Matematiska uppgifter

Samlingen omfattar väsentligen uppgifter som givits i trebetygstentamina vid Uppsala universitet under senare år på en kurs svarande mot

Widder Advanced Calculus

Gask Ordinära differentialekvationer och

Knopp Elemente der Funktionentheorie och Funktionentheorie I

Innehåll

A. Analys allmänt

1. Visa följande sats: Om en följd monotona funktioner (kontinuerliga eller ej) konvergerar mot en kontinuerlig gränsfunktion på ett slutet intervall, så är konvergensen likformig.

2. Funktionerna $f_n(x), n = 1, 2, \dots,$ är kontinuerliga och deriverbara i det slutna intervallet $[a, b]$, och uppfyller $|f_n'(x)| \leq C$, där C är en fix konstant, för alla x och n. Visa att funktionsföljden $\{f_n(x)\}$ konvergerar likformigt i $[a, b]$, om den konvergerar i någon punkt i varje delintervall av $[a, b]$.

3. Bevisa $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4. Visa att $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{t(a^2+t^2)}\,dt$, $a \neq 0, x > 0$, satisfierar differentialekvationen

$$y'' - a^2 y + \frac{\pi}{2} = 0$$

och bestäm härav $f(x)$.

5. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}.$$

6. Låt varje $f_n(x)$ vara monoton på $0 \leq x \leq 1$ och antag att

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(f_n(x) - x\right)^2 dx = 0.$$

Visa att $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ likformigt på $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ för varje $\varepsilon > 0$. Gäller $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x, 0 \leq x \leq 1$?

7. Visa att $g = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ existerar och bestäm g.

8. Beräkna $1 + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{8!} + \dfrac{1}{12!} + \dots$.

9. Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig på $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, och

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = o(|h|),$$

så är $f(x) \equiv$ konstant.

10. En kurva framställes av den kontinuerliga funktionen $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $f(0) = f(1)$. Med en korda förstås ett linjestycke, som har båda ändpunkterna på kurvan. Visa att för varje naturligt tal n finns det en vågrät korda av längden $\dfrac{1}{n}$.

11. Låt $f(x)$ vara kontinuerligt deriverbar i $[a, b]$ och antag att i medelvärdessatsen

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x + \theta h)$$

θ är oberoende av x och h. Bestäm θ och $f(x)$.

12. $f(x)$ är kontinuerlig och har ett ändligt antal nollställen och

$$\int_a^b f(x) x^k\,dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Påstående: $f(x)$ har minst n teckenväxlingar.

13. För vilka $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ konvergerar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1 + x^\beta \sin^2 x}\, dx$?

14. När följer ur existensen av $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left\{\varphi(x) + \frac{a}{x}\int_0^x \varphi(t)\, dt\right\}$ att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ existerar?

15. Låt $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \ldots$ vara en följd av positiva heltal och låt x vara det oändliga decimalbråk, som bildas genom att talen a_n sättas efter varandra (t.ex. om $\{a_n\}$ är primtalen, så är $x = 0,23571113\ldots$). Visa att om $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n} = \infty$, så är x irrationellt. (*Ledning*: Hur många av talen a_n kan ha samma antal siffror, om x är rationellt?)

16. Polynomen $P(z)$ och $Q(z)$ med komplexa koefficienter ha samma nollställen, möjligen med olika multipliciteter. Samma sak gäller för polynomen $P(z) + 1$ och $Q(z) + 1$. Visa att $P(z) \equiv Q(z)$.

17. Visa olikheten

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b} \geq (x + y) \log \frac{x + y}{a + b}$$

om alla tal är positiva. Visa också att likhet råder om och endast om $x/a = y/b$.

18. Om $a_\nu > 0$ och $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = k^n$, så gäller

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq (1 + k)^n.$$

19. Ett järnvägståg tillryggalägger på en given tid T en given sträcka S. Begynnelsehastigheten är noll, och för accelerationen är angiven en övre gräns A (existerar av tekniska skäl). Under dessa villkor finns det för alla möjliga maximalhastigheter en undre gräns B, vilken är större än genomsnittshastigheten S/T och vilken skall beräknas.

20. För vilka $x > 0$ konvergerar $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$? Bestäm de intervall, i vilka konvergensen är likformig.

21. Om $\sum a_n$ divergerar, så är $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{\nu=1}^n a_\nu \log \nu\right| = \infty$.

22. Implicera villkoren

(1) $|b_n| \leq |a_n|$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

(3) $\displaystyle\sum_0^\infty$ konvergent

att $\displaystyle\sum_0^\infty b_n$ konvergerar? Ge bevis eller motexempel.

23. $\displaystyle\sum_1^\infty a_n$ är en divergent serie med positiva termer. s_n är n:te delsumman. Visa att $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{a_n}{s_n}$ är divergent.

24. $\{a_n\}_1^\infty$ är en följd av positiva tal, sådana att $\displaystyle\sum_1^\infty a_n \log a_n$ divergerar. Divergerar då även $\displaystyle\sum_1^\infty a_n^{\log a_n}$?

25. Bevisa, att om $f(x)$ är ett polynom med heltalskoefficienter, så är summan av serien

$$f(0) + f(1) + \frac{f(2)}{2!} + \cdots + \frac{f(n)}{n!} + \ldots$$

alltid en heltalsmultipel av e.

26. Konvergerar eller divergerar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$? ($[x]$ är heltalsdelen av x.)

27. Bestäm för varje n ett heltal p så att $e > \log_p n > 1$ och bilda

$$a_n = n \cdot \log n \cdot \log\log n \cdot \ldots \cdot \log_p n.$$

Konvergerar eller divergerar $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$?

28. Man definierar konvergensexponenten λ för talföljden $\{a_n\}_1^\infty$, $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots, a_n \to \infty$ då $n \to \infty$, som ett tal, så beskaffat att serien $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n^{-\sigma}$ konvergerar för $\sigma > \lambda$ och divergerar för $\sigma < \lambda$. Om serien ej konvergerar för något värde på σ sättes $\lambda = \infty$. Visa att λ är entydigt bestämt och att det gäller

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log a_n} = \lambda.$$

29. a_ν och b_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ är två delföljder med $a_\nu \geq 0$, $b_\nu \geq 0$ och

$$\alpha = \liminf \sqrt[\nu]{a_\nu} \quad \text{och} \quad \beta = \limsup \sqrt[\nu]{b_\nu}$$

existerar. Visa att om $\alpha > \beta$ så är

$$\liminf \sqrt[\nu]{a_\nu + b_\nu} = \alpha.$$

30. Låt $\{p_n\}_1^\infty$ vara en begränsad följd av positiva reella tal. Visa att

$$\liminf p_n \leq \liminf (p_1 p_2 \ldots p_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup (p_1 p_2 \ldots p_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup p_n.$$

(Okt 60)

31. Låt $\sum a_n$ vara en konvergent serie med icke negativa termer och antag att $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} > 0$. Visa att $n^2(a_n - a_{n+1}) \to 0$. (Okt 60)

32. Låt $(f_n)_1^\infty$ vara en punktvis avtagande följd av icke-negativa kontinuerliga funktioner på $(-\infty, \infty)$ och antag att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx$ existerar. Visa att om $\lim f_n = f$ är kontinuerlig så gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(Okt 60)

33. Definiera $f(x) = (1 + x^4)^{-1}$, $-\infty < x < \infty$. Beräkna för alla x

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}.$$

(Jan 61)

34. Talföljden $\{a_n\}$ är positiv och monoton. Visa att om $\sum e^{-a_n}$ konvergerar gäller detta även $\sum n^{-1}a_n^2$. Sök även visa att antagandet om monotonicitet kan slopas. (Jan 61)

35. En funktion $f(x)$ är kontinuerlig på $0 \leq x \leq 1$. Till varje x existerar $\varepsilon > 0$ så att $f(y)$ är monotont växande i $x < y < x + \varepsilon$. Visa att $f(x)$ är monoton på $0 \leq x \leq 1$. (Jan 61)

36. Bestäm

$$\inf\left(e^{x/y} + e^{y/z} + e^{z/x}\right)$$

för $x > 0, y > 0, z > 0$. (Mars 61)

37. f är en kontinuerlig funktion i intervallet $[0,\ 1]$, $f(x) \geq 0$ för $x \leq a < 1$ och $f(x) \leq 0$ för $x \geq a$. Vidare gäller att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 0.$$

Visa att $f \equiv 0$. (Mars 61)

38. Bestäm $\lim\limits_{a\to+0} \displaystyle\int_0^\infty \frac{a\log(1+t)}{t^{3/2}(t^{1/2}+a)}\,dt.$ (Mars 61)

39. x och y är positiva tal och $x < y$. Bestäm definitionsområde och värdeförråd för den funktion $y = f(x)$ som implicit är definierad genom relationen

$$x^y = y^x$$

(Sept. 61)

40. Funktionen $f(x)$ är för $x > 0$ definierad genom

$$f(x) = \frac{1 - x^5\sqrt{x}}{x^3(1+x^3)}.$$

Den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ divergerar vid båda gränserna. Visa att man likväl kan bestämma en funktion $\omega(\varepsilon)$ av formen $c \cdot \varepsilon^{-a}$, där c och a är positiva konstanter, så att

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^{\omega(\varepsilon)} f(x)\,dx$$

existerar och är ändligt. (Sept. 61)

41. Funktionerna $f(x)$, $p(x)$ och $q(x)$ är kontinuerliga på intervallet $a \leq x \leq b$ och $p(x) > 0$ på detta intervall. Vidare gäller

$$f(x) \leq q(x) + \int_a^x p(t)f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Visa att

$$f(x) \leq q(x) + \int_a^x p(t)q(t)\exp\left\{\int_t^x p(u)\,du\right\}dt, \quad a \leq x \leq b.$$

(Ledning: Visa att funktionen $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x p(t)f(t)\,dt$ uppfyller

$$\varphi'(x) - p(x)\varphi(x) \leq p(x)q(x), \quad a \leq x \leq b.)$$

(Okt. 61)

42. Visa att de x-värden på $-\infty < x < \infty$ för vilka en given monotont växande funktion är diskontinuerlig, bildar en numrerbar mängd. (Okt. 61)

43. $f(x)$ är en funktion sådan att $f'(x)$ existerar på $a \leq x \leq b$ och $f'(a) < f'(b)$. Visa att till varje c sådant att $f'(a) < c < f'(b)$ existerar ett ξ, $a < \xi < b$, sådant att $f'(\xi) = c$. (Okt. 61)

44. Bestäm $\sup(4x_1x_2 - x_3^2)$ på enhetscirkeln med centrum i origo i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. (Dec. 61)

45. Visa att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+y} \sin x \, dx$$

är likformigt konvergent i inetrvallet $0 \leq y \leq 1$. (Mars 62)

46. Beräkna $\lim_{t \to +0} \int_0^1 \frac{dx}{(t+x)^2(1+x+x^2)}$. (Mars 62)

47. $\{a_n\}_0^\infty$ är en talföljd sådan att $a_n / \log n \to 1$. Visa att

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\sum_0^\infty a_n x^n}{\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}} = 1.$$

(Ledning: $(\log n)^{-1}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \to 1$.)

