Matematiska uppgifter

Examensuppgifter i

MATEMATIK

DEL 3

Urval för realgymnasiets matematiska gren

Utgivna av

SIXTEN THÖRNQVIST

lektor

TREDJE UPPLAGAN

Stockholm
NATUR OCH KULTUR

*

Printed in Sweden Nerikes Allehanda Tryckeri
Örebro 1962

Innehåll

Förord

Föreliggande bok är den tredje av tre samlingar av matematiska examensuppgifter för gymnasiet. Den omfattar studentuppgifter på reallinjen före 1937 (R), på reallinjen allmän kurs (a.k.) och specialkurs (sp.k.). Skrivningar i a.k. och sp.k. förekom första gången vårterminen 1937.

Samlingen är avsedd för reallinjens matematiska gren och innehåller uppgifter inom sådana områden, som i gymnasiet endast behandlas på sagda gren.

Urvalet av uppgifter har skett i anslutning till de metodiska anvisningarna för undervisningen i matematik på gymnasiet. En konsekvens härav är bl.a. att uppgifter rörande ellips och hyperbel är av relativt enkel natur och att ortproblem i allmänhet inte bygger på dessa kurvor; dock blir ortkurvan stundom en ellips eller en hyperbel.

Inom varje grupp av uppgifter är de senare i möjligaste mån ordnade efter svårighetsgrad. Ordningsföljden mellan de olika kapitlen utgör ett förslag till kronologisk studiegång. Härvid är att märka, att man för den matematiska grenens del har att utnyttja del II och del III parallellt.

I stort sett ansluter sig samlingen till de läroböcker, som utgivits av C. E. Sjöstedt och S. Thörnqvist.

Tredje upplagan omfattar utöver uppgifterna i andra upplagan de skrivningar, som givits på matematiska grenen augusti 1959–mars 1961.

S. Thörnqvist

Analytisk geometri: Räta linjen

a) räta linjens ekvation under normalform

1. Bestäm koordinaterna för en av de punkter på den räta linjen $x - 2y = 0$, vars avstånd till den räta linjen $3x + 4y + 5 = 0$ är lika stort som dess avstånd till punkten $(8; -1)$. (H. 35. 3. R.)

2. Två sidor i en kvadrat ligger utefter linjerna $x - 2y + 2 = 0$ respektive $2x + y - 6 = 0$. det hörn i kvadraten, som icke ligger på någon av de nämnda linjerna, är beläget på linjen $y + 1 = 0$. Beräkna kvadratens yta. (Nov. 50. 2. sp.k.)

3. Bestäm värdet på m, så att den parallellogram, som bildas av linjerna

$$4x - 7y = m; \quad 4x - 7y = 16; \quad x + 8y = 10; \quad x + 8y = 6,$$

får mot varandra vinkelräta diagonaler. (H. 36. 7. R.)

b) vinkeln mellan två räta linjer

4. Tre hörn i ett parallelltrapets $ABCD$ ligger i punkterna $A\,(-3;\ 3)$, $B\,(1;\ 5)$ och $C\,(7;\ 3)$. Sök koordinaterna för det fjärde hörnet D, om AD är parallell med BC och vinkeln BCD är $135°$. Beräkna även trapetsets yta. (Mars 42. 1. sp.k.)

5. Ekvationen för sidan AB i triangeln ABC är $x + y + 3 = 0$. Bisektriserna till vinklarna A och B har ekvationerna har ekvationerna $x + 3y + 1 = 0$ och $3x + y - 1 = 0$. Bestäm ekvationerna för sidorna AC och BC. (Nov. 46. 2. sp.k.)

6. Linjen L med ekvationen $3x-4y = 7$ skär x-axeln i punkten A. Genom punkten $(1;\ 1)$ drages en rät linje, som skär x-axeln i punkten B och linjen L i punkten C. Bestäm ekvationen för denna linje, då $AB = AC$. (Aug. 50. 2. sp.k.)

c) fast punkt på rörlig linje

7. Linjen $x = a$ och punkten $P\,(x_1;\ y_1)$ är givna. Origo O sammanbindes med P; PO eller dess förlängning skär den givna linjen i punkten A. Punkten P projiceras på den givna linjen, och projektionen B sammanbindes med O. Genom A drages linjen AC parallell med x-axeln. Denna linje skär OB eller dess förlängning i punkten C. Bevisa, att linjen PC, oberoende av punkten P:s läge, går genom en fast punkt. (Jan. 51. 5. sp.k.)

d) några uppgifter av allmän art

8. Avstånden från punkterna $(-3;\ 3)$, $(2;\ 6)$ och $(4;\ -2)$ till en viss rät linje förhåller sig som $1 : 2 : 3$. De båda sist nämnda punkterna ligger på samma sida om linjen, den först nämnda på motsatt sida. Bestäm ekvationen för denna linje. (Aug. 52. 2. sp.k.)

9. Två av en triangels hörn ligger i punkterna $(3;\ 6)$ och $(8;\ 6)$. De delar av koordinataxlarna, som faller inom triangeln, har båda en längd av tre längdenheter. Beräkna koordinaterna för det tredje hörnet. (Mars 53. 5. a.k.)

10. Punkten P_1 har koordinaterna $(x_1;\ y_1)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Koordinaterna $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$ och $(x_4;\ y_4)$ för punkterna P_2, P_3 respektive P_4 bestämmes genom relationerna

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad y_{n+1} = \frac{x_n\sqrt{3} - y_n}{2},$$

$(n = 1,\ 2$ resp. $3)$. Visa, att P_4 sammanfaller med P_1 samt att triangeln $P_1P_2P_3$ är liksidig och har sin tyngdpunkt i origo. (Mars 50. 8. a.k.)

Analytisk geometri: Cirkeln

a) allmänna problem

11. En cirkels ekvation är $5x^2 + 5y^2 = 68$. Bestäm skärningspunkten mellan tangenterna till cirkeln i de punkter, där cirkeln skäres av linjen $y = 2x + 2$. (H. 36. 1. R.)

12. Bestäm ekvationerna för de cirklar, som går genom punkten $(-1;\ 8)$ och tangerar de båda koordinataxlarna. (Jan. 58. 1. sp.k.)

13. En cirkel har sin medelpunkt på linjen $x+y = 2$ och tangerar linjerna $x-2y = 0$ och $x - 2y = 10$. Sök cirkelns ekvation. (Aug. 35. 8. R.)

14. Sök ekvationen för en cirkel, som går genom punkten $(2;\ 4)$ och som tangerar cirkeln $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ utantill och dessutom koordinataxeln. (Nov. 41. 1. sp.k.)

15. I cirkeln $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ drages en korda, som går genom origo och utgör en sida av en i cirkeln inskriven kvadrat. Bestäm ekvationerna för kvadratens sidor. (Aug. 45. 3. sp.k.)

16. Bestäm de värden på konstanten a, för vilka ekvationen

$$a(x^2 + y^2) - 2x + y + 5 = 0$$

betyder en cirkel. Bevisa, att origo och punkten $(4;\ -2)$ ligger på var sin sida av varje sådan cirkel. (Jan. 55. 4. sp.k.)

17. De tre uttrycken $7x - y + 20$, $x + y$ och $y + 2$ betecknas för korthets skull med L_1, L_2 och L_3 respektive. Bestäm konstanterna p och q så, att ekvationen $L_1L_2 + pL_2L_3 + qL_3L_1 = 0$ betyder en cirkel, och bevisa, att denna är omskriven kring den triangel, som bildas av de räta linjerna $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ och $L_3 = 0$. (Mars 45. 3. sp.k.)

b) ortproblem

18. En sträcka av given längd glider med sina ändpunkter utefter två räta linjer, som skär varandra under rät vinkel. Sök och konstruera orten för tyngdpunkten i den triangel, som bildas av sträckan och de stycken den avskär av de båda räta linjerna. (Mars 46. 3. sp.k.)

19. En cirkel har sin medelpunkt i origo i ett rätvinkligt koordinatsystem. Från en given punkt $A\ (a;\ 0)$ drages en rät linje, som tangerar cirkeln i punkten P. Sök och konstruera geometriska orten för mittpunkten M på sträckan AP, när cirkelns radie varierar. (Nov. 55. 4. sp.k.)

20. I ett rätvinkligt koordinatsystem drages från en fast punkt $A\ (a;\ 0)$ på positiva x-axeln en rät linje, som skär y-axeln i punkten B. Från denna punkt drages parallellt med linjen $y = x$ en rät linje, som skär x-axeln i punkten C. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan AB eller dess förlängning och normalen mot AB från C. (Mars 51. 1. sp.k.)

21. Tre punkter, A, B och C, ligger i denna ordning på en rät linje. En cirkel uppritas genom punkterna A och B. Ena tangenten till cirkeln från punkten C tangerar cirkeln i punkten P. Sök och konstruera orten för punkten P, då cirkelns radie varierar. (Aug. 53. 5. sp.k.)

22. En rät linje L och en punkt A utanför densamma är givna. Genom A drages en rät linje, som skär L i punkten P. En cirkel tangerar AP i P och avskär av L en korda, vars längd är lika med dubbla avståndet från A till L. Sök och konstruera orten för cirkelns medelpunkt, när punkten P beskriver linjen L. (Nov. 54. 5. sp.k.)

Några inledningsuppgifter till funktionsläran

23. Till vilket gränsvärde närmar sig termerna i den oändliga serien
$\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{4}{15}, \frac{5}{19}, \dots$? (V. 08. 3. R.)

24. Finns det några värden, som funktionen $\frac{3x^2 + 20}{3x - 2}$ inte kan anta för reella värden på x? (V. 22. 4. R.)

