

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\arctan x - x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - \log(1+x^2)}{1-\cos(x^2)}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^3\Big(\tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x}\Big)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - e^x}$

41. Bestäm ett andragradspolynom $P(x)$ sådant att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + \sin(x^2) + P(x)}{1-\cos x} = 3$$

42. Beräkna

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x) + x^2}{(1+x)^n - 1 + x^2} \quad \text{där } n > 0.$$

43. Beräkna

$$\lim_{x\to +\infty}\Big(1 + \sin\frac{1}{x}\Big)^{\log(1+e^x)}.$$

44.