48. $K < 1$ är en konstant och f är en deriverbar funktion sådan att

$$|f'(x)| \leq K < 1 \quad \text{för alla } x.$$

Låt x_0 vara givet och definiera följden $\{x_n\}_0^\infty$ genom

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Visa att följden är konvergent och att dess gränsvärde är oberoende av x_0. (Sept. 62)

49. Låt h vara en positiv funktion sådan att $h(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$. Visa att

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} > 1$$

om och endast det finns en konstant $k > 1$ sådan att

$$g(x) - k \cdot h(x) \to +\infty \quad \text{då } x \to \infty.$$ (Okt. 62)

50. Visa att serien

$$\sum_1^\infty (-1)^n n \sin \frac{x}{(n+1)(n+2)}$$

konvergerar för alla reella x och att summan är deriverbar. Bestäm dess derivata för $x = 0$. (Jan. 63)

51. Bestäm för olika givna positiva α

$$\lim_{n \to \infty} n \sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{n^2 + k^2}.$$ (Jan. 63)

52. a är ett givet tal, $0 < a < 1$. Talen a, a^a, $(a^a)^a$, $a^{(a^a)}$, ...dvs. alla tal av formen

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$$

där potensbildningarna kan ske i godtycklig ordning, utgör en talmängd. Visa att denna talmängd är begränsad och bestäm dess största och minsta hopningspunkt. (Jan. 63)

53. Visa för alla polynom $k(x,t)$ i x och t att om $f(x)$ är kontinuerlig och uppfyller ekvationen

$$f(x) = \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt, \quad 0 \le x \le 1,$$

så är $f(x) = 0$ för $0 \le x \le 1$. (Okt. 64)

54. Beräkna $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n^2 + nm + m^2}$. (Okt. 64)

55. f är en kontinuerlig (men ej nödvändigtvis differentierbar) funktion i $-\infty < x < \infty$ sådan att det för varje x gäller

$$|f(x+h) - f(x)| < |h|$$

om h är tillräckligt litet och $\neq 0$. Visa att olikheten gäller för alla x och alla $h \neq 0$. (Maj 59)

56. f är kontinuerlig i $0 \le x \le 1$, $f(0) = 1$ och $0 \le f(x) \le 1$, om $0 < x \le 1$. För små positiva värden på x gäller $f(x) = 1 - (1 + o(1))x^3$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}} \int_0^1 \big(f(x)\big)^n\, dx = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}} \int_0^1 e^{-nx^3}\, dx = \int_0^\infty e^{-t^3}\, dt. \quad \text{(Maj 59)}$$

57. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[n]{x^{2n} + a^{2n}}}$; $a > 0$. (Mars 60)

58. Funktionen $f(x)$ är två gånger differentierbar i intervallet $0 \le x \le 1$. Vidare gäller $f(0) = f(1)$ och $|f''(x)| \le M$. Visa att $|f'(x)| \le \frac{M}{2}$.

59. Låt E vara mängden av polynom $P(x) = c(a - x)(b + x)$, där $a \ge 1$, $b \ge 1$ och c bestäms ur villkoret

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = 1.$$

Sätt för fixt x i intervallet $-1 \le x \le 1$ $\varphi(x) = \sup_{P\in E} P(x)$ och visa att

$$\min_{-1\le x\le +1} \varphi(x) = \frac{2}{3}. \quad \text{(Mars 60)}$$

60. Bevisa att det ej finns någon positiv talföljd a_n, sådan att

$$\sum \frac{1}{a_n} \quad \text{och} \quad \sum \frac{a_{n+1} - a_n}{n}$$

båda konvergerar. (Dec 60)

61. Antag att $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion i kvadraten $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $f(0,0) = 0$. Sätt

$$g(x,y) = f(x,y) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(0,0) = 0.$$

Visa att $\lim_{x\to 0} g(x,y) = 0$. Är konvergensen likformig i y? (Dec 60)

62. Beräkna $\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty (1+t)^{-1} e^{\cdot xt}\, dt$. (Maj 61)

63. Sätt

$$f(x,y) = \frac{e^{xy}(\cos x - y \sin x) - 1}{x^2}$$

för $x \neq 0$. visa att man kan bestämma $f(0,y)$ så att f blir kontinuerlig i hela planet. (Maj 61)

64. Funktionen f är kontinuerlig i det halvöppna intervallet $I = \{x: 0 \leq x < 1\}$. Visa att f är likformigt kontinuerlig på I då och endast då f har ett egentligt gränsvärde då $x \to 1 - 0$. (Dec 61)

65. Betrakta reellvärda funktioner på den reella axeln. Låt $(f_n)_0^\infty$ vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot funktionen f och låt funktionsföljden $(g_n)_0^\infty$ konvergera punktvis mot g. Visa att $f_n(g_n(x)) \to f(g(x))$ då $n \to \infty$ med punktvis konvergens. Visa genom exempel att punktvis konvergens hos $(f_n)_0^\infty$ och $(g_n)_0^\infty$ inte medför punktvis konvergens hos $f_n(g_n(x))$. (Dec 61)

66. Definiera funktionen h genom $h(x) = -x \log x$ för $0 < x \leq 1$, $h(0) = 0$ och låt p, q och r vara icke-negativa tal med summan 1. Bestäm supremum för $h(p) + h(q) + h(r)$. (Jan. 62)

67. Sätt $H_n(x) = e^{x^2} \mathrm{D}^n \left(e^{-x^2}\right)$. Visa att H_n är ett polynom ($n = 0, 1, 2, \dots$), att

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx = 0$$

om $m \neq n$ samt beräkna integralen om $m = n$. (Jan. 62)

68. Undersök konvergens och likformig konvergens av funktionsföljden (f_n) på positiva reella axeln om $f_n(x) = \sin\sqrt{x + 4n^2\pi^2}$. (Jan. 62)

69. $f(x)$, definierad på reella axeln, är två gånger deriverbar och uppfyller

$$|f(x)| \leq A^2, \quad |f''(x)| \leq 1.$$

Visa att $|f'(x)| \leq a\sqrt{2}$. (Maj 62)

70. $f(x)$ är en deriverbar funktion sådan att

$$f(x) + f(y) + f(x)f(y) = f(x + y)$$

för alla reella x och y. Bestäm $f(x)$. (Maj 62)

71. Antag att samtliga nollställen till polynomet $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ligger i halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$. Visa att om f är n gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $+\infty$ och om

$$f^{(n)}(x) + a_1 f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n f(x) \to 0 \quad \text{då } x \to +\infty$$

så gäller också $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$. (Sept. 62)

72. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $0 \leq t < \infty$, sådan att $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = A$. Visa att

$$\lim_{u\to 0} u^2 \int_0^\infty e^{-ut} f(t)\, dt = A. \qquad \text{(Okt. 62)}$$

73. $f(x, y)$ är definierad i hela planet. $f(x, y_0)$ är en kontinuerlig funktion av x för alla y_0. f_y' existerar och $f(x_0, y)$ och $f_y'(x_0, y)$ är kontinuerliga funktioner av y för alla x_0. Bevisa att $f(x, y)$ är kontinuerlig. Motiveringarna måste vara tydliga och fullständiga. (Okt. 62)

74. En reell talföljd definieras av rekursionsformeln

$$a_{k+1} = 2^k a_k^2.$$

Vad är villkoret på a_0 för att a_k skall $\to 0$ då $k \to \infty$? (Dec. 62)

75. Beräkna $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 (x^2 - x + 1)^n\, dx$. (Dec. 62)

76. Bestäm övre och undre gräns av funktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ i området $x^2 + y^2 + z^2 < 2$, $2xy < 1$. (Dec. 62)

77. Visa att funktionerna

$$1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n,\ e^x,\ \sin x,$$

är linjärt oberoende över varje intervall. (Mars 63)

78. Visa att om f är en i en omgivning av origo n gånger deriverbar funktion med $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ så är $\lim_{x\to 0} x^{-n} f(x) = 0$. (Mars 63)

79. Låt $\{f_n\}_1^\infty$ vara en följd av funktioner definierade på en sluten begränsad mängd M på rella axeln. Visa att $f_n \to 0$ likformigt på M om och endast om för varje val av $x \in M$ och följd $\{x_n\}_1^\infty$ med $x_n \to x$, gäller $f_n(x_n) \to 0$. (Mars 63)

80. A och B är två mängder i planet. A är kompakt, dvs. sluten och begränsad och B är sluten. Visa att

$$A + B = \{a + b | a \in A,\ b \in B\}$$

är sluten. (Maj 63)

81. Antag att f är kontinuerlig och begränsad på reella axeln. Visa att

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \lim_{u\to +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin u}{\cosh t - \cos u}\, dt. \qquad \text{(Maj 63)}$$

82. För vilka positiva a existerar

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e^{-n}}^{1} \left(1 + \frac{\log u}{n}\right)^{an} \frac{du}{u}$$

ändligt. Bestäm i dessa fall gränsvärdet. (Sept. 63)

83. På intervallet $I : 0 \le x \le 1$ bildar man en punktmängd E på följande sätt: Först konstruerar man ett öppet intervall med längden $\frac{1}{3}$ mitt på I och låter alla dess punkter tillhöra E. Sedan konstruerar man mitt på vartdera av de två kvarvarande intervallen ett öppet intervall med längden $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2}$ och låter alla dess punkter tillhöra E. Mitt på vartdera av de kvarvarande fyra intervallen konstruerar man sedan ett öppet intervall med längden $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^3}$, osv. E består således av alla punkter i alla dessa numrerbart många intervall. Deras sammanlagda längd är tydligen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Funktionen $y = f(x)$ är 1 på E och 0 för övrigt. Visa genom att bilda översummor och undersummor att f ej är integrerbar (i Riemanns mening). (Sept. 63)