25. Finns det några reella värden, som funktionen $\frac{3x - 5}{4x^2 - 7x + 1}$ inte kan anta för reella värden på x? (V. 08. 7. R)

26. Från punkten $B\ (1;\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rörlig rät linje, som i punkten A skär linjen $y = x$. I A drages en normal mot BA, och denna normal skär x-axeln i P. Vilka delar av x-axeln genomlöper P, då BA vrider sig ett varv kring B? (Aug. 38. 4. sp.k.)

27. Första och andra termerna i en geometrisk serie är $(x+2)$ respektive $2(x+1)^2$. Undersök, för vilka värden på x denna serie kan utsträckas till en konvergent oändlig geometrisk serie. (Aug. 48. 7. sp.k.)

28. I ekvationen $(a-1)^2x^2 + 2(a^2-1)x - 3(a^2 - 10a + 13) = 0$ är a en konstant $\neq 1$. Bestäm de värden på a, för vilka ekvationen har reella rötter. Bestäm också gränsvärdena för ekvationens rötter, när a växer obegränsat. (Jan. 56. 5. sp.k.)

Hela rationella funktioner och deras kurvor

a) inflexionspunkter

29. Visa, att inflexionspunkterna till kurvan $20a^4y = 3x^5 - 15ax^4 + 20a^2x^3$, där a är en konstant som är $\neq 0$, ligger på en rät linje, och bestäm dennas ekvation. (Jan. 55. 1. sp.k.)

30. Bestäm konstanterna a, b och c, så att kurvan $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ får en inflexionspunkt i punkten $(1;\ 1)$ och kurvans tangent i denna punkt blir parallell med linjen $y + 3x = 0$. Upprita kurvan för de erhållna värdena på konstanterna. (Mars 44. 1. sp.k.)

31. Den mot en viss funktion $y = f(x)$, där $f(x)$ är ett polynom av tredje graden, svarande kurvan har en inflexionspunkt i punkten $(-1;\ 8)$ och en minimipunkt i punkten $(0;\ 6)$. Bestäm funktionen och upprita kurvan. (Aug. 53. 1. sp.k.)

32. Bestäm konstanterna a, b, c och d i ekvationen $9y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, så att motsvarande kurva får ett minimum i punkten $(-1;\ -3)$ och en inflexionspunkt i punkten $(2;\ 0)$. Konstruera därefter kurvan med angivande av maxima och minima, inflexionspunkter samt skärningspunkter med axlarna. (Nov. 48. 3. sp.k.)

33. Kurvan $y = f(x)$, där $f(x)$ är en hel rationell funktion av tredje graden, tangerar linjen $x - y = 0$ i origo samt har ett maximum för $x = 1$ och en inflexionspunkt för $x = -\frac{1}{2}$. Bestäm $f(x)$ och konstruera kurvan. (Jan. 41. 3. sp.k.)

34. Kurvorna $y = x^3 - 3x$ och $y = x^2 + 2x + a$, där a är en positiv konstant, tangerar varandra. Bestäm a och koordinaterna för kurvornas gemensamma punkter. (Ändrat) (Aug. 47. 3. sp.k.)

35. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = ax^5 + bx^3$, så att motsvarande kurva får en inflexionspunkt i punkten $(1;\ -1)$. Konstruera därefter kurvan med angivande av eventuella skärningspunkter med x-axeln samt maximi-, minimi- och inflexionspunkter. Bestäm slutligen riktningsvinkeln för den linje, som skär kurvan i origo och tangerar den i två andra punkter. (Nov. 52. 5. sp.k.)

36. Bestäm konstanterna a och b, så att kurvan $y = a(x^2 + 2) + bx$ skär kurvan $y = x^3 - 3x^2$ under rät vinkel i den senare kurvans inflexionspunkt. Bestäm därefter kurvornas skärningspunkter, och upprita kurvorna. (Aug. 42. 3. sp.k.)

37. För funktionen $y = f(x)$ gäller, att $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6x$. Bestäm funktionen så, att motsvarande kurva får en inflexionspunkt i punkten $(1;\ 0)$ och tangenten i denna punkt blir parallell med linjen $y = 4x$. Undersök därefter kurvan med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter, samt upprita densamma. (Med $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ menas derivatan av $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ med avseende på x.) (Mars 55. 4. sp.k.)

38. Man betraktar en hel rationell tredjegradsfunktion av x jämte tillhörande kurva. Bevisa, att kurvans inflexionspunkt är mittpunkt på sammanbindningslinjen mellan maximi- och minimipunkterna, där sådana finnes.
(Nov. 39. 7. sp.k.)

39. Diskutera kortfattat utseendet av kurvan $y = x^3 - ax$, där a är en konstant. För vissa värden på a har kurvan en maximi- och en minimipunkt. Genom en sådan kurvas såväl maximi- som minimipunkt går en cirkel, vars medelpunkt är kurvans inflexionspunkt. Bestäm konstanten a, så att cirkeln tangerar kurvan i två andra punkter. (Jan. 49. 4. sp.k.)

b) några uppgifter av allmän art (i allmänhet rätt avancerade uppgifter)

40. En korda i kurvan $y = ax - x^3$, där $a > 0$, har sin ena ändpunkt i origo. Undersök, hur kordans längd varierar, då kordan vrider sig kring origo, och ange särskilt, för vilka värden på a längden har något maximivärde.
(Aug. 47. 5. sp.k.)

41. Angiv ekvationen för den gemensamma tangent till kurvorna $y = 4,25 + x^2$ och $y = x^3$, vilken tangerar kurvorna i punkter, som ligger på olika sidor om ordinataxeln. (Nov. 42. 7. sp.k.)

42. Upprita i samma koordinatsystem kurvorna $16y = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ och $64y = 3x^5 - 50x^3 + 135x - 216$ i deras huvuddrag. Visa, att den förstnämnda kurvans maximi- och minimipunkter sammanfaller med maximipunkterna för den senare. Den räta linjen $x = a$ skär kurvorna i punkterna A och B. Undersök och åskådliggör i ett särskilt koordinatsystem, hur längden av sträckan AB varierar, när a antar alla reella värden. Ange x-koordinaterna för de punkter, för vilka längden av AB har maximum eller minimum. (Jan. 53. 8. a.k.)

43. Vinkeln, räknad i positiv led, mellan positiva x-axeln och en tangent till kurvan $6y = 2(4-a)x^3 + 3(a-1)x^2 - 6(a-2)x$ betecknas med v. Bestäm konstanten a så, att v kan anta följande värden men inga andra: $0° \leq v \leq 45°$; $90° < v < 180°$. (Nov. 55. 7. a.k.)

44. En funktion $f(x)$ av tredje graden, i vilken koefficienten för tredjegradstermen är positiv, har tre reella nollställen. Om nollställena är olika, kan man bevisa, att även derivatan $f'(x)$ har reella och olika nollställen, vilka svarar mot ett maximum och ett minimum hos $f(x)$. Bevisa detta, och undersök på motsvarande sätt de fall, då två av nollställena hos $f(x)$ är lika och då alla tre är lika. Bevisen och undersökningarna skall genomföras utan stöd av diagram, men därefter skall de tre nämnda fallen belysas genom uppritning av kurvan $y = f(x)$. (Aug. 53. 8. a.k.)

45. Bland de kurvor, som har ekvationen $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, där a, b, c och d är konstanter, finns vissa, som tangerar x-axeln i punkten $A\,(-2;\ 0)$ och som i skärningspunkten med y-axeln har tangenten parallell med x-axeln. Dessa kurvor bildar en s.k. skara, och deras ekvation kan skrivas i en form, som innehåller a men icke de övriga konstanterna. Bevisa, att kurvorna i denna skara går genom ytterligare en fix punkt B och bestäm dennas koordinater.

Utred därefter, hur utseendet av en kurva i skaran ändras, då a genomlöper alla reella värden, och upprita slutligen i stora drag exempel på de huvudtyper, som förekommer. (Jan. 58. 2. a.k.)

46. Kurvan $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}ax^3 + x$, skall undersökas för olika värden på konstanten a. Undersök först, hur antalet av kurvans maximi- och minimipunkter beror av a, ange de olika huvudfallen och upprita i stora drag ett exempel på motsvarande kurva i vart och ett av fallen. Undersök därefter antalet inflexionspunkter på kurvan, ange även här de olika huvudfallen och upprita i stora drag ett exempel på motsvarande kurva i vart och ett av dessa fall, om de icke redan uppritats vid den första undersökningen. Sammanfatta slutligen de båda undersökningarna i form av en översikt över hur kurvan ändras, när a genomlöper alla reella värden. (Jan. 52. 7. sp.k.)

47. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten $(a;\ 0)$, där a är en konstant. Hörnet B ligger i punkten $(0;\ 1)$, medan hörnet C genomlöper x-axeln. Den kring triangeln ABC omskrivna cirkelns medelpunkt är D. Bestäm ytan av triangeln ADC som funktion av abskissan för punkten C, och undersök densamma för olika värden på konstanten a med angivande av eventuella maxima och minima. Åskådliggör slutligen, hur den nämnda ytan varierar, genom att i olika koordinatsystem och i stora drag upprita motsvarande kurva i de huvudfall, som kan särskiljas. (Mars 56. 8. a.k.)

Brutna rationella funktioner och deras kurvor

a) deriveringar

48. Visa att funktionen $y = \dfrac{(x-a)^2 - 1}{x - a}$ för alla värden på konstanten a satisfierar ekvationen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) - (y^2 + 4)\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = 0$$

(Jan. 44. 2. sp.k.)

49. Visa, att varje funktion av formen $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, där a, b, c och d är godtyckliga konstanter, satisfierar ekvationen

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

(Nov. 54. 1. sp.k.)