84. Beräkna $\lim_{x\to\infty} \left(\int_0^1 \left(e^t + t\right)^x dt \right)^{\frac{1}{x}}$. (Okt. 63)

85. $\{f_n(x)\}$ är en följd av reella funktioner som uppfyller

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le A|x - y|^\alpha$$

för $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $n = 1, 2, \dots$, där A och α, $0 < \alpha \le 1$, inte beror av x, y och n. Vidare är

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = 0.$$

Visa att funktionsföljden $\{f_n(x)\}$ konvergerar likformigt på $0 \le x \le 1$ och bestäm gränsfunktionen. (Okt. 63)

86. $f(x)$ är kontinuerlig, icke-negativ och monotont växande i $0 \leq x \leq 1$. $g(x)$ är kontinuerlig, icke-negativ och monotont avtagande i samma intervall. Bevisa olikheten

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)g(1-x)\,dx. \qquad \text{(Okt. 63)}$$

87. Bevisa att man ur varje reell oändlig talföljd kan välja ut en monoton oändlig talföljd. (Dec. 63)

88. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara reella tal med $0 \leq a_k < 1$ för $1 \leq k \leq n$ och $\sum_1^n a_k = 1$. Visa att

$$\sum_1^n \frac{a_k}{1-a_k} \geq \frac{n}{n-1}. \qquad \text{(Dec. 63)}$$

89. Beräkna i punkten $(0;\ 0)$ derivatan $\dfrac{\partial^{18}}{\partial x^{11}\partial y^7}\cos(x^3 + x^2y - xy^2)$. (Jan. 64)

90. För den kontinuerliga funktionen f definierad för $a \leq x \leq b$ gäller att högerderivatan

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

är $= 0$ för $a \leq x < b$. Visa att f är konstant. (Jan. 64)

91. På en sfär med radien 1 ligger fyra punkter A, B, C, D. Sök maximum av tetraedern med hörnen i A, B, C, D om de tre sträckorna AB, BC och CD alla har längden $\sqrt{2}$. (Jan. 64)

92. Visa, att om en potensserie i x konvergerar likformigt på det öppna intervallet $-1 < x < +1$ så konvergerar den för $x = 1$. (Mars 64)

93. Bestäm om möjligt en konstant a så, att funktionen f given av

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ a & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

blir derivatan av en annan funktion. (Mars 64)

94. Man säger att en kontinuerlig funktion är konvex om kordan till en båge av funktionskurvan ligger ovanför bågen eller sammanfaller med denna. Låt $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vara givna tal sådana att det finns en konvex funktion f med $f(i/n) = a_i$. Låt K beteckna klassen av sådana funktioner samt bestäm

$$\sup_{f\in K} \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{för alla } n \text{ och} \quad \inf_{f\in K} \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{för } n = 2,\ 3 \text{ och } 4. \qquad \text{(Mars 64)}$$

95. Visa existensen av

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{1/2}^{\infty} \frac{\cos^{2n} \pi x}{x(x+1)}\,dx$$

och beräkna värdet. (Maj 64)

96. Låt A vara ett positivt reellt tal. Bestäm supremum av determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

under villkoret $-A \leq a_{ik} \leq A$, $i, k = 1,\ 2,\ 3$. (Maj 64)

97. Visa, att om $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ är reella tal så är

$$\sup\sum_1^n a_k x_k = \frac{1}{2}\big(\max_k a_k - \min_k a_k\big),$$

där sup tages över alla rella $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ sådana att

$$\sum_1^n |x_k| = 1 \quad \text{och} \quad \sum_1^n x_k = 0.$$ (Sept. 64)

98. $\{f_n(x,y)\}_1^\infty$ är en följd av funktioner, som är kontinuerliga i kvadraten $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. För varje fixt x, $0 \le x \le 1$, konvergerar följden likformigt i $0 \le y \le 1$ och för varje fixt y, $0 \le y \le 1$, konvergerar följden likformigt i $0 \le x \le 1$. Innebär detta att följden $\{f_n(x,x)\}_1^\infty$ konvergerar likformigt i $0 \le x \le 1$? Ge bevis eller motexempel. (Sept. 64)

99. Med att en funktion f är konvex i $0 \le x \le 2\pi$ menas att för alla x i intervallet

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt,$$

där g är monotont växande och begränsad. Visa att om f är konvex i $0 \le x \le 2\pi$ så gäller för alla naturliga tal n att

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \ge 0.$$ (Sept. 64)

100. På intervallet $[0,\ 1]$ definieras en funktion f på följande sätt: $f(0) = 0, f(1)1, f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^3}$ för $\frac{m}{n}$ rationellt, $(m,n) = 1$, samt slutligen $f(x) = 0$ för x irrationellt. Visa att f är av begränsad variation på $[0,\ 1]$, dvs. att

$$\sum_1^p |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le M < \infty$$

för varje ändlig intervallindelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = 1$. (Dec. 64)

101. Vilka funktioner $\varphi(t)$ av en variabel t är sådana att antagandet att $F(x,y)$ är differentierbar i $(0;\ 0)$ och $F(0,0) = 0$ implicerar att även funktionen $\varphi(F(x,y))$ är differentierbar i $(0;\ 0)$? För vilka funktioner $\varphi(t)$ gäller implikationen i omvänd riktning? (Dec. 64)

102. Bevisa för $q \ge 0$ att funktionsföljden

$$y_n(x) = x + \int_0^x t y_{n-1}(t)^q\,dt, \quad y_0 \equiv 0,\ n = 1,\ 2,\ \dots,$$

konvergerar för $x \ge 0$. Utför eventuellt beviset blott under inskränkande antagande om q. (Dec. 64)

103. Beräkna $\sup\sum_1^n a_n$ över alla reella talföljder $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots$ som uppfyller

$$\sum_1^\infty n(n+1)a_n^2 \le 1.$$ (Jan. 65)

104. Beräkna för $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}\,dx \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} n\int_1^\infty \frac{dx}{a+x^n}. \qquad \text{(Jan. 65)}$$

105. M är en begränsad icke numrerbar mängd. M^1 är mängden av alla hopningspunkter till M. Visa att M^1 innehåller oändligt många punkter. (Mars 65)

106. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sqrt[n]{\sin^2 n\pi x}\,dx,$$

$f(x)$ antages vara kontinuerlig för $0 \leq x \leq 1$. (Mars 65)

107. Visa att om f är deriverbar och reell på intervallet $[a, b]$ och $f(a) = f(b) = 0$, så finns något y i intervallet med

$$|f'(y)| > 4(b-a)^{-2}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{(Maj 65)}$$

108. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]^{1/n^2}$. (Maj 65)

B. Differentialgeometri, envelopper, linje- och ytintegraler, vektoranalys

1. Beräkna krökningscentrum och oskulerande plan i punkten $t = 1$ till kurvan

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{2\sqrt{2}t\sqrt{t}}{3}, \quad z = t.$$

2. Beräkna torsionen i punkten $t = 0$ på kurvan

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

3. Bestäm alla rymdkurvor för vilka både krökning och torsion är konstanta.

4. Visa att kurvan $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$, där $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är givna vektorer, ligger i ett plan och bestäm ekvationen för detta plan.

5. Bestäm ekvationerna för huvudnormalen och binormalen till kurvan

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{2t^3}{3}, \quad z = \frac{t^4}{2}$$

i punkten $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2})$.

6. Visa att alla tangentplan till ytan $z = x + f(y - z)$ är parallella med en och samma räta linje.

7. Visa att om längs en kurva förhållandet mellan krökning och torsion är konstant, så måste kurvans tangent bilda en konstant vinkel med en fix riktning.

8. Hur långt kan man gå mot nordost om man börjar vid ekvatorn? Jordens radie antages vara R.

9. De kurvor på en yta som är sådana att deras huvudnormal i varje punkt är parallell med ytans normal kallas geodetiska linjer. Visa att storcirklarna är de enda geodetiska linjerna på en sfär.

10. Visa att ytorna

$$xy = az^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b, \quad z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$$

parvis skär varandra ortogonalt för godtyckliga positiva a, b och c.

11. Ytan $y = x \tan z$ skär planet $z = \dfrac{\pi}{4}$ längs en rät linje. Visa att ytans normaler på denna linje genererar en hyperbolisk paraboloid.

12. På huvudnormalen till skruvlinjen

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

avsättes en sträcka av konstant längd l. Bestäm geometriska orten för dess ändpunkt.

13. Bevisa att en av bisektriserna till vinkeln mellan tangent och binormal till kurvan

$$x = 3t, \quad y = 3t^2, \quad z = 2t^3$$

har konstant riktning.

14. En yta skäres med sitt normalplan i punkten P. Krökningsradien i P för den så erhållna kurvan C är R. En annan kurva C' på ytan tangerar C i P. Den har krökningsradien ρ. Visa att $\rho \cos \theta = R$, där θ är den spetsiga vinkeln mellan ytnormalen och kurvan C':s huvudnormal i P. (Meusniers sats)

15. Bestäm normalkrökning och medelkrökning i punkten $(1;\ 0;\ 1)$ på ytan $x^2 + y^2 = z^2$.

16. Bestäm de extremala krökningsradierna till ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i punkten $(0;\ 0;\ c)$.

17. Bestäm en rotationsyta vars extremala krökningsradier i varje punkt har samma längd men motsatt riktning.

18. Bestäm enveloppen till karakteristikorna till ytskaran

$$tx^2 + t^2y + t^3z = 1 \quad t \text{ parameter.}$$

19. Vilken yta envelopperas av det oskulerande planet till kurvan

$$x = z^2, \quad y = z^3?$$

20. Vilken relation skall gälla mellan a och b för att linjeskaran $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ skall ha cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ som envelopp?

21. Bestäm enveloppen till de plan som tangerar parablerna

$$y^2 = 2x - 1,\ z = 0 \quad \text{och} \quad y^2 = 2z - 1,\ x = 0.$$

22. Bestäm enveloppen till de plan som går genom $(\sqrt{2};\ 0;\ 0)$ och har avståndet 1 till origo.

23. Cylindern $x^2 + y^2 - x = 0$ utskär en yta S med rand Γ ur paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma y\,dx + dy + x\,dz$ dels direkt, dels med hjälp av en ytintegral över ytan S.

24. Beräkna integralen

$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

där S är ytan av en kropp V och α, β γ är vinklarna mellan yttre normalen till S och koordinataxlarna.

25. Beräkna integralen

$$\iint_S (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,dS$$

utsträckt över sfären $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Beteckningar som i uppgift 24.

26. Beräkna integralen

$$\iint_S \{(z^n - y^n)\cos\alpha + (x^n - z^n)\cos\beta + (y^n - x^n)\cos\gamma\}\,dS$$

över övre halvan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Beteckningar som i uppgift 24.

27. Visa att för en harmonisk funktion u

$$\iiint_V |\mathrm{grad}\,u|^2\,dV = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

om $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ är derivatan längs den yttre normalen till S.

28. C_1 och C_2 är två konvexa kurvor som bägge innesluter punkten O. En radie från O skär C_1 i P_1 och C_2 i P_2. P är mittpunkten på P_1P_2. C är den kurva som P beskriver då radien vrider sig runt O. Visa att om A_1, A_2, A och L_1, L_2 och L är ytorna resp. omkretsarna till C_1 , C_2 och C så gäller

$$A \leq \frac{A_1 + A_2}{2}\ ;\ L \leq \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

När råder likhet?

29. Bevisa att alla normalplan till kurvan

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin t\cos t \\ z = \cos t \end{cases}$$

går genom origo. (Sept. 64)

30. Bestäm krökningen för kurvan

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \quad -\infty < t < \infty \\ z = t \end{cases}$$

Om Ni använder en formel som ger krökningen av en kurva uttryckt i en parameter som inte är båglängden, skall denna formel härledas. (Dec. 63)

31. Ekvationerna

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 2uv,$$

definierar i parameterform en yta i xyz-rymden. Beräkna arean av den del av ytan som svarar mot $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$ (ortonormala koordinater). (Dec. 64)

32. Låt C vara en rymdkurva med följande egenskap. Till varje punkt Q på C finns en punkt P på en rät linje L utanför C så att sträckan QP har konstant längd och faller längs tangenten till C i Q.

a) Visa att C är plan.

b) Bestäm C:s ekvationer i lämpligt valt koordinatsystem. (Jan. 65)

33. En cirkel med radie a ritas på ett papper som sedan rullas till en cylinder med radie b. Härvid övergår cirkeln i en kurva C. Sätt upp ekvationerna i lämpligt koordinatsystem för kurvan C med båglängden på cirkeln i ursprungligt läge som parameter. Mellan vilka gränser varierar C:s krökning?

34. Låt P vara paraboloiden $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0, a,\ b>0$. Vilka kurvor på P är sådana att normalen till P i varje punkt på kurvan bildar en fix vinkel med z-axeln? Bestäm arean av en del av paraboloiden som begränsas av en sådan kurva.

C. Differentialekvationer

Se även under avdelning E.

1. Hur många lösningar till differentialekvationen $y'^3=y^2f(x)$ går genom origo? $f(x)$ är en given kontinuerlig funktion.

2. Reducera

$$\text{a)}\quad \frac{d^3y}{dx^3}+y^2=1, \qquad \text{b)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

till ett första ordningens system och diskutera Lipschitz-villkor för detta.

3. $f(x,y)$ är kontinuerlig och uppfyller $|f(x,y)|\le\frac{1}{2}$ samt $|f(x,y)-f(x,z)|\le A|y-z|$ med $A>1$ i $K:\ |x|\le 1,\ |y|\le 1$. $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar till $y'=f(x,y)$ med $y_1(0)=0$ och $y_2(c)=b, 0\le|b|\le\frac{1}{2}$. Gen en uppskattning av $|y_1|$ och $|y_2|$ i K. Ange ett intervall kring origo, där $|y_1(x)-y_2(x)|\le A|b|$.

4. Lös $y'=xy, y(0)=1$ med Picards metod.

5. Ange ett intervall där iterationerna konvergerar om Picards iterationsmetod tillämpas på differentialekvationen $y'=e^y, y(0)=0$.

6. Betrakta differentialekvationen $y'=f(x,y)$ där $f(x.y)$ uppfyller $|f(x,y)|\le M|y\log|y||$. Visa att det endast finns en lösning genom origo.

7. $f(x,y)$ är kontinuerlig och $|f(x,y)-f(x,z)|\le f(x)g(y-z)$ där $f(x)$ är kontinuerlig och $g(v)$ positiv om $v\ne 0$. Visa att om $\int_0^a \frac{dv}{g(v)}$ är divergent, så har differentialekvationen $y'=f(x,y)$ entydiga lösningar. (Till givna begynnelsevärden finns bara en lösning.)

8. Genom vilka punkter i planet passerar entydiga lösningar till differentialekvationen $y'=e^{\sqrt{|xy^2|}}$? Motivera utförligt. (Mars 62)

9. $f(x,y)=\min(x\sqrt[3]{y},\sqrt[3]{x})$. Undersök lösningarna till $y'=f(x,y)$ med avseende på existens och entydighet. Dvs. ange de punkter i planet genom vilka inga lösningskurvor passerar och de punkter där lösningskurvorna förgrenar sig. (Sept. 63)

10. Differentialekvationen $y' = x^n + y^n$, n naturligt tal, med begynnelsevillkor $y(1) = 1$ har enligt existenssatsen en lösning i ett intervall $1 \le x \le A$. För vilka n kan A väljas godtyckligt stort? (Maj 64)

11. $f(x, y)$ är definierad och har kontinuerliga partiella derivator i hela planet utom i $(0; 0)$. $f(x, 0) \neq 0$ för alla $x \neq 0$. Undersök differentialekvationen

$$y' = f(x^{1/3}, y^{1/3})$$

med avseende på existens och entydighet av lösningar genom givna punkter $(x_0;\ y_0)$. (Mars 65)

D. Fourierserier

1. Utveckla i Fourierserie funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{för } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Utveckla i Fourierserie funktionen $y = \cosh x$, $-\pi \le x \le \pi$.

3. Utveckla i Fourierserie den funktion $f(x)$, som definieras genom

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ f(x) &= -1 && \text{för } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ f(x) &= 0 && \text{för övriga värden i } -\pi < x < \pi. \end{aligned}$$

Framställ grafiskt seriens summa i intervallet $0 \le x \le 4\pi$.

4. Utveckla i Fourierserie mellan $-\pi$ and π den funktion $f(x)$, som är definierad genom relationerna

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{för } -\pi < x < 0, \\ f(x) &= x && \text{för } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

5. Utveckla i Fourierserie i intervallet $(-\pi,\ \pi)$ följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Ge en geometrisk bild av seriens summa för $-2\pi \le x \le \pi$.

6. Utveckla funktionen $|\sin x|$ i Fourierserie med perioden π.

7. Utveckla i Fourierserie funktionen $e^{-a|x|}$, $-\pi < x < \pi$.

8. Utveckla i Fourierserie den funktion $f(x)$ med perioden 2, som definieras på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < 1, \\ -1 & \text{för } -1 < x < 0. \end{cases}$$

(För övriga x-värden blir $f(x)$ definierad genom periodiciteten.) Framställ grafiskt seriens summa för $-2 \le x \le 4$.

9. Utveckla funktionen $x \sin x$ i Fourierserie i intervallet $-\pi < x < \pi$.

10. Visa att funktionen

$$F(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2},$$

där r är en konstant sådan att $r^2 < 1$ har Fourierserien

$$1 + 2r\cos x + 2r^2\cos 2x + \cdots + 2r^n \cos nx + \dots$$

11. Utveckla den periodiska funktionen $f(x) = \left|\cos \frac{\pi x}{l}\right|$ i en serie av formen

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

12. Utveckla i Fourierserie i intervallet $(-\pi, \pi)$ funktionen $\cos ax$, $a \neq$ helt tal. Visa med användning av resultatet följande formel:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

13. Utveckla

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{för } -\pi < x < 0, \\ x & \text{för } 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

i Fourierserie. Bestäm därefter genom att använda Parsevals relation

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

14. Bestäm Fourierkoefficienterna för $f(x) = x^2$, $-\pi \le x < \pi$. Skriv upp Parsevals relation för denna funktion. Bestäm en formell lösning (skriven som en Fourierserie) till ekvationen

$$(\mathrm{D}^2 + 2\,\mathrm{D} + 2)y = x^2 \qquad (-\pi \le x < \pi).$$

15. Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ genom att utveckla funktionen $f(x) = \frac{x}{2}$ i Fourierserie i intervallet $(-\pi, \pi)$ och sedan använda fullständighetsrelationen.

16. Utveckla $x(\pi - |x|)$ i Fourierserie i intervallet $(-\pi, \pi)$ och härled följande formler:

a) $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32},$

b) $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960},$

c) $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}.$

17. Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion med period 2π. Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att den mot f svarande Fourierserien skall ha formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cos(2n+1)x$$

är att $f(x) \equiv f(-x)$ och $f(x) \equiv -f(x+\pi)$.

18. $f(x)$ är kontinuerlig med perioden 2π. Låt

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)\,dt.$$

a) Visa att $F(x)$ är en jämn funktion och att den är periodisk med perioden 2π.

b) Fourierkoefficienterna a_n, b_n till $f(x)$ antas givna. Bestäm Fourierserien till $F(x)$. Vilken relation erhålles för $x = 0$ om serien konvergerar?

19. Antag att funktionerna $f(x)$ och $f'(x)$ är kontinuerliga för $-\infty < x < \infty$ och att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ och $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$ är likformigt konvergenta för $-1 \le x \le 1$. Då är funktionen $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ kontinuerlig och periodisk med perioden 1. (Visa detta.) Vidare gäller $F'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$ och även $F'(x)$ är kontinuerlig. Visa genom att utveckla $F(x)$ i Fourierserie formeln

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx}\,dx. \qquad \text{(Poissons summationsformel)}$$

20. $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på intervallet $0 \le x \le 1$. Vidare är $\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$ för $n = 0, 1, \ldots$ Visa att $f(x) \equiv 0$ för alla x i $0 \le x \le 1$. (Ledning: använd Weierstrass' approximationssats.)

21. $f(x)$ är en kontinuerlig, deriverbar funktion med styckvis kontinuerlig derivata och $|f(x)| \le M$. Visa att $|a_n| \le \frac{2M}{n}$ och $|b_n| \le \frac{2M}{n}$ om a_n och b_n är Fourierkoefficienterna till $f(x)$. Vad gäller om $f(x)$ är p gånger deriverbar och $|f^{(p)}(x)| \le M$?

22. $f(x)$ är styckvis kontinuerlig i $-\pi \le x \le \pi$ och $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ är absolut konvergent för $\alpha > \frac{1}{2}$, om $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$.