50. Visa, att funktionen $y = \dfrac{4(x^2 - x + 1)^3}{27x^2(1-x)^2}$ har tre lika stora minimivärden. (Nov. 50. 4. sp.k.)

b) kurvkonstruktioner

51. Konstruera kurvan $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ och ange eventuella maximi- och minimipunkter, inflexionspunkter och asymptoter. (Nov. 46. 1. sp.k.)

52. Undersök kurvan $y = x + \dfrac{1}{2x^2}$ med avseende på asymptoter, maxima, minima och inflexionspunkter, samt upprita densamma i dess huvuddrag. (Aug. 49. 1. sp.k.)

53. Konstruera kurvan $x^3 + x^2y + y = 0$ i dess huvuddrag. Bestäm ekvationerna för de tangenter till kurvan, vilka är parallella med kurvans asymptot. (Jan. 47. 1. sp.k.)

54. Undersök kurvan $y = \dfrac{x^3+5x^2-4}{x^2}$ med avseende på asymptoter, maxima, minima och inflexionspunkter, och konstruera kurvan. (Mars 47. 2. sp.k)

55. I två godtyckliga punkter P och Q på kurvan $y = \dfrac{1}{x}$ drages tangenterna, vilka skär y-axeln i A och B. Visa, att mittpunkten på sträckan AB ligger på kordan PQ eller dess förlängning. (Mars 45. 1. sp.k.)

56. Undersök kurvan $y = \dfrac{8x^2-8}{x^4+8}$ med avseende på asymptoter, maximi- och minimipunkter samt upprita den i dess huvuddrag. (Aug. 51. 1. sp.k.)

57. Undersök den mot funktionen $y = \dfrac{(x^2-1)(x+1)}{x^2}$ svarande kurvan med avseende på skärningspunkter med axlarna, maximi-, minimi- och inflexionspunkter samt asymptoter. Upprita kurvan. (Jan. 51. 3. sp.k.)

58. Ange i huvuddrag utseendet av kurvan $y = \left(\dfrac{x-a}{x}\right)^2$ för $a > 0$ och $a < 0$. Kurvan skär sin ena asymptot i en punkt P på ändligt avstånd, och kurvans tangent i P skär kurvan i ytterligare en punkt Q och den andra asymptoten i en punkt R. Visa, att R är mittpunkten på PQ. (Nov. 45. 4. sp.k.)

59. Undersök kurvan $x^2y(x-1) + 1 = 0$ med avseende på asymptoter, maxima, minima och inflexionspunkter, samt upprita densamma i stora drag. (Jan. 50. 4. sp.k.)

60. Upprita kurvan $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$ med angivande av eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter. (Nov. 54. 3. sp.k.)

61. Konstruera kurvan $y = \dfrac{x^2-6}{x^3-4x}$, och ange eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter. (Aug. 41. 6. sp.k.)

c) inversa funktioners kurvor

62. Konstruera kurvan $xy + y^2 = x$. (V. 09. 5. R)

63. Undersök kurvan $\frac{x}{4} = \frac{y}{y^2+3}$ med avseende på maxima och minima, asymptoter och inflexionspunkter, och konstruera kurvan. Visa, att inflexionspunkterna ligger i rät linje. (Jan. 48. 7. sp.k.)

d) konstantbestämningar

64. Bestäm koefficienterna a och b så, att funktionen $\frac{x^2+ax}{x+b}$ får ett maximivärde $= 3$ för $x = -3$. (Jan. 40. 2. sp.k.)

65. I punkten $(-3;\ -1)$ på kurvan $y = \frac{ax+b}{x^2-1}$ har derivatan av y med avseende på x ett nollställe. Beräkna konstanterna a och b. Visa, att det finns ännu en punkt på kurvan, där nämnda derivata har ett nollställe. Ange också de ifrågavarande punkternas karaktär. (Nov. 52. 1. sp.k.)

66. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = \frac{ax^2+3x+b}{ax-b}$, så att den motsvarande kurvan får asymptoterna $x+3=0$ och $x-y+4=0$. Upprita därefter kurvan. (Mars 56. 3. sp.k.)

67. Bestäm a och b, så att kurvan

$$y = \frac{ax^3+bx}{x^2-1}$$

får $y = 2x$ som asymptot samt får en minimipunkt, vars abskissa är 2. Upprita sedan kurvan. (Mars 38. 5. sp.k.)

68. Bestäm konstanterna a och b så, att kurvan $y = \frac{ax+b}{x^2}$ får den räta linjen $x+2y=6$ till inflexionstangent. Konstruera därpå kurvan, och ange eventuella asymptoter, maximi-, minimi- och inflexionspunkter. (Jan. 52. 4. sp.k.)

69. Bestäm en bruten rationell funktion $y = f(x)$ av lägsta möjliga gradtal, vilken är så beskaffad, att motsvarande funktionskurva har två asymptoter, $x = 1$ och $x+y=1$, och inflexionspunkt i punkten $(-1;\ 1)$. Konstruera därefter kurvan. (Mars 46. 7. sp.k.)

e) några maximi- och minimibestämningar

70. I en konvergent oändlig geometrisk serie med positiva termer är första termen lika med kvadraten på kvotens inverterade värde. Bestäm det minsta värde, som seriens summa kan anta. (Aug. 42. 1. sp.k.)

71. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av femte och sjätte termerna lika med 4. Vilket är det minsta värde, som summan av en sådan oändlig serie kan anta? (V. 35. 5. R)

72. Två konvergenta oändliga geometriska serier är så beskaffade, att första termen i vardera serien är lika med kvoten i den andra serien. Kvoterna är rötter till ekvationen $x^2-6ax-3a^2=0$. Undersök, om summan av seriernas summor har något maximum eller minimum för varierande reella värden på

a, och ange detta eller dessa värden på a jämte motsvarande maximi- eller minimivärden. (Aug. 50. 6. sp.k.)

73. Upprita kurvan $yx^3 + x^3 + 1 = 0$ i dess huvuddrag. Genom skärningspunkten mellan kurvans asymptoter drages en rät linje, som skär kurvan i två punkter A och B. Visa, att denna linje är normal till kurvan, då sträckan AB är så kort som möjligt. (Mars 42. 6. sp.k.)

f) undersökningar av variationsförloppet hos sträckor och ytor

74. Konstruera kurvan $y = x + \frac{1}{x}$. I en punkt P på kurvan drages tangenten. Denna skär kurvans asymptoter i punkterna A och B, vilka sammanbindes med kurvans maximipunkt M. Undersök, hur ytan av triangeln ABM varierar, då P genomlöper kurvan. (Mars 43. 6. sp.k.)

75. Upprita kurvan $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ i dess huvuddrag. Normalen till kurvan i en punkt P skär x-axeln i N. Undersök, hur projektionen av sträckan PN på x-axeln varierar, då punkten P genomlöper kurvan (överflödigt att beräkna max.-värdena). (Jan. 42. 6. sp.k.)

76. Upprita kurvan

$$y = \frac{2(x^2 - 1)^2}{x^3}.$$

Från en punkt P på kurvan drages normalen mot den asymptot, som ej är parallell med y-axeln. Normalen träffar asymptoten i Q. Undersök, hur längden av PQ varierar, då punkten P genomlöper kurvan, och åskådliggör detta grafiskt i ett särskilt diagram. (Aug. 44. 7. sp.k.)

77. Undersök kurvan $y = \frac{x^3}{1 + x^3}$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter samt asymptoter, och upprita kurvan i dess huvuddrag. Undersök därefter och åskådliggör grafiskt, hur ytan av en rektangel varierar, som har ett hörn på kurvan och två sidor längs kurvans asymptoter. (Aug. 52. 5. sp.k.)

78. Genom punkten $P\,(0;\ -1)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje, som skär x-axeln i punkten A och kurvan $y = 2 - x^2$ i punkten B. Undersök och åskådliggör med ett särskilt diagram, hur längden av sträckan AB:s projektion på x-axeln varierar, när linjen vrider sig kring P. (Aug. 51. 7. sp.k.)

79. De räta linjerna L och L' skär varandra under räta vinklar i punkten O. På den ena bisektrisen M till vinklarna mellan linjerna tages punkterna A och B på var sin sida om O, så att $AO = BO = 1$ längdenhet. P är en rörlig punkt på den andra bisektrisen M'. PA eller dess förlängning åt ena eller andra hållet skär L i C, och PB eller dess förlängning åt ena eller andra hållet skär L' i D. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av triangeln PCD varierar, när P genomlöper M'. Ange särskilt triangelytans eventuella maximi- och minimivärden. (Nov. 53. 7. sp.k.)

g) antal lösningar till en ekvation

80. Undersök genom studium av kurvan $y = \dfrac{2x^3 + 27x}{x^2 + 1}$, hur antalet rötter till ekvationen $2x^3 + 27x = a(x^2 + 1)$ varierar, då konstanten a antar olika värden. (Jan. 46. 5. sp.k.)

81. Konstruera kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ med angivande av eventuella asymptoter, maxima och minima. Undersök, hur kurvtangentens riktningskoefficient varierar, och åskådliggör detta i ett diagram. Ange även antalet tangenter för olika värden på riktningskoefficienten. (Nov. 42. 5. sp.k.)

82. Undersök kurvan $y(x - 1)^2 = 3x^2 - 8x + 4$ med avseende på asymptoter, maximi , minimi- och inflexionspunkter, samt upprita densamma i stora drag. För vilka värden på a kan man från punkten $P\,(a;\ 3)$ dra ingen, en eller flera tangenter med tangeringspunkten på ändligt avstånd? Diskutera särskilt fallet $a = 1$, och ange för detta fall tangentens ekvation. (Aug. 53. 7. sp.k.)