23. Beräkna $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$. (Sept. 62)

24. Utveckla funktionen $\frac{1}{2-\cos\theta}$ i Fourierserie i intervallet $0 \le \theta \le 2\pi$. (Maj 61)

25. Använd Parsevals relation för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

(Ledning: Studera funktionen $f(x) = |\sin x|$.) (Dec. 61)

26. Visa att om $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ så är $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$. (Dec. 61)

27. $f(x)$ är udda med perioden 2π, $f \geq 0$ på $(0, \pi)$, och har Fourierserien $\sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx$. Visa att $b_n \leq nb_1$ för $n = 1, 2, \ldots$ (Maj 62)

28. Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion med period 2π och Fourierserie

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Låt $F(x) = \int_{-\pi}^{x} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt$. Visa att

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n\big((-1)^n - \cos nx\big)}{n}$$

för alla x. (Dec. 63)

29. $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga, har perioden 2π och har likformigt konvergenta Fourierserier (serieutveckling i $-\pi \leq x \leq \pi$). Vidare är f och g udda (dvs. $f(x) = -f(-x)$, $g(x) = -g(-x)$). Bestäm Fourierkoefficienterna för $f(x) \cdot g(x)$ uttryckta i Fourierkoefficienterna för $f(x)$ och $g(x)$. (Jan. 64)

30. För alla funktioner $f(x)$ och $g(x)$ som är kontinuerliga för alla x och har perioden 2π gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$

Visa denna relation då $g(x)$ föutsättes ha likformigt konvergent Fourierserie och om möjligt även i det allmänna fallet. (Maj 64)

31. $f(x) = |1 + 2\cos x|$ utvecklas i Fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Beräkna a_n. För vilka x konvergerar serien? Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$. (Sept. 64)

32. Funktionen $f(x)$ är jämn, har perioden 2π och är kontinuerligt deriverbar för alla x. Sätt

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Härled Fourierkoefficienterna till $g(x)$ uttryckta i f:s Fourierkoefficienter. Ange summan av g:s Fourierserie för alla x. (Dec. 64)

33. Funktionen f är överallt kontinuerlig och är periodisk med perioden 2π. Visa, t.ex. med teorin för Fourierserier, att för alla reella tal α sådana att α/π är irrationellt, är för alla x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

(Eventuellt kan förutsättas att f har kontinuerlig derivata överallt.) (Mars 65)

34. Funktionen $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$ utvecklas i Fourierserie på $(-\pi, \pi)$. För vilka x konvergerar serien? (Maj 65)

E. Laplacetransformer och tillämpningar

1. Beräkna Laplacetransformen till funktionen

$$f(x = na, \quad (n-1)k \le x \le nk, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k > 0.$$

2. Beräkna Laplacetransformen till följande funktioner med perioden T

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \le x \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{T}{2} \le x < T \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \le x \le \frac{T}{2} \\ -1 & \text{för } \frac{T}{2} \le x < T \end{cases}$

3. Använd partialbråksuppdelning för att beräkna $f(x)$ på Laplacetransformen av $f(x)$ är

a) $\dfrac{1}{s(s+1)}$ b) $\dfrac{b^2}{s(s^2+b^2)}$ c) $\dfrac{s}{(s-3)^5}$ d) $\dfrac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}$

4. Använd faltningaformeln för beräkning av $f(x)$, då Laplacetransformen av $f(x)$ är

a) $\dfrac{1}{s(s+1)}$ b) $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y' = 4y - z + 1 \\ z' = 3y - z, \end{cases}$$

$y(0) = 1, z(0) = 2$, medelst Laplacetransformer.

6. Lös systemet

$$\begin{cases} (\mathrm{D}+1)x + 2\,\mathrm{D}\,y + 4\,\mathrm{D}^2 z = 0 \\ (2\,\mathrm{D}+1)x + \mathrm{D}\,y + \mathrm{D}^2 z = 0 \\ 3\,\mathrm{D}\,x + y + z = 0, \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = z(0) = z'(0) = 0.$

7. Använd Laplacetransformation för att lösa differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx2} + 4y = f(x), \quad x > 0, \quad \text{där} \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \ge 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

under begynnelsevillkoren $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

8. Lös med Laplacetransformation differentialekvationen

$$y'' + 3y' + 2y = xH(x-1), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,$$

där $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

9. Bestäm en lösning, $u(x,t)$, till ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} + u = x \sin t, \quad x \ge 0,\ t \ge 0,$$

som uppfyller $u(x,0) = 0, u(0,t) = 0.$

10. Lös med Laplacetransformer

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = x^2 e^{-x}, \quad u(0,t) = 0, \quad x \ge 0,\ t \ge 0.$$

11. Bestäm med hjälp av Laplacetransformation den lösning till

$$y^{(3)} - (2-\sqrt{2})y' - 2y = 0$$

som satisfierar $y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{2}, y''(0) = 2.$ (Okt. 62)

12. Använd Laplacetransformer för att bestämma lösningar till integralekvationen

$$x^2 e^x = \int_0^x f(x-y) y e^y \, dy.$$

Ange även vilka villkor som måste läggas på en lösning $y(x)$ för att den skall kunna erhållas med denna metod. (Maj 61)

13. Bestäm genom att använda Laplacetransformer en funktion $f(x)$ som uppfyller integralekvationen

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(x-y) \sin y \, dy.$$ (Maj 62)

14. Bestäm med användande av Laplacetransformer en funktion $f(x)$ som uppfyller

$$\int_0^x e^{-y} \sin y f(x-y) \, dy = x^3, \quad x \geq 0.$$ (Mars 63)

15. Betrakta differentialekvationen

$$\prod_{\nu=1}^{n} (\mathrm{D}^2 - r_\nu^2) y = 0,$$

där $\mathrm{Re}\, r_\nu > 0$. $y = f(x)$ är en lösning sådan att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ och $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Bestäm Laplacetransformen till $f(x)$. (Ledning: Visa att $y = f(x)$ satisfierar en lämplig differentialekvation av ordningen n.) (Sept. 63)

16. Använd Laplacetransformer för att beräkna $\int_0^\infty e^{-x} x^n \cos x \, dx$ för alla naturliga tal n. (Ledning: Beräkna först Laplacetransformen av $\cos x$.) (Okt. 63)

17. Bestäm Laplacetransformen till funktionen $\int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{t}\, dt}$. (Dec. 63)

18. Lös differensekvationen

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$ (Jan. 64)

19. Bestäm alla funktioner y och z som uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} y'' + z'' + y + z = 0 \\ z'' + 3y' - 2z = 0 \\ z'' - z + y = \sin x - 2\cos x. \end{cases}$$ (Mars 64)

20. Bestäm alla lösningar $f(x)$ till integralekvationen

$$\int_1^t \log x f\left(\frac{t}{x}\right) dx = t\left(\log t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2t}, \quad t \geq 1,$$

sådana att $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 1$, och sådana att $|f(x)| \leq x^A$ för något A då $x \to \infty$. (Ledning: Genom lämpliga substitutioner av x och t kan integralekvationen återföras på en form som kan lösas genom Laplacetransformation.) (Mars 64)

21. Talföljden $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots$ definieras genom ekvationerna

$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2; \quad y_{n+3} = 2y_{n+1} + y_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Ge ett explicit uttryck för y_n som funktion av n. (Maj 64)

22. Bestäm alla begränsade reella talföljder $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ som uppfyller

$$a_n + 3a_{n-3} - a_{n-4} - 3a_{n-5} = 0, \quad n = 6,\ 7,\ \ldots$$ (Jan. 65)

23. Bestäm för alla reella konstanter λ alla funktioner $f(x)$, definierade för $x \geq 0$, som är begränsade och kontinuerliga och som uppfyller

$$\lambda \int_0^x f(y)\,dy = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x), \quad 0 < x < \infty,$$

där $f_1(x) = f(x), f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x-y) f(y)\,dy, n = 2,\ 3,\ 4, \ldots$ (Jan. 65)

24. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och $= 0$ för $x < 0$, följden $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Sök med Laplacetransformation lösningar till ekvationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \int_0^x f(x-y) f(y)\,dy, \quad x \geq 0.$$

Ange villkor på f:s växande då $x \to \infty$ för att f skall erhållas med denna metod. (Mars 65)

25. Använd Laplacetransformation för att finna en lösning $y(t)$ för $t \geq 0$ till ekvationen

$$\frac{dy}{dt} + 3y + 2\int_0^t y(u)\,du = K(t), \quad y(0) = 1,$$

där $K(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t < 1 \text{ och } t > 2 \\ 2 & \text{för } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$. Visa att $y(t)$ är kontinuerlig medan $y'(t)$ är diskontinuerlig för $t = 1$ och $t = 2$. (Maj 65)

F. Komplexa tal och elementära funktioner

1. Låt $z_\nu, \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, beteckna komplexa tal i första kvadranten. Visa att

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|.$$

När gäller likhet?

2. Punkterna $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$ ligger samtliga i vinkelfältet $-\alpha \leq \arg z \leq \alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{2}$. Visa att serierna $z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots$ och serierna $|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \ldots$ konvergerar och divergerar samtidigt.

3. Visa att om $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+\ldots$ divergerar, så måste det finnas minst en ”hopningsriktning” α, så beskaffad, att beloppen av de termer i serien $z_1+z_2+\cdots+z_n+\ldots$ som faller i vinkelfältet $\alpha-\varepsilon<\arg z<\alpha+\varepsilon$, bildar en divergent serie för varje val av ε.

4. För en följd av komplexa tal gäller att avståndet från z_n till varje annat z_m är större än 1. För vilka p måste $\sum_1^\infty |z_n|^p$ konvergera?

5. $P(z)$ är ett polynom. Visa att rötterna till $P'(z)$ ligger i konvexa höljet till $P(z)$:s rötter.

6. *Förutsättning*: Rötterna z_ν till ekvationen

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

uppfyller olikheten $|z_\nu|\le r$, $\nu=1,\,2,\,\ldots,\,n$.
Påstående: Rötterna ζ_ν till ekvationen

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=M$$

uppfyller olikheten

$$|\zeta_\nu|\le r+|M|^{1/n},\quad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

7. Talen $z_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_n,\,\ldots$ antas ligga i halvplanet $\mathrm{Re}(z)\ge 0$. Visa att om $\sum_{n=1}^\infty z_n$ och $\sum_{n=1}^\infty z_n^2$ båda konvergerar, så är $\sum_{n=1}^\infty |z_n|^2$ konvergent.

8. Låt C vara en cirkel i det komplexa planet innehållande origo O samt z_1 en godtycklig punkt på periferin av C. Bestäm det område av planet, som en punkt z_2 måste tillhöra, för att $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)<1$, då z_1 beskriver cirkelperiferin.