83. Upprita kurvan $y = \dfrac{2 - x^3}{x}$ med bestämmande av eventuella asymptoter, maxima och minima samt inflexionspunkter. Genom en punkt P på kurvan kan man, utöver tangenten i P, i vissa fall draga ytterligare tangenter till kurvan. Utred fullständigt, hur antalet tangenter varierar, då P genomlöper kurvan. Visa speciellt, att antalet tangenter är två för endast ett läge av P.
(Nov. 43. 7. sp.k.)

h) några kurvskaror

84. Kurvan $y = x^3 + x(a^2 - 2a)$ har olika utseende, beroende på värdet av konstanten a. Bestäm kurvans eventuella maximi- och minimipunkter, inflexionspunkter samt skärningspunkter med x-axeln. Ange med tillhjälp härav, vilka huvudtyper kurvan uppvisar och för vilka värden på a de olika typerna förekommer. (Mars 46. 4. sp.k.)

85. Undersök kurvan $y = ax - \dfrac{1 + a^2}{16}x^2$, där a är en reell konstant. Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter samt skärningspunkter med axlarna. När a antar alla möjliga reella värden, skär kurvan x-axeln inom ett visst område. Bestäm detta. Ange också ekvationerna för de kurvor, som motsvarar det nämnda områdets gränspunkter, och upprita dessa kurvor.
(Nov. 49. 7. sp.k.)

86. Kurvan $y = \dfrac{(x - a)^2(x - b)^2}{x^3}$ råkar x-axeln i punkterna A och B. Kurvans ena asymptot går genom punkten $(b;\ 0)$. Visa, att A och B är maximi- och minimipunkter och att några ytterligare sådana punkter icke finns på kurvan. Ange kurvans utseende i stora drag för de olika fall, som är möjliga. Det är tillräckligt att upprita en kurva för positivt och en för negativt värde på a.
(Mars 49. 7. sp.k.)

87. Diskutera utseendet av kurvan $y = \dfrac{2x + a}{x^2 - 4}$ för olika värden på a. Undersök därvid skärningspunkter med koordinataxlarna, maximi- och minimipunkter samt asymptoter. Undersök även, hur kurvan närmar sig till asymptoterna. Upprita slutligen i deras huvuddrag – i olika koordinatsystem – exempel på de olika typer av kurvor, som kan förekomma. (Mars 53. 7. a.k.)

88. Diskutera utseendet av kurvan $y = \dfrac{x + 2a}{x^2 - a^2}$ för olika värden på konstanten a. Upprita i stora drag ett exempel på var och en av kurvans huvudtyper. Sök och konstruera därefter orten för kurvans maximi- och minimipunkter, när a varierar. Det erfordras icke men betraktas som en förtjänst, om utredning lämnas för hur ortkurvans olika delar svarar mot de särskilda kurvornas maximi- och minimipunkter. (Nov. 51. 7. sp.k.)

89. Diskutera utseendet av kurvan $y = \dfrac{x^4 + ax^2 - 3}{x^3}$ för olika värden på konstanten a. Undersök därvid skärningspunkter med koordinataxlarna, asymptoter och kurvans skärningspunkter med dessa, kurvans läge i förhållande till asymptoterna samt maximi- och minimipunkter. Åskådliggör i olika koordinatsystem de olika typer av kurvor, som kan förekomma. – Undersökning av kurvornas inflexionspunkter erfordras inte men betraktas som en förtjänst. (Jan. 54. 7. sp.k.)

90. Undersök, hur formen på kurvan $y = \dfrac{x^3 + ax}{x^2 + 1}$ beror av konstanten a. Visa därefter, att kurvans utanför origo belägna inflexionspunkter beskriver två fasta räta linjer, då värdet på a ändras. (Mars 48. 7. sp.k)

i) några ortproblem

91. I ett rätvinkligt koordinatsystem ligger en punkt P i första kvadranten. Q är fotpunkten för normalen från P mot x-axeln, O är origo, T är tyngdpunkten i triangeln OPQ. Ytan av triangeln OPT är $\frac{1}{2}$ ytenhet. Sök och konstruera orten för punkten P. (Jan. 44. 1. sp.k.)

92. Upprita kurvan $3y = x^3 - 12x$ i dess huvuddrag. Genom punkten $A\,(-3;\ 3)$ på kurvan drages en rät linje, som skär kurvan i ytterligare två punkter B och C. Sök orten för mittpunkten på kordan BC, när linjen vrider sig kring A. (Mars 47. 4. sp.k.)

93. En rätvinklig triangel OAB har den räta vinkelns spets O i origo, hörnet A på den räta linjen $x = -3$ och hörnet B på den räta linjen $x - 3y - 3 = 0$. Sök och konstruera orten för triangelns tyngdpunkt, och ange ortens eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter. (Mars 52. 4. sp.k.)

94. En rät linje råkar koordinataxlarnas positiva delar i punkterna A och B. Omkretsen av triangeln AOB, där O är origo, är 4 längdenheter. Sök orten för mittpunkten av sträckan AB. Hyfsa den erhållna ekvationen för orten, konstruera den motsvarande kurvan samt ange, vilken del av densamma som representerar orten. (Jan. 47. 5. sp.k.)

95. Genom punkten $A\,(1;\ 2)$ drages en rät linje, som skär x-axeln i punkten B och linjen $y = x$ i punkten C. En cirkel lägges genom origo och punkterna B och C. Sök och konstruera orten för denna cirkels medelpunkt, då den förstnämnda linjen vrider sig kring punkten A. (Mars 50. 5. sp.k.)

96. Genom punkten $(5;\ 7)$ på kurvan $xy - 4x - 3y + 6 = 0$ drages en godtycklig rät linje, som skär kurvans asymptoter i två punkter. Genom dessa drages därefter räta linjer, som är parallella med asymptoterna och skär varandra i punkten P. Sök och konstruera orten för punkten P. (Aug. 45. 5. sp.k.)

97. Ekvationen $y = \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{a}{x^2}$ representerar olika kurvor för olika värden på den positiva konstanten a. Sök och konstruera i dess huvuddrag orten för de punkter på dessa kurvor, i vilka tangenterna är parallella med x-axeln. Ange om möjligt de områden av orten, som bildas av maximi- respektive minimipunkterna till de givna kurvorna. (Mars 44. 7. sp.k.)

Algebraiska funktioner

a) deriveringsuppgifter

98. Bevisa, att funktionen $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ satisfierar ekvationen

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$ (Jan. 50. 1. sp.k.)

99. Visa, att funktionen $y = \sqrt{x^2 + C}$ satisfierar ekvationen $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2} = y^2 - x^2$ för alla värden på konstanten C. (Mars 55. 1. sp.k.)

100. Visa, att funktionen $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+c}}$ satisfierar ekvationen $2(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} - 2xy + y^3 = 0$ för varje värde på konstanten c. (Aug. 46. 2. sp.k.)

101. Visa, att funktionen $y = ax + bx\sqrt{1 - x^2}$, där a och b är konstanter, satisfierar ekvationen

$$x(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2 - 1)y = ax^3.$$ (Mars 53. 2. sp.k.)

102. Genom ekvationen $\left(\dfrac{a}{x}\right)^3 - \left(\dfrac{b}{y}\right)^3 = 1$, där a och b är från 0 skilda konstanter, bestämmes y som funktion av x. Visa, att denna funktion, oberoende av värdena på a och b, satisfierar ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$ (Jan. 54. 3. sp.k.)

103. Bestäm ekvationerna för de med koordinataxlarna parallella tangenterna till kurvan $x^3 + y^3 - 3xy = 3$. Kurvan behöver ej uppritas. (Nov. 55. 3. sp.k.)

b) kurvkonstruktioner

104. Konstruera kurvan $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. Ange speciellt eventuella maxima och minima. (Mars 40. 6. sp.k.)

105. Konstruera i huvuddrag kurvan $y = x\sqrt[4]{9 - x^2}$ och ange särskilt, dels de punkter, som ligger på x-axeln, och ekvationerna för tangenterna i dessa punkter, dels kurvans maximi- och minimipunkter. (Mars 37. 6. sp.k.)

106. Genom ekvationen $4x^2 + 9y + axy + bx + cy + d = 0$, där a, b, c och d är konstanter, bestämmes y som funktion av x. Denna funktion har ett maximum $y = 2$ för $x = 1$ och ett minimum $y = 0$ för $x = 2$. Bestäm de ingående konstanterna, och upprita den motsvarande kurvan i stora drag. (Mars 51. 5. sp.k.)

107. För att bestämma sneda asymptoter till en kurva kan man i många fall förfara på följande sätt. Tangenten till kurvan i en punkt med x-koordinaten x_1 bestämmes under formen $y = kx +$, varefter man beräknar

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} k \quad \text{och} \quad \lim_{x_1 \to \pm\infty} l.$$

Använd denna metod för att bestämma den sneda asymptoten till kurvan $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$. Konstruera därefter kurvan med angivande även av eventuella maximi- och minimipunkter samt övriga asymptoter. (Jan. 53. 7. sp.k.)

c) extremvärdesuppgifter

108. För vilket värde på x har uttrycket

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

ett maximum? (H. 18. 5. R.)

109. Vilket är det största värde, som uttrycket $\sqrt{x+1} + \sqrt{3 - 2x}$ kan antaga? (V. 06. 6. R.)

110. I fyrhörningen $ABCD$ är vinklarna A och B båda räta. Sidorna BC och CD har vardera längden 1 cm. Bestäm maximivärdet av fyrhörningens yta. Svaret skall anges i såväl exakt som approximativ form.[1] (Mars 54. 4. sp.k.)

111. En likbent triangel har sin spets i origo O. Basen är parallell med x-axeln, och dess ändpunkter, A och B, ligger på kurvan $x^2y = 1$. Bestäm maximivärdet av radien till den i triangeln OAB inskrivna cirkeln. (Mars 48. 4. sp.k.)

112. Genom punkten P med koordinaterna $(3p;\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje, som skär parabeln $y^2 = 2px$ i punkterna A och B. Parabelns tangent i punkten A skär x-axeln i C. Vilket är det minsta värde, som ytan av triangeln ABC antar, då linjen AB vrider sig kring punkten P? (Nov. 53. 6. sp.k.)

---

[1] Uppgiften kan också behandlas med hjälp av trig. funktioner.

Trigonometriska funktioner

a) några tillämpningar på tangentteoremet

113. I triangeln ABC är sidan $A = 19{,}3$ cm, sidan $BC = 8{,}6$ cm och vinkeln $B = 52{,}17°$. Sidan CA förlänges till en punkt D utanför A, så att $AD = \frac{1}{2}AB$. Beräkna vinklarna i triangeln ABD. (H. 35. 1. R.)

114. I triangeln ABC är $AB = 6{,}2$ cm och vinklen $BAC = 56{,}48°$. På AC (mellan A och C) tages punkten D, så att $BD = AB$, varvid $CD = 2BD$. Beräkna vinkeln C. (Aug. 37. 5. a.k.)

115. I triangeln ABC, vars yta är $5{,}85\ \text{cm}^2$, är AB 5 cm, AC 3,9 cm. Beräkna triangelns största vinkel. (Nov. 51. 3.a.k.)

116. I en triangel är två sidor 37,23 cm och 48,31 cm. Den ena av de mot dessa sidor stående vinklarna är 4,68° större än den andra. Beräkna vinklarna i triangeln. (Jan. 43. 1. a.k.)

b) problem, som leder till lösning av trigonometriska ekvationer eller olikheter

117. för vilka spetsiga eller trubbiga vinklar gäller olikheten

$$4 + 2\cos 2x - 5\sin x > 0? \qquad \text{(Nov. 39. 4. a.k.)}$$

118. Medianen mot ena kateten i en rätvinklig triangel bildar 10° vinkel med hypotenusan. Beräkna triangelns spetsiga vinklar. (Aug. 53. 5. a.k.)

119. I en likbent triangel ligger höjdernas skärningspunkt på den i triangeln inskrivna cirkelns periferi. Beräkna triangelns vinklar. (Jan. 54. 6. a.k.)

120. I triangeln ABC förhåller sig vinkeln B till vinkeln C som $2 : 3$. Från A drages bisektrisen och medianen till den motstående sidan. Avståndet mellan deras skärningspunkter med sidan BC utgör $\frac{1}{14}$ av denna sidas längd. Bestäm triangelns vinklar. (Aug. 41. 6. a.k.)

121. I en triangel ABC är vinkeln A 45°. Sidan AB delas av punkten D, så at delarna AD och DB förhåller sig som $1 : 2$. Drages linjen CD, kommer vinklarna ACD och DCB likaså att förhålla sig som $1 : 2$. Beräkna de övriga vinklarna i triangeln ABC. (Jan. 46. 6. a.k.)

122. I triangeln ABC bildar medianen CD 20° vinkel med sidan CB. Vinkeln A är 40°. Beräkna de övriga vinklarna i triangeln ABC. (Jan. 48. 5. a.k.)

123. En given cirkel delas i p st sektorer med lika stora medelpunktsvinklar, genom att radierna OA_0, OA_1, OA_2, $\ldots OA_{p-1}$ drages. Från A_0 fälles normalen A_0B_1 mot OA_1, från B_1 normalen B_1B_2 mot OA_2 osv. Från den på OA_{p-1} erhållna fotpunkten B_{p-1} fälles normalen $B_{p-1}B_p$ mot OA_0, från B_p normalen B_pB_{p+1} mot OA_1 osv. Om konstruktionen upprepas i oändlighet, erhålles en bruten spirallinje $A_0B_1B_2 \ldots B_{p-1}B_pB_{p+1} \ldots$, bestående av ett obegränsat antal sträckor. För vilka värden på p gäller, att längden av denna spirallinje är mindre än hälften men större än tredjedelen av den givna cirkelns omkrets, och hur stora är i dessa fall sektorernas medelpunktsvinklar? (Aug. 50. 7. a.k.)

c) några extremvärdesuppgifter, för vilkas lösning derivator inte behöver användas

124. Bestäm maximi- och minimivärdena av funktionen

$$\cos(x+\alpha)\cos(x-3\alpha)$$

där α är en konstant. (Jan. 42. 3. sp.k.)

125. Visa, att om M är maximivärdet och m minimivärdet av funktionen $\sin x \sin(x+\alpha)$, där α är en konstant, så är $M-m=1$. (Mars 43. 5. sp.k.)

126. Bestäm maximivärdet för uttrycket $(\sin x+\sin y)(\cos x+\cos y)$, där x och y är två positiva vinklar, vilkas summa är $120°$. (Mars 45. 4. sp.k.)

127. P är en variabel punkt inom kvadraten $ABCD$. Vinkeln APB är rät. Beräkna vinkeln PAB, om sträckan PD är så liten som möjligt. (Nov. 44. 4. sp.k.)

128. Två cirklar med radierna R och r har samma medelpunkt. En rektangel är så belägen, att en av dess sidor är korda i den ena cirkeln och den mostående sidan korda i den andra cirkeln. Bestäm rektangelns sidor, då dess yta är så stor som möjligt. (Aug. 52. 6. sp.k.)

129. I triangeln ABC, där vinkeln A är rät, drages medianerna BM och CN. De skär varandra i punkten P. Undersök, hur vinkeln MPC varierar, när vinkeln ABC växer från $0°$ till $90°$, och ange särskilt det största värde, som den förstnämnda vinkeln kan anta. (Nov. 55. 5. sp.k.)

130. Ange de värden på x, för vilka den oändliga geometriska serie konvergerar, vars första term är 1 och andra term är $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$. Ange också seriens summa för dessa värden på x samt de värden, som summan kan anta. (Nov. 50. 8. sp.k.)

131. Bestäm avståndet r från origo O i ett rätvinkligt koordinatsystem till en punkt P på kurvan $2x^2-2xy+2y^2=1$ som funktion av den vinkel v – räknad i positiv led – som bildas mellan positiva x-axeln och sträckan OP. Undersök, hur detta avstånd varierar, då vinkeln v ändras, och ange speciellt avståndets största och minsta värde. Upprita även kurvan med användning av de erhållna resultaten eller på annat sätt. (Mars 55. 6. sp.k.)

d) derivering av funktioner i explicit form

132. För vilka värden på x, uttryckta i radianer, är $4\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$, om $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$? (Aug. 43. 2. sp.k.)

133. Bestäm första derivatan av funktionen $\dfrac{\sin^2 3x}{\cos^3 2x}$ samt de värden på x, för vilka derivatan blir $=0$. (Aug. 41. 2. sp.k.)

134. Visa, att funktionen $y=\sqrt[3]{\sin^2 x+\frac{1}{4}}$ satisfierar ekvationen $3y^2\dfrac{dy}{dx}=\sin 2x$. Bestäm också, för vilka x-värden funktionen antar sina största och minsta värden. (Nov. 47. 1. sp.k.)

135. Visa att funktionen $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ satisfierar ekvationen $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$. (Mars 53. 4. sp.k)

136. Bevisa att funktionen $y = a\sin\dfrac{1}{x} + b\cos\dfrac{1}{x}$ satisfierar ekvationen $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2}{y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x^4}y = 0$, oberoende av x och för godtyckliga värden på konstanterna a och b. (Mars 50. 2. sp.k.)

137. För vilket eller vilka värden på konstanten a satisfierar funktionen $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ ekvationen $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - a^2)y = 0$. (Aug. 49. 3. sp.k.)

138. Visa, att funktionen $I = I_0 \cdot \sin(ct - v)$ satisfierar ekvationen

$$R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt} = V_0 \cdot \sin ct.$$

Storheterna I_0, c, v, R, L och V_0 är konstanter, mellan vilka följande båda samband råder:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + c^2L^2}} \text{ och } \tan v = \frac{cL}{R}, \text{ där } 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

(Aug. 55. 4. sp.k.)

e) derivering av funktioner i implicit form

139. Bestäm derivatan till den funktion y av variabeln x, som definieras genom ekvationen $\tan y = a\cot x$, där a är en konstant. (Derivatan skall uttryckas som en funktion av x.) (V. 24. 5. R)

140. Om $x = \sin 2y + \cos 2y$, härled för $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ ett uttryck, som innehåller endast variabeln x. (Aug. 38. 3. sp.k.)

141. Funktionen y satisfierar ekvationen $xy\cos\dfrac{y}{x} = C$, där C är en konstant. Visa, att sambandet

$$x\left(y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)$$

gäller för alla värden på C. (Jan. 53. 3. sp.k.)

142. Sök derivatan av y som funktion av x, om

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

(Jan. 43. 2. sp.k.)

143. Mellan variablerna y och z råder sambandet $z = \dfrac{1 + \tan y}{1 - \tan y}$. Bevisa, att $\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2z\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2 = 0$. (Jan. 55. 2. sp.k.)

144. Genom sambandet $\tan \dfrac{y}{x} = x$ bestämmes y som funktion av x. Bevisa giltigheten av sambandet

$$(x + x^3)\frac{dy}{dx} = y(1 + x^2) + x^2. \qquad \text{(Jan. 52. 3. sp.k.)}$$

145. Härled ur sambandet $y\sqrt{\sin 2x} = 1$ ett uttryck för $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, som endast innehåller y. Visa, att samma uttryck för andra derivatan erhålles även ur sambandet $y\sqrt{\cos 2x} = 1$. (Jan. 46. 2. sp.k.)