9. I vilka punkter på konvergenscirkeln $|z|=1$ är serien $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$ konvergent?

10. $\sum_0^\infty a_nz^n$ har konvergensradien 1. Man vet att $a_n\to 0$ och att $\sum_0^\infty |a_n-a_{n+1}|$ konvergerar. I vilka punkter på konvergenscirkeln $|z|=1$ konvergerar potensserien?

11. Ange en potensserie med konvergensradien 1, som konvergerar i p stycken föreskrivna randpunkter och divergerar för övrigt.

12. För vilka z konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{1+z^{2n}}?$$

13. För vilka z-värden konvergerar

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\cos ncz},$$

där c är en komplex konstant?

14. För vilka z konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nz}{n}?$$

15. Bevisa olikheten
$$|\log(1+z)| \geq \log(1+|z|).$$

16. Konstruera nivåkurvorna $|\sin z| = k$ för några olika värden på konstanten k.

17. Bestäm real- och imaginärdelarna av a) e^{e^z}, b) z^z.

18. Låt z röra sig på en halvstråle från origo ($\arg(z) =$ konstant). För vilka riktningar existerar a) $\lim e^z$, b) $\lim(z + e^z)$?

19. Visa att
$$|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin iy|,$$
om x och y är reella. (Mars 61)

20. Undersök i vilka öppna områden av z-planet serien
$$\frac{z}{1+z} + \frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)} + \frac{z^4}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} + \ldots$$
är konvergent. Försök även beräkna seriens summa i respektive områden. (Sep. 61)

21. Avgör för vilka komplexa värden på z serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+z^n)(1+z^{n+1})}$$
konvergerar samt beräkna för alla sådana värden seriens summa. (Mars 62)

22. Låt $z = x + iy$ vara ett komplex tal. Visa att
$$\left|\frac{e^z - 1}{z}\right| \geq \frac{e^x - 1}{x}.$$
(Maj 61)

23. För vilka z-värden i det komplexa talplanet konvergerar serien
$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n+1}}?$$
Konvergerar serien likformigt på någon del av enhetscirkeln? Motivera utförligt. (Maj 62)

G. Analytiska funktioner, allmänt

1. Om $f(z)$ är analytisk i området D, visa att $\overline{f(\overline{z})}$ är analytisk i $\overline{D}$, som fås av D genom spegling i reella axeln.

2. Bestäm det allmännaste harmoniska polynomet av formen
$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$
Bestäm också den konjugerade harmoniska funktionen och motsvarande analytiska funktion.

3. Om $f(z) = u + iv$ är en analytisk funktion av $z = x + iy$, visa att

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p = p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$$

och

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|u|^p = p(p-1)|u|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

4. a) Definiera en entydig analytisk gren av $\sqrt{1-z^2}$ i något lämpligt område.
b) Samma problem för $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$, där a, b, c och d är olika komplexa tal.
c) Samma problem för $\log\log z$.

5. Visa att en analytisk funktion, vars real - och imaginärdelar uppfylla ekvationen

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re}(z))^2,$$

måste vara konstant.

6. Låt z vara en punkt i det övre halvplanet, v den synvinkel under vilken intervallet $(-1,\ 1)$ synes från z. Bestäm en analytisk funktion $w = f(z)$, sådan att dess realdel är v.

7. Potensserien $\sum_0^\infty a_n z^n$ konvergerar i hela planet. Visa att om $|f(z)| \le e^{|z|}$, så gäller

$$|a_n| \le \left(\frac{e}{n}\right)^n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

8. Antag att $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $|z| < R$. Sätt $\max_{|z|=r}|f(z)| = M(r)$, $r < R$. Visa följande skärpning av Cauchys uppskattning av koefficienterna i potensserien:

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} \le \{M(r)\}^2.$$

(Ledning: Uppskatta $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta$.)

9. $f(z)$ antas vara analytisk och $|f(z)| \le M$ för $|z| \le R$. Bestäm en övre gräns för $|f^{(n)}(z)|$ för $|z| \le \rho < R$.

10. Visa att de successiva derivatorna till en analytisk funktion i en punkt z_0 aldrig kan uppfylla olikheterna

$$|f^n(z_0)| > n!\, n^n.$$

Formulera ett skarpare påstående av samma art.

11. Visa att en hel funktion, som uppfyller en olikhet

$$|f(z)| > k|z|^n, \quad k > 0,\ n \ge 0,$$

för alla tillräckligt stora z, måste vara ett polynom av minst n:te graden.

12. Finns det någon funktion $f(z)$, som är analytisk för $|z| < 1$, samt i punkterna

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots \text{ antar värdena}$$
$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \ldots \text{ resp. ?}$$

13. $f(z)$ antas vara analytisk i området D. En punkt $z_0 \in D$ säges vara en punkt av n:te ordningen för $f(z)$, om funktionen $f(z) - f(z_0)$ har ett nollställe av n:te ordningen i z_0. Visa att punkterna av ≥ 2 ej kunna hopa sig i D.

14. Om en funktion $f(z)$ vet man att den är analytisk i halvplanet $\text{Re}(z) > 0$ samt att $|f(z)| < 3$, $f(1) = 0$. Hur stort kan $|f(2)|$ vara?

15. Låt $f(z)$ vara analytisk i $|z| < 1$, $f(0) = 1$, $|f(z)| \leq 2$. Bestäm det största tal r, för vilket det alltid är sant att $f(z) \neq 0$ i $|z| < r$.

16. Antag $f(z)$ analytisk för $|z| < 1$, $\text{Re}(f(z)) > 0$ och $f(0) = a > 0$. Visa att då gäller

$$|f'(0)| \leq 2a.$$

17. $f(z)$ är analytisk för $|z| \leq 1$. Bestäm ett polynom $P(z)$ av grad $\leq n$, så att uttrycket

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

blir så litet som möjligt.

18. $f(z)$ är analytisk för $|z| < 1$ och $f(0) = 0$. Visa att serien

$$f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots + f(z^n) + \ldots$$

konvergerar och representerar en analytisk funktion för samma z-värden.

19. Visa att $f(z) = \sum_0^\infty z^{2^n}$ uppfyller funktionalekvationen $f(z) = f(z^2) + z$, och härled härav att $|z| = 1$ är en naturlig gräns för funktionen.

20. Visa att funktionen $e^{z \sin z}$ kan utvecklas i en potensserie $\sum a_n z^n$, som konvergerar för alla z. Bestäm a_n för $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

21. $f(z)$ är analytisk i $|z| < 1$ och $|f(z)| \leq |f(0)| + K|z|^n$, där K är en positiv konstant och n är ett positivt heltal. Visa att då gäller

$$f'(0) = f''(0) = \cdots + f^{(n-1)}(0) = 0 \quad \text{samt} \quad |f^{(n)}(0)| \leq K \cdot n!\,.$$

22. Antag att $f(z)$ är analytisk inom och på en enkel, sluten kurva γ, och att $|f(z)| \leq M$ på γ. Visa maximumprincipen, dvs. att samma olikhet gäller inom γ, genom att använda Cauchys integralformel på funktionen $(f(z))^n$, och därefter låta n växa obegränsat.

23. Funktionen $f(z)$ är analytisk i bandet $-\alpha < \text{Im}(z) < \alpha$ $(\alpha > 0)$, samt periodisk med perioden 2π. Visa medelst Laurents utveckling att $f(z)$ kan skrivas under formen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-inz} \, dz,$$

samt att serien är likformigt konvergent i bandet $-\alpha + \eta \leq \text{Im}(z) \leq \alpha + \eta$ för varje positivt η $(< \alpha)$.

24. Låt $f(z)$ vara meromorf inom och regulär på en enkel, sluten kurva γ. Visa att om $|a| > \max_{z\in\gamma}|f(z)|$ så har $f(z)$ lika många a-ställen som poler inom γ.

25. $f(z)$ antages vara analytisk inom och på en enkel, sluten kurva C.
Sätt $w(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, där $z_1, z_2, \dots, z_n$ ligga inom C. Visa att

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{w(\zeta)} \cdot \frac{w(\zeta) - w(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

är det entydigt bestämda polynom av graden $n - 1$, som i punkterna $z_1, z_2, \dots, z_n$ överensstämmer med $f(z)$.

26. $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ har randen av sin konvergenscirkel som enda singulära punkt en pol av första ordningen i $z = z_0$. Visa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

27. Visa att den analytiska funktion, som representeras av potensserien $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^{3/2}}$ inom dess konvergenscirkel, har $z = 1$ som singulär punkt.

28. f är en komplexvärd funktion i intervallet $[a, b]$, $-\infty < a < x < b < \infty$,

$$g(x) = \int_a^b e^{ixy} f(y)\,dy$$

och $g(x) = 0$ för $x \leq 0$. Visa att $g = 0$. (Mars 61)

29. $f(z)$ är en hel funktion, $|f(z)| \leq Ae^{\pi|y|}$, $(z = x + iy)$ och $f(z) = 0$ för $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.
Visa att $f(z) = B \sin \pi z$ för någon konstant B. (Okt. 61)

30. Funktionerna $f(z)$ och $g(z)$ är analytiska i $|z| \leq 1$ och skilda från noll i $|z| < 1$. Vidare är $f(0)$ och $g(0)$ reella och positiva, samt $|f(z)| = |g(z)|$ på cirkeln $|z| = 1$. Visa att $g(z) \equiv f(z)$. (Dec. 61)

31. An analytisk funktion $f(z)$ är reguljär i ∞ och har endast två singulära punkter i det ändliga, $z = a$ och $z = b$. Då z omkretsar a är $f(z)$ entydig, då z omkretsar b i positiv ledökar $f(z)$ med 1. Ange allmänna formen för $f(z)$ med en serie av elementära funktioner, konvergent om $z \neq a, z \neq b$. (Mars 62)

32. Låt $f(z) = 1 + \sum_1^\infty a_n z^n$ vara analytisk inom en cirkel $|z| < R$ med $R > 1$ och antag att $|f(z) \leq M|$ på $|z| = 1$. Visa att f inte har några nollställen inom $|z| < (1 + M)^{-1}$. (Sept. 62)

33. Bestäm de analytiska funktioner $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ av $z = x + iy$, för vilka

$$u(x, y) = e^{2x-y}\cos(x + 2y) + e^{2x+y}\cos(x - 2y).$$ (Okt. 64)