146. Genom ekvationen $\sin y = \sqrt{x}$, där $0 < x < 1$ och $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, bestämmes y som funktion av x. Visa, att denna funktion för de ifrågavarande värdena på x och y satisfierar ekvationen $2x(1 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (1 - 2x)\dfrac{dy}{dx} = 0$. (Nov. 50. 3. sp.k.)

147. I sambandet $\sin y = k \sin x$ är k en konstant, som är > 1. Visa, att $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ kan uttryckas som funktion av y enbart, och bestäm därefter det eller de y-värden, för vilka värdet av $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ blir $= 2 \cdot (k^2 - 1)$. (Jan. 51. 4. sp.k.)

148. Genom sambandet $y^2 \cos nx = 1$, där n är en konstant, bestämmes y som funktion av x. Bestäm de värden på n, för vilka denna funktion satisfierar ekvationen $y + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 3y^5$, samt ange i dessa fall, för vilka värden på x inom intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ funktionen antar reella och ändliga värden. (Aug. 53. 6. sp.k.)

f) trigonometriska kurvor

149. Bestäm det största och minsta värde, som funktionen $y = 4 \sin x + \cos 2x$ kan anta. (Aug. 48. 1. sp.k.)

150. Bestäm maxima och minima av funktionen $y = \cos 2x - 2 \sin x - 1$. Konstruktionen av motsvarande kurva i stora drag erfordras inte men betraktas som en förtjänst. (Nov. 49. 4. sp.k.)

151. Bestäm x-värdena för eventuella maximi-, minimi- och inflexionspunkter till kurvan $1,5y = 6x + 10 \sin x + \sin 2x$ inom intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. (Jan. 47. 2. sp.k.)

152. Bestäm koordinaterna för inflexionspunkterna på kurvan $y = \sin x \cos(x - 150°)$ i intervallet $0 \leq x \leq 180°$. Motivering måste lämnas för att de erhållna punkterna verkligen är inflexionspunkter. Konstruktionen av kurvan erfordras däremot icke men betraktas som en förtjänst. (Jan. 50. 3. sp.k.)

153. Beräkna maxima- och minimivärdena av funktionen $y = \sin x - x \cos x$. Konstruktionen av motsvarande kurva erfordras icke men betraktas som en förtjänst. (Mars 49. 4. sp.k.)

154. Visa, att kurvorna $y = f(x)$ och $y = f'(x)$, där $f(x) = 3 + 4\tan x$ och $f'(x)$ är derivatan av $f(x)$ med avseende på x, har gemensamma tangenter i de punkter, där de skär varandra. Kurvorna uppritas icke. (Mars 51. 3. sp.k.)

155. Upprita kurvan $2y = x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x$ inom intrvallet $0 \leq x \leq 2\pi$, och ange maximi-, minimi- och inflexionspunkter. Visa, att inflexionspunkterna ligger på en och samma räta linje. (Mars 48. 6. sp.k.)

156. Ange definitionsområde, nollställen och eventuella maxima och minima för funktionen

$$y = 1 - \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}.$$

Upprita därefter den motsvarande kurvan. (Mars 52. 7. sp.k.)

157. Undersök kurvan $y = \dfrac{\sin x}{x}$ med avseende på asymptoter, symmetriförhållanden samt maximi- och minimipunkter, och upprita kurvan i stora drag. Därvid skall speciellt anges, för vilka x-värden inom intervallet $0 < x < 2\pi$ maximi- och minimipunkter erhålles. Vidare skall kurvans utseende för x-värden i närheten av 0 utredas. (Nov. 55. 7. sp.k.)

158. Visa, att kurvan $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ skär x-axeln oändligt många gånger samt att det mellan två successiva skärningspunkter finns en punkt där kurvan tangerar endera av linjerna $y = x$ och $y = -x$. Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man uppritar kurvan i dess huvuddrag särskilt att man därvid studerar densamma, när $x \to 0$ och $x \to \pm\infty$. (Mars 56. 6. sp.k.)

g) konstantbestämningar

159. Bestäm konstanterna a, b och c så, att funktionen $f(x) = a\cos 2x + b\sin x + c$ får ett maximum $= 4$ för $x = 30°$ och ett minimum $= 3$ för $x = 90°$. (Mars 37. 2. sp.k.)

160. Bestäm ett polynom $f(x)$ av tredje graden så beskaffat, att funktionen $y = f(x)$ för $x = 0$ antar samma värde på y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ och $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ som funktionen $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin x}}$. (Jan. 56. 3. sp.k.)

h) extremvärdesuppgifter

161. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel med radien 6 cm. Vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln B. Bestäm fyrhörningens vinklar så, att summan av diagonalernas längder blir så stor som möjligt. (Aug. 55. 2. sp.k.)

162. I den likbenta triangeln ABC är $AB = AC = s$. På sidan BC uppritas utåt en kvadrat. Sök maximum för triangelns och kvadratens sammanlagda ytor, då vinkeln A varierar. (Jan. 37. 8. R)

163. Hypotenusan i en rätvinklig triangel betecknas med a, kateterna med b och c. Uttrycket

$$\frac{a(b + c)}{bc}$$

antar olika värden, då den rätvinkliga triangelns form ändras. För vilken triangel antar uttrycket det minsta värdet? (Mars 41. 3. sp.k.)

164. Från en punkt P på en cirkelsektors båge drages normalerna PQ och PR mot sektorns radier. Sök maximivärdet för ytan av triangeln PQR, då sektorns radie är r och dess medelpunktsvinkel $g°$ ($g < 180$). (Aug. 44. 3. sp.k.)

165. I en given cirkelsektor, vars medelpunktsvinkel är mindre än 90°, inskrives en rektangel med två hörn på sektorns ena radie. När är rektangelns yta så stor som möjligt? (Aug. 40. 3. sp.k.)

166. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen $\cos x$ och andra termen $\frac{1}{2}(\sin 2x - 2\cos x)$. Bestäm maxima och minima för seriens summa. (Nov. 39. 4. sp.k.)

167. I en punkt på kurvan $y = x^3 - x$ drages tangenten till kurvan. Denna träffar kurvan i ytterligare en punkt, i vilken tangenten drages. Beräkna det största värdet på den spetsiga vinkeln mellan de båda tangenterna. (Jan. 45. 5. sp.k.)

168. I en cirkel med radien r inskrives ett parallelltrapets, i vilket en vinkel är 60°. Beräkna det största värde, som trapetsets omkrets kan anta. (Mars 50. 6. sp.k.)

169. En cirkel med radien r har sin medelpunkt i mittpunkten på den större av de parallella sidorna i ett parallelltrapets och tangerar trapetsets övriga sidor. Bestäm i exakt form det minsta värde, som trapetsets omkrets kan anta. (Aug. 54. 4. sp.k.)

170. I en given cirkel med radien r har man inskrivit en rektangel $ABCD$. Mittpunkten P på den mindre av cirkelbågarna AB sammanbindes med A och B, och mittpunkten Q på den mindre av cirkelbågarna CD sammanbindes med C och D. Man får på detta sätt en i cirkeln inskriven sexhörning $APBCQD$. Mellan vilka gränser kan sexhörningens omkrets variera, då rektangelns form ändras? (Jan. 45. 3. sp.k.)

171. Visa, att de tre uttrycken $\sin x$, $\left(\cos x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$ och $\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x\right)$ utgör de tre första termerna i en geometrisk serie. Undersök, för vilka värden på x denna serie kan utsträckas till en konvergent oändlig geometrisk serie. Summera sistnämnda serie, och åskådliggör summan grafiskt. (Jan. 46. 7. sp.k.)

172. Ett rektangulärt pappersark $ABCD$ är av s.k. standardformat (*DIN*-format), dvs. $AB = AD\sqrt{2}$. Arket vikes, så att hörnet A faller på sidan CD och vikningslinjens ändpunkter på AB och AD. Var skall A falla, för att vikningslinjen skall bli så kort som möjligt? (Jan. 53. 5. sp.k.)

173. I en triangel är skillnaden mellan två vinklar 30° och den omskrivna cirkelns radie R. Bestäm det största värde, som triangelns yta kan anta. (Mars 47. 6. sp.k.)

i) några uppgifter av blandat innehåll (i allmänhet svårare uppgifter)

174. Två punkter P och Q på kurvan $y = \cos^2 x$ har x-koordinaterna 0 respektive a. Kurvans normaler i P och Q råkas i M. När punkten Q obegränsat närmar sig P, dvs. när $a \to 0$, närmar sig M en viss punkt M_0. Bestäm dennas koordinater. (Aug. 51. 5. sp.k.)

175. P är en rörlig punkt på bågen av en halvcirkel med diametern AB $(= 2r)$. På den i A dragna tangenten avsättes en sträcka AQ, lika stor som kordan AP, så att vinkeln PAQ blir spetsig. Linjen PQ skär förlängningen av AB i punkten R. Då P obegränsat närmar sig A, närmar sig längden av sträckan AR ett bestämt gränsvärde. Bestäm detta. (Aug. 48. 6. sp.k.)

176. Bevisa, att olikheten $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, där x mätes i radianer, gäller för $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. (Aug. 46. 7. sp.k.)

177. Bevisa, att för alla vinklar x mellan 0 och $\pi/2$ gäller olikheterna

$$\frac{2\sin x + \tan x}{3} > x > \sin x$$

(Jan. 53. 6. sp.k.)

178. För att undersöka interpolationen vid funktionen $y = \sin x$ förfares på följande sätt. Om x erhåller ett tillskott Δx, så erhåller y ett tillskott Δy. Visa, att Δy kan skrivas

$$\cos x \sin \Delta x - 2 \sin x \sin^2 \frac{\Delta x}{2}.$$

Om det gäller att beräkna Δy med fyra korrekta decimaler för $\Delta x = 0{,}1°$, kan andra termen i detta uttryck för Δy försummas. Visa detta, och utför beräkningen av Δy för värdena $x = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$, allt utan hjälp av trigonometriska tabeller. Upprita slutligen ett diagram, som visar, hur Δy variera, då x varierar från 0° till 90°. (Nov. 52. 7. sp.k.)

179. I funktionen $y = \dfrac{2\sin 2x + \tan 2x}{2\sin x - \tan x}$ antar såväl täljaren som nämnaren värdet 0 för $x = 60°$. Genom att på lämpligt sätt förenkla funktionen kan man bestämma $\lim_{x \to 60°} f(x)$. Genomför detta. Bestäm därefter samtliga x-värden, för vilka $f(x)$ antar formen $\frac{0}{0}$, och ange motsvarande gränsvärden. (Mars 52. 7. a.k.)

180. Undersök kurvan $y = ax - \sin x$ med avseende på maximi , minimi- och inflexionspunkter för olika positiva värden på konstanten a, och åskådliggör i skilda koordinatsystem exempel på de olika huvudtyper av kurvor, som kan förekomma. (Mars 55. 7. sp.k.)

j) absolut vinkelmått

181. Origo sammanbindes med den närmaste maximipunkten i första kvadranten på kurvan $y = \sin x$. En rät linje parallell med y-axeln skär kurvan i A (mellan origo och den nämnda maximipunkten) och den nyss nämnda sammanbindningslinjen i B. Sök maximum av sträckan AB. (Nov. 40. 3. sp.k.)

182. I en halvcirkel är O medelpunkten och A diameterns ena ändpunkt. AB är en korda och OC den med AB parallella radien. När antar ytan av figuren $OABC$ sitt största värde? (Nov. 45. 5. sp.k.)

183. I en halvcirkel med diametern AB drages en korda BP. Om man från P fäller normalen PC mot AB, erhålles en triangel BCP och ett halvt cirkelsegment ACP. För vilket läge på P är skillnaden mellan ytan av den nämnda triangeln och ytan av det halva cirkelsegmentet så stor som möjligt? (Mars 42. 5. sp.k.)

184. AB är diametern i en given halvcirkel med medelpunkten O och radien 1 dm. P är en punkt på halvcirkelbågen och Q mittpunkten på bågen PB. Normalerna genom P och Q mot diametern AB träffar denna i punkterna R och S resp. Den yta, som begränsas av cirkelbågen PQ och sträckorna QS, SR och RP, är en funktion av vinkeln POB. Ange denna funktion, bestäm dess eventuella maximi- och minimivärden och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. (Jan. 54. 6. sp.k.)

185. I en halvcirkel med radien 1 längdenhet drages en korda CD parallellt med halvcirkelns diameter AB. Genom A drages en rät linje till kordans närmast B belägna ändpunkt D. Beräkna längden av kordan CD, då figuren $ADCA$, begränsad av kordorna AD och CD, samt bågen AC, har så stor yta som möjligt. (Nov. 48. 5. sp.k.)

186. Om v är en vinkel, som ligger mellan 0° och 30°, är 60 sin v approximativt lika med vinkelns gradtal. Vilket är det största värde differensen kan antaga? (Mars 38. 6. sp.k.)

k) funktioner givna i parameterform

187. Genom sambanden $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ bestämmes y som funktion av x. Visa, att funktionen y satisfierar ekvationen

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0.$$

(Nov. 52. 3. sp.k.)

188. Genom sambanden $x = \sin^2 t$ och $2y = \sin 2t$ bestämmes y som funktion av x. Visa, att

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4y^2}.$$

(Aug. 54. 2. sp.k.)

189. Genom sambanden $x = 2t + \sin 2t$, $y = 2\sin^2 t$ bestämmes y som funktion av x. Ange andra derivatan av y med avseende på x i en form, där variabeln t icke ingår. (Nov. 45. 3. sp.k.)

190. Genom sambanden $x = \cos \frac{v}{a}$, $y = \cos v$, där v är en variabel och a en konstant, bestämmes y som funktion av x. Bevisa giltigheten av sambandet

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx} - a^2y.$$

(Nov. 51. 4. sp.k.)

191. Medelst ekvationerna $x = 2z - \sin z$, $y = 2 - \cos z$, där z är en variabel vinkel, som är uttryckt i radianer, bestämmes y som en funktion av x. Bestäm de värden på y, för vilka derivatan av y med avseende på x antar värdet $\frac{1}{2}$. (Aug. 45. 6. sp.k.)

l) grafisk lösning av ekvationer

192. Bestäm med användande av grafisk konstruktion på en 10-dels grad när värdet av medelpunktsvinkeln i en cirkelsektor (radien = 1), vilkens yta delas mitt itu av den korda, som sammanbinder sektorbågens båda ändpunkter. (V. 16. 7. R)

193. Bågen i ett cirkelsegment är dubbelt så stor som segmentets korda. Bestäm medelst grafisk metod kordans medelpunktsvinkel på 0,5° när. (Aug 43. 3. sp.k.)

194. I en cirkelsektor OAB är O cirkelns medelpunkt, A och B sektorbågens ändpunkter. Kordan AB drages. Bestäm medelst grafisk konstruktion sektorns medelpunktsvinkel på 1° när, om omkretsen av triangeln OAB är dubbelt så stor som bågen AB. (Nov. 38. 6. sp.k.)

195. I den rätvinkliga triangeln ABC är hypotenusan AC en längdenhet. Med AB som diameter uppritas en halvcirkel, som skär AC i punkten E. Bestäm medelst grafisk metod vinkeln A på 0,1° när, då cirkelbågen BE är så stor som möjligt. (Mars 46. 6. sp.k.)

196. Med en given sträcka AB som diameter är en halvcirkel uppritad. En cirkel med B till medelpunkt skär AB i D och halvcirkelbågen i C. En figur begränsas av kordan AC, sträckan AD och cirkelbågen CD. Bestäm medelst grafisk konstruktion vinkeln ABC på 0,5° när, då nämnda figur har största möjliga yta. (Mars 52. 5. sp.k.)

197. Hur stor del av en cirkels yta kan högst upptagas av en i cirkeln inskriven cirkelsektor? (Jan. 48. 5. sp.k.)

198. Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter till kurvan $y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos x$ inom intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$, och upprita kurvan inom detta intervall. (Aug. 52. 7. sp.k.)

Parabeln

a) allmänna problem

199. I skärningspunkterna mellan den räta linjen $x + y = 3$ och parabeln $y^2 = 4x$ drages tangenterna till parabeln. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av dessa tangenter och den räta linjen. (Nov. 38. 1. sp.k.)

200. En korda i parabeln $y^2 = 4x$ går genom punkten $(5;\ 2)$ och halveras i denna punkt. Bestäm koordinaterna för kordans ändpunkter. (Aug. 40. 1. sp.k.)

201. Parabeln $y^2 = 4ax$ träffas av en ljusstråle, som går från vertex längs den räta linjen $y = 2x$. Sedan strålen en gång reflekterats mot parabeln, löper den längs en annan rät linje. Bestäm dennas ekvation. (Nov. 54. 2. sp.k.)

202. I en av de punkter på parabeln $y^2 = 4ax$, vilkas x-koordinat är $4a$, drages kurvans normal. Denna råkar parabeln ytterligare i punkten P. Bestäm den spetsiga vinkeln mellan den nämnda normalen och parabeltangenten i P. (Aug. 51. 2. sp.k.)

203. En parabel, vars axel är parallell med x-axeln, tangerar de räta linjerna $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$ och $2x - y - 3 = 0$. Bestäm parabelns ekvation. (Mars 46. 2. sp.k.)

204. I en parabel drages en korda genom fokus. Den mot kordariktningen svarande diametern skär kordan i punkten M och parabeln i punkten N. Sträckan MN har samma längd som parabelns parameter. Bestäm vinkeln mellan kordan och parabelns axel. (Mars 51. 2. sp.k.)

205. En parabels vertex ligger i punkten $(2;\ -4)$, och dess axel är parallell med y-axeln. Parabeln tangerar den räta linjen $x + y = 0$. Bestäm dess ekvation. (Mars 56. 2. sp.k.)

206. En liksidig triangels sida är 4 längdenheter. En parabel tangerar förlängningarna av två sidor i triangeln, har sin brännpunkt på den tredje sidan och sin axel vinkelrät mot denna sida. Hur stor är parabelns parameter? (Nov. 39. 1. sp.k.)

207. De räta linjerna $2x+y-5 = 0$ och $2x+y-30 = 0$ är tangent respektive normal till parabeln $y^2 = 4a(x-b)$. Bestäm konstanterna a och b. (Aug. 54. 1. sp.k.)

208. Ekvationen för en parabel är $y^2 = 6x$. Kordan AB är normal till parabeln i punkten A och delas av parabelns axel i förhållandet $1 : 2$. Bestäm koordinaterna för punkterna A och B. (Aug. 45. 2. sp.k.)

209. Genom brännpunkterna till parablerna $y^2 = 4ax$ och $y^2 = 4bx$ drages två parallella kordor, en i vardera parabeln. Dessa och tillhörande diametrar begränsar en parallellogram. Bestäm kordornas riktningskoefficient, så att parallellogrammen blir en romb. (Mars 52. 2. sp.k.)