34. $f(z)$ är en analytisk funktion, regulär i en omgivning av $z = 0$, och sådan att serien

$$|f(z)| + |f'(z)| + |f''(z)| + \dots$$

konvergerar för $z = 0$. Visa att f är analytisk i hela planet och att serien konvergerar för alla z. (Maj 59)

35. Funktionen $f(z)$ är analytisk i strimlan $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$, och dess enda singulariteter i detta område är enkla poler $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i det inre av strimlan med residuer $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Vidare gäller likformigt för $0 \leq x \leq \pi$

$$\lim_{y\to\infty} f(x+iy) = A$$
$$\lim_{y\to\infty} f(x-iy) = B.$$

Beräkna $A - B$. (Mars 60)

36. $f(z)$ är analytisk och $|f(z)| \leq 1$ i området $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$. Vidare är $f(1) = 0$. Visa att $|f(2)| \leq \frac{2}{3}$. (Mars 60)

37. L är en enkel, sluten kurva i det komplexa talplanet och $f(z)$ är analytisk innanför och på L. Vidare är $|f(z)|$ konstant på L och $f(z) \neq 0$ innanför L. Visa att $f(z) \equiv$ konstant. (Dec. 60)

38. Utveckla $(z+1)^{-1}(z+1+4i)^{-1}$ i Laurentserie giltig för $3 < |z-2| < 5$. (Jan. 62)

39. $f(z)$ är analytisk för $|z| \leq 1$ och har ett dubbelt nollställe i origo. Vidare är $|f(z)| \leq 1$ för $|z| = 1$. Hur stort kan $f(1/3)$ vara? (Maj 62)

40. Den analytiska funktionen $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ är reguljär i $|z| \leq 1$ och avbildar enhetscirkeln konformt på ett visst område. Visa att utan av detta område är

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2.$$

(Okt. 62)

41. $f(z)$ är analytisk då $|z| < 1$ och i en omgivning av $z = 1$ bortsett från en pol i $z = 1$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} > 0.$$

(Dec. 62)

42. Låt $f(z)$ vara analytisk för $|z| \leq 1$ och $|f(z)| \leq 1$ i samma område. Låt z_0 vara fix inre punkt i enhetscirkeln, sådan att $f(z_0) = 0$. Bestäm en så god övre begränsning av $|f''(z_0)|$ som möjligt. (Mars 63)

43. Låt $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ och $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ vara analytiska på en cirkelskiva $|z| \leq r$. Utveckla

$$(2\pi i)^{-1} \int_{|w|=r} w^{-1} f(w) g\left(\frac{z}{w}\right) dw$$

i Maclaurinserie. (Mars 63)

44. Låt f vara analytisk i ett konvext område D och låt a och b vara två punkter i D. Visa att det finns θ med $|\theta| \leq 1$ och δ på linjestycket mellan a och b, sådana att

$$f(b) - f(a) = \theta|b-a|f'(\delta).$$

(Maj 63)

45. Ett område i xy-planet avbildas konformt på ett område i uv-planet genom avbildningen $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Bilda klassen av lösningar till ekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = h(x,y).$$

Visa att det finns en funktion $g(u,v)$ så att lösningarna vid avbildningen avbildas till lösningar till ekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = g(u,v). \qquad \text{(Sept. 63)}$$

46. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f(z)$ till vilka det finns konstanter R och C så att

$$|f(z)| \leq C \left| \frac{z^3+1}{z-2} e^z \right| \quad \text{för } |z| > R. \qquad \text{(Sept 63)}$$

47. Visa att funktionen $\cos \dfrac{1}{1-z}$ inom varje omgivning (i komplexa talplanet) av $z = 1$ antar värden godtyckligt nära varje komplext tal. (Okt. 63)

48. $f(z)$ är analytisk i $\operatorname{Re} z > 0$, $|f(z)| \leq 10$ för alla z i $\operatorname{Re} z > 0$ och $f(2) = 0$. Visa att $|f(3)| \leq 2$. (Okt. 63)

49. Visa att om $f(z)$ är en analytisk funktion definierad inom enhetscirkeln och utan nollställen, så aär funktionen g som är definierad genom $\overline{g(z)} = 1/f(1/\overline{z})$ analytisk utanför enhetscirkeln. (Jan. 64)

50. $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ är en följd analytiska funktioner i $|z| < 1$. Antag att det existerar ett tal M, som inte beror av n och z, så att

$$|f_n(z)| < M, \text{ för } n = 1, 2, \ldots \text{ och } |z| < 1.$$

Låt r uppfylla $0 < r < 1$. Visa att det till varje $\varepsilon > 0$ svarar ett $\delta > 0$, som ej beror av n, så att

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon \text{ för } n = 1, 2, \ldots,$$

om $|z_1 - z_2| < \delta$, $|z_1| \leq r$ och $|z_2| \leq r$. (Dec. 63)

51. $f(z)$ är meromorf i ringen $r_1 < |z| < r_3$ och holomorf i ringarna $r_1 < |z| < r_2$ och $r_2 < |z| < r_3$. Vidare finns ett heltal N så att alla koefficienter med index $> N$ i Laurentutvecklingen i ringen $r_1 < |z| < r_2$ överensstämmer med motsvarande koefficienter i utvecklingen i ringen $r_2 < |z| < r_3$. Visa att $f(z)$ är holomorf i $r_1 < |z| < r_3$. (Mars 64)

52. Visa att en icke konstant hel funktion (av en komplex variabel) ej kan anta blott värden med positiv realdel. (Maj 64)

53. Bestäm alla i hela planet analytiska funktioner f med $f(0) = 1$ och $f(2z) = f(z) \cdot f'(z)$ för alla z. (Sept. 64)

54. Från z-planet borttages hela imaginära axeln utom den del som ligger i det inre av enhetscirkeln. Kalla det resterande området D. Visa att det finns en funktion $f(z)$ som är holomorf i D och som uppfyller ekvationerna

$$\left(e^{f(z)} - z\right)^2 = 1 + z^2, \quad f(0 = 0).$$

Bestäm för denna funktion $\lim\limits_{t \to +0} f(2i + t)$. (Dec. 64)

55. Visa att det finns en potensserie $\displaystyle\sum_0^\infty a_n z^n$ som jämte alla sina deriverade serier konvergerar absolut i $|z| \leq 1$ men som är sådan att motsvarande funktion $f(z)$ ej kan analytiskt fortsättas till någon cirkel $|z| < R$, $R > 1$. (Jan. 65)

56. Funktionen $f(z)$ är analytisk i $|z| \leq R$, där $R > 1$, bortsett från en enkelpol i $z = z_0$, där $|z_0| = 1$. För vilka z konvergerar Maclaurinutvecklingen av $f(z)$? (Maj 65)

57. Funktionen f är analytisk och $|f(z)| < 1$ för $|z| < 1$. Visa att

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|(1 - |f(0)|^2)}{1 - |f(0)| \cdot |z|} \text{ för } |z| < 1. \qquad \text{(Maj 65)}$$

58. Bevisa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\log\left|2 \sin \frac{x}{2}\right|$ om $x \neq 2n\pi, n$ heltal. (Jan. 65)

H. Konform avbildning

1. Sök en linjär avbildning, som avbildar $|z| < 1$ på $|w - 1| < 1$ så att punkterna 0 och 1 övergå i punkterna $1/2$ resp. 0.

2. En linjär avbildning överför ett par koncentriska cirklar i ett annat par koncentriska cirklar. Visa att förhållandet mellan radierna inte förändras.

3. Bestäm en linjär avbildning, som överför cirklarna $|z| = 1$ och $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ i koncentriska cirklar. Vilket blir förhållandet mellan radierna?

4. Avbilda konformt komplementet till linjesegmentet $(-1,\ 1)$ på det inre av enhetscirkeln. Är avbildningen entydigt bestämd?

5. Avbilda konformt området mellan cirklarna $|z| = 1$ och $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ på ett halvplan.

6. Visa att $w = \cos z, z = x + iy$, avbildar halvplanet $0 < x < \pi, y > 0$, på ett halvplan.

7. Avbildningen $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ är sådan, att varje gitterpunkt i w-planet utgör bild av en gitterpunkt i z-planet. Vad kan sägas om a, b, c, d?

8. Cirklarna $|z-1| = \sqrt{2}$ och $|z+1| = \sqrt{2}$ uppdelar z-planet i fyra områden, av vilka ett innehåller origo. Visa att

$$w = \frac{2z}{1 - z^2}$$

avbildar detta område på $|w| < 1$.

9. Visa att vid en linjär avbildning $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ finns det i allmänhet två fixpunkter, dvs. punkter som avbildas på sig själva, men att det finns endast en om $(a - d)^2 + 4bc = 0$. Visa också att i första fallet kan avbildningen skrivas

$$\frac{w - p}{w - q} = k\frac{z - p}{z - q},$$

där p och q är fixpunkterna, medan i andra fallet avbildningen kan skrivas

$$\frac{1}{w - p} = \frac{1}{z - p} + k,$$

där p är fixpunkten.

10. Finns det funktioner $w = z^2 + az + b$, som ger en omvändbart entydig avbildning av cirkeln $|z| < 1$?

11. Visa att varje omvändbart entydig konform avbildning av det inre av enhetscirkeln på sig själv är en linjär avbildning (Ledning: Använd Schwarz' lemma.)

12. Låt D vara ett konvext område och $f(z)$ en analytisk funktion definierad i D.Visa att om det finns ett komplext tal $a \neq 0$ så att

$$|f'(z) - a| < |a|$$

för alla $z \in D$, så är avbildningen av D genom $f(z)$ omvändbart entydig.

13. Det yttre av cirkeln $|z| = a$ avbildas genom en bruten linjär transformation på det inre av samma cirkel så att en given punkt p, $|p| > a$, avbildas på origo. Bestäm diametern hos bilden av $|z| = 2a$. (Jan. 61)

14. Bestäm en konform avbildning av halvcirkeln

$$|z| \leq 1, \ \operatorname{Re} z \geq 0$$

på cirkeln $|z| \leq 1$. (Sept. 61)

15. Bestäm en konform avbildning som överför bandet

$$-b < \operatorname{Im} z < 0$$

på $|w| < 1$. (Okt. 61)

16. Bestäm en konform avbildning som överför z-planet, uppskuret längs intervallet $[a, b]$, på halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$. (Dec. 61)

17. Från det inre av enhetscirkeln borttages de punkter för vilka $\operatorname{Im} z = 0$ och $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < 1$. Avbilda det återstående området konformt på halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$. (Mars 62)

18. Visa att varje s.k. linjär avbildning som avbildar $|z| > 1$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$ kan skrivas

$$w = |k|^2 \frac{z - a}{\bar{k}z + ka}$$

där $|a| = 1$ och $\operatorname{Re} k > 0$. (Sept. 62)

19. Låt a vara ett reellt tal med $|a| > 1$. Visa att

$$w(z) = \frac{a\bar{z} + i}{a - i\bar{z}}$$

avbildar $|z| \leq 1$ vinkeltroget på $|w| \leq 1$. Bestäm transformationens fixpunkter. (Okt. 62)

20. Bestäm alla funktioner som ger en omvänd konform avbildning av

$$|z - 1 - i| < 1$$

på sig själv. (Jan. 63)

21. Bestäm en funktion $w = f(z)$ som avbildar området som karakteriseras av olikheterna $|z| \leq 1$, $|z + \sqrt{3}| \geq 2$ konformt på högra halvplanet. (Maj 59)

22. Betrakta de konforma avbildningar som avbildar högra halvplanet på enhetscirkeln $|w| < 1$ så, att $z = 1$ övergår i $w = 0$. Vilken punkt på linjen $\operatorname{Re} z = 1$ har en bildpunkt på största möjliga avstånd från bildpunkten till $z = 1 + i$? (Okt. 60)

23. Bestäm en konform avbildning av det längs positiva x-axeln uppskurna komplexa talplanet på det inre av enhetscirkeln så att punkten -4 avbildas på origo. (Dec. 60)

24. Visa att det finns en linjär avbildning som konformt avbildar det genom olikheterna

$$|z-1+2i| < 2\sqrt{2}, \quad |z-1-2i| < 2\sqrt{2}, \quad |z| > 1,$$

definierade området på det inre av triangeln med hörnen $w=0, w=1, w=i$. (Maj 61)

25. Bestäm en analytisk funktion som konformt avbildar det yttre av ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=x+iy,$$

på det inre av enhetscirkeln $|w|<1$. (Jan. 62)

26. Bestäm en konform avbildning av området

$$\begin{cases} x^2+y^2<1 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

på det inre av enhetscirkeln. (Maj 62)

27. Bestäm en konform avbildning av halvcirkeln $|z|<1$, $\operatorname{Re} z>0$ på enhetscirkeln $|z|<1$ så att intervallet $(0,\ 1)$ avbildas på intervallet $(-1,\ 1)$. (Dec. 62)

28. Bestäm alla brutna lineära avbildningar av området definierat av $|z|<2$, $|z-1|>1$ på $|\operatorname{Im} z|<1$. (Mars 63)

29. Bestäm en konform avbildning av området $|z|\le\sqrt{2}$, $|z-1+\sqrt{3}|\ge 2$ på övre halvplanet. (Maj 63)

30. Bestäm en konform avbildning av området

$$y>1,\ 0<x<1,\ z=x+iy,$$

på övre halvplanet. (Dec. 63)

31. På vilket område i komplexa w-planet avbildar funktionen $w=\tan z$ den kvadrat i z-planet, som har tre av sina hörn i origo, $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}i$? (Mars 64)

32. Visa att $f(z)=1/(z+1)^2$ avbildar $\operatorname{Re} z>0$ omvändbart entydigt på ett visst område, och beräkna ytan av detta område. (Maj 64)

33. Under brutna linjära avbildningar av $|z|<1$ på sig själv avbildas cirkeln $|z|<\rho$ (<1) på en familj cirklar. Mellan vilka gränser varierar dessa cirklars radier? (Dec. 64)

34. Området $\operatorname{Im} z\ge -1$ är uppskuret efter positiva x-axeln. I området väljs den gren av $w=\log z$ för vilken $\log(-1)=i\pi$. Bestäm ekvationerna för de kurvor som begränsar bildområdet i w-planet. Upprita dessa kurvor i stora drag och ange i figuren bildområdets omfattning. (Mars 65)

35. Sök en funktion $w=f(z)$, $z=x+iy$, som avbildar området $x>0, y>0, xy>1/2$, konformt på området $|w|<1$, $|w+\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$. (Mars 63)

I. Residuintegraler

1. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

2. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

3. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3}{1+x^6}\,dx$.

4. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2}$.

5. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

6. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{\log^2 x}{1+x^2}\,dx$.

7. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{1+x^3}\,dx$.

8. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^a(x+1)}$, $0 < a < 1$.

9. Beräkna $\int_{C} \frac{dz}{1+z^4}$, där C är ellipsen $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ genomlöpt i positiv led.

10. Beräkna $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{1 + a\cos\theta}\,d\theta$, $0 < a < 1$.

11. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} +, dx$ för $a,\ b > 0$. (Mars 61)

12. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx$, $a > 0$, m reellt. (Sept. 61)

13. Visa att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{a^z}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & \text{för } a > 1 \\ 0 & \text{för } 0 < a < 1. \end{cases}$$

L betecknar den räta linjen $\operatorname{Re} z = c$, där $c > 0$, integrerad i riktning av växande $\operatorname{Im} z$. (Okt. 61)

14. Beräkna $\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$. (Mars 62)

15. Beräkna $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^z}{\sin \pi z}\,dz$, där $0 < c < 1$. (Sept. 62)

16. Låt n vara ett naturligt tal och p ett positivt reellt tal $\neq 1$. Beräkna

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2}\,d\theta.$$ (Okt. 62)

17. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\{(x^2+a^2)(x^2+b^2)\}^2}$ för positiva a och b. (Jan. 61)

18. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx$, a reell. (Mars 60)

19. Betrakta $\int_L \tan z\,dz$ där L är en kurva från 0 till i. Beroende av valet av L erhåller integralen olika värden. Angiv samtliga dessa värden. (Okt. 60)

20. I polynomet P av graden n är högsta koefficienten lika med 1. Beräkna

$$\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}P(\overline{z})}{z-\zeta}, \quad \text{där } |\zeta| > 1.$$ (Okt. 60)

21. Låt n vara ett naturligt tal. För vilka naturliga tal m konvergerar integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}+1}{x^{2n}+1}\,dx?$$

Visa att integralen för dessa m-värden har värdet

$$\frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right].$$ (Dec. 60)

22. Beräkna $\int_{|z|=1} \frac{\cos\frac{1}{z}}{2+z}\,dz$. (Maj 61)

23. Visa att om $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ så är

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}).$$ (Dec. 61)

24. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} z^{-3}(z - 2z\cos z + \sin z)\,dz$. (Jan. 62)

25. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$. (Maj 62)

26. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1+x^4)^2}\,dx$. (Dec. 62)

27. Beräkna $\int_0^{\infty} (1+x)^{-2}x^a\,dx$ för $-1 < a < 1$. (Mars 63)

28. Beräkna residun i punkten $\frac{\pi}{2}$ för funktionen $\frac{ze^z}{\cos^2 z}$. (Maj 63)

29. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2(1+x^2)}\,dx$, där $a > 0$, $b > 0$. (Sept. 63)

30. Beräkna med residukalkyl

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos\theta)^2}{3+2\cos\theta}\,d\theta.$$ (Okt. 63)

31. Beräkna med residukalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\,dx$$ (Dec. 63)

32. Beräkna med residukalkyl

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx, \quad a > 0.$$

Visa att man härur genom att låta a gå mot 0 kan erhålla värdet av $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$ (Jan. 64)

33. Beräkna

$$\int \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz$$

tagen ett varv i positiv led längs cirkeln $|z| = 10$. (Mars 64)

34. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{12} + 1}$. (Maj 64)

35. Beräkna för varje reellt $a \neq 0$

$$\int_0^\pi \tan(x + ia)\, dx.$$ (Sept. 64)

36. Beräkna

$$\sup \int_{-\infty}^\infty \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{dx}{1 + x^2}$$

taget över alla reella andragradspolynom utan reella nollställen. (Dec. 64)

37. Sätt

$$A_n = \int_\gamma \frac{dz}{(P(z))^n}$$

där $P(z) = az^2 + 2bz + c$, $a \neq 0$ och γ är en enkel sluten rektifierbar kurva. Bestäm för alla kurvor γ för vilka A_n är väldefinierad

$$\lim_{n \to \infty} |A_n|^{1/n}.$$ (Jan. 65)

38. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x} - \sin x}{1 + x^4}$. (Jan. 65)

39. Beräkna

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx, \quad \text{då } 0 < a < 1.$$ (Mars 65)

40. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\, dx}{(x^2 + 4x + 13)^3}$. (Maj 65)

41. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^4}\, dx$. (Jan. 63)

J. Tentamen i matematik för tre betyg i september 1965

1. Beräkna $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$ om C är kurvan som $z = e^{it}$ beskriver då t går från 0 till $3\pi/2$.

2. Betrakta differentialekvationen $y' = ye^x$. Man vill bestämma approximationer till lösningen $y(x)$ genom $(0;\ 1)$ genom Picards metod, och väljer därvid $y_0(x) \equiv 1$, och bildar sedan $y_1(x)$, $y_2(x)$,$y_3(x)$, ...Bestäm $y_3(x)$ och ange det exakta värdet av $y(x) - y_3(x)$ för $x = \log 2$. Visa därefter att $y_n(x) < y(x)$, $x > 0$, för varje n.

3. Beräkna

$$\lim_{u\to+0} u^{-4} \iint_{S_u} \arctan(x^2 + y^2)\, dxdy$$

där S_u är det inre av cirkeln $x^2 + y^2 = 2xu$.

4. Visa att Fourierkoefficienterna för funktionen $y = \sqrt{|x|}$ i $-\pi \leq x \leq \pi$ är

$$O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

5. Bestäm residun i punkten $z = 1$ för funktionen $(z^2 - 3z + 2)^{-n}$, där n är ett naturligt tal.

6. Bestäm a, $|a| < 1$, i den linjära transformation $w = \dfrac{z-a}{1-z\bar{a}}$ som ger största avstånd mellan bilderna av punkterna

$$z_1 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{och} \quad z_2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

7. Bestäm alla kontinuerliga lösningar f på $0 \leq x < \infty$ till integralekvationen

$$\int_0^y f(x)\sin(y-x)\, dx = e^y(2\sin y + \cos y) - 3\sin y - \cos y$$

sådana att $f(x) = O(e^{Ax})$ för något A då $x \to \infty$.

8. Låt $(a_m)_{m=1}^n$ vara reella tal med $0 < a \leq a_m \leq A$. visa att

$$1 \leq \frac{n\sum a_m^2}{\left(\sum a_m\right)^2} \leq \frac{(A+a)^2}{4Aa}.$$