210. Två parabler med olika parametrar har sina axlar utefter samma räta linje och sina vertices i samma punkt. De är vända åt samma eller motsatta håll. Till ett system parallella kordor med riktningskoefficienten k drages diametern i vardera parabeln. Bestäm förhållandet mellan avståndet mellan parablernas brännpunkter och avståndet mellan diametrarna. (Nov. 41. 4. sp.k.)

211. Sök ekvationerna för de båda cirklar, vilka tangerar såväl x-axeln som parabeln $y^2 = 3x$, den senare i punkten $(\frac{4}{3};\ 2)$. (Nov. 51. 3. sp.k.)

212. Cirkeln $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 49 = 0$ tangerar i punkten $(-3;\ 8)$ parabeln $(x - a)^2 = 4by + 64$. Var ligger parabelns fokus? (Jan. 48. 4. sp.k.)

213. Upprita kurvan $x^2y - x^3 = 1$ i dess huvuddrag. En parabel, vars axel är parallell med y-axeln, tangerar kurvan i två punkter. Kurvornas gemensamma tangenter i dessa punkter skär varandra i punkten $(0;\ 3)$. Bestäm parabelns ekvation. (Nov. 48. 6. sp.k.)

214. Ekvationen $x^2 - 2xy + y^2 - 4x = 0$ betyder en parabel. Härled ekvationen för en tangent med given riktningskoefficient k, och använd resultatet för att bestämma riktningskoefficienten för parabelns axel. Beräkna därefter koordinaterna för parabelns vertex, och uppritа kurvan i stora drag. (Nov. 52. 6. sp.k.)

215. En parabel har sin brännpunkt i punkten $(0;\ 1)$ och går genom punkterna $(7;\ 0)$ och $(-1;\ 0)$. Sök ekvationerna för parabeln och dess styrlinje i de båda möjliga fallen. (Jan. 51. 6. sp.k.)

216. En parabel har fokus i origo och vertex på den räta linjen $x + 5y = 0$. Parabeln tangerar den räta linjen $x - y - 6 = 0$. Bestäm koordinaterna för tangeringspunkten. (Jan. 55. 6. sp.k.)

b) några bevis

217. Bevisa, att skärningspunkten mellan två tangenter till en parabel ligger på förlängningen av den diameter, som halverar kordan mellan tangeringspunkterna. (Nov. 49. 3. sp.k.)

218. En rätvinklig triangel är inskriven i en parabel så, att den räta vinkelns spets faller i parabelns topp. Visa att hypotenusan alltid skär parabelns axel i samma punkt. (Aug. 35. 9. R)

219. En rät linje genom brännpunkten F skär parabeln $y^2 = 4fx$ i punkterna A och B. Sträckorna FA och FB har längderna a respektive b. Bevisa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

(Aug. 53. 4. sp.k)

220. Två parabler, vilka vardera har parametern $4a$ och vilkas axlar är vinkelräta mot varandra, har en gemensam brännpunkt. Visa, att parablernas gemensamma korda går genom styrlinjernas skärningspunkt. Beräkna även den gemensamma kordans längd. (Jan. 43. 4. sp.k.)

221. Ett parallelltrapets bildas av vertextangenten till en parabel, en med denna parallell korda samt av de båda parabeltangenterna i kordans ändpunkter. Var och en av trapetsets diagonaler skär parabeln i ytterligare en punkt. Bevisa, att tangenterna i dessa punkter är parallella med diagonalerna. (Aug. 48. 4. sp.k.)

222. Bevisa, att den korda i en parabel, som går genom brännpunkten och är parallell med tangenten i en punkt P på parabeln, är fyra gånger så lång som brännpunktsradien till P. (Aug. 44. 6. sp.k.)

223. Två mot varandra vinkelräta tangenter till en parabel skär varandra i P. A är styrlinjens skärningspunkt med parabelns axel, F är parabelns brännpunkt. Visa, att tangenterna är inre och yttre bisektriser till vinkeln FPA. (Mars 41. 6. sp.k.)

224. Till en parabel är dragna två fasta tangenter, som i A och B skäres av en tredje rörlig tangent. Visa, att stycket AB synes under konstant vinkel från parabelns brännpunkt F. (Nov. 37. 6. sp.k.)

225. AB är en mot axeln vinkelrät korda i en parabel samt CD en annan korda, parallell med parabeltangenten i B. Visa, att kordorna AC och AD bildar lika stora vinklar med AB. (Aug. 37. 6. sp.k.)

226. Tangenterna i två punkter A och B på en parabel skär varandra i P. F är parabelns brännpunkt. Visa, att trianglarna APF och PBF är likformiga. (Jan. 43. 7. sp.k.)

227. I en parabel drages två parallella kordor, så att den ena blir normal till parabeln och den andra går genom parabelns brännpunkt. Visa, att den senare kordan är lika stor som den förras projektion på parabelns axel. (Mars 43. 7. sp.k.)

228. En cirkel O_1 går genom brännpunkten F till en parabel och tangerar parabeln i en punkt P_1. En annan cirkel O_2 tangerar cirkeln O_1 i punkten F samt parabeln i en punkt P_2. Visa, att vinkeln P_1FP_2 alltid har samma storlek. (Mars 52. 7. sp.k.)

229. Normalerna i två punkter, A och B, på en parabel skär varandra i en punkt C på parabeln. Visa, att den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln går genom parabelns vertex. (Jan. 45. 7. sp.k.)

c) maximi- och minimibestämningar

230. Beräkna det största möjliga värdet på den spetsiga vinkel, som en från en parabels topp dragen korda bildar med parabeltangenten i kordans andra ändpunkt. (H. 25. 5. R)

231. Tangenten och normalen i punkten P på parabeln $y^2 = 4ax$ råkar parabelns styrlinje i punkterna T och N resp. Bestäm punkten P så, att avståndet TN får sitt minsta värde. (V. 36. 7. R)

232. Hur nära styrlinjen till en parabel kan skärningspunkten mellan två inbördes vinkelräta normaler till parabeln komma? (Mars 53. 4. sp.k.)

233. Från en punkt P på linjen $y = x + 2a$ drages tangenterna PA och PB till parabeln $y^2 = 4ax$; A och B är tangeringspunkterna. Utred, hur vinkeln APB varierar, då P genomlöper den givna linjen i hela dess utsträckning. Det erfordras icke – men betraktas som en förtjänst – att grafiskt åskådliggöra, hur nämnda vinkel varierar. (Mars 50. 7. sp.k.)

d) en gränsvärdesbestämning

234. Normalen till parabeln $y^2 = 4ax$ i en punkt P på kurvan råkar axeln i punkten N och parabeln ytterligare i punkten Q. Undersök, om projektionen av sträckan NQ på parabelns axel närmar sig till ett gränsvärde, då punkten P avlägsnar sig obegränsat från origo. (Jan. 47. 6. sp.k.)

e) ortproblem

235. Ekvationen för en parabel är $x^2 = 2py$. Genom origo drages en korda och genom dennas mittpunkt diametern. Härled diameterns ekvation, och sök orten för skärningspunkten mellan diametern och en linje genom brännpunkten, vinkelrät mot kordan. (Nov. 44. 2. sp.k.)

236. I en punkt P på parabeln $y^2 = 12x$ drages normalen och tangenten. Dessa skär parabelns axel och dess förlängning i punkterna N respektive T. Sök och konstruera orten för tyngdpunkten i triangeln PNT. (Jan. 52. 2. sp.k.)

237. P är en rörlig punkt på parabeln $y^2 = 2px$, F är parabelns fokus. Sök och konstruera orten för mittpunkten M på sträckan FP, när P beskriver parabeln. Visa också, att tangenterna i P och M till respektive kurvor är parallella. (Mars 55. 2. sp.k.)

238. En kvadrat har hörnen i de fyra punkterna $(\pm a;\ \pm a)$. Sök och konstruera orten för medelpunkten i en cirkel, som samtidigt tangerar någon av kvadratens sidor, och den i kvadraten inskrivna cirkeln. Man bortser från cirklar, som har medelpunkten på någon av koordinataxlarna. (Jan. 48. 1. sp.k.)

239. Genom origo O i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje, som skär linjen $x = a$, där $a > 0$, i punkten A. Genom punkten $B\ (0;\ a)$ drages den mot OA vinkelräta linjen och genom A den med x-axeln parallella linjen. De båda sist dragna linjerna skär varandra i punkten P. Sök och konstruera orten för P, då linjen OA vrider sig kring origo. (Nov. 53. 2. sp.k.)

240. Genom den ena ändpunkten A av parametern till parabeln $y^2 = 4ax$ drages en rät linje, som skär parabeln ytterligare i punkten B. Diametern till kordan AB skär parabelns styrlinje i punkten C. Normalen från C mot AB skär AB i punkten P. Sök och konstruera orten för punkten P. (Mars 48. 3. sp.k.)

241. P är en rörlig punkt på parabeln $y^2 = 4ax$, och N är den punkt, där normalen genom P skär parabelaxeln. Q är skärningspunkten mellan parabelns axel och styrlinje. Sök orten för skärningspunkten mellan medianerna i triangeln PNQ. (Aug. 39. 4. sp.k.)

242. I en punkt P på en parabel drages normalen. Vinkelrätt mot denna drages från brännpunkten en linje, som skär normalen i Q. Sök och konstruera orten för Q, då P rör sig utefter parabeln. (Nov. 42. 6. sp.k.)

243. P är en godtycklig punkt på en given parabel. Genom dennas brännpunkt F drages en rät linje, som är parallell med parabeltangenten i P. Denna linje råkar diametern genom P i en punkt Q. Sök ekvationen för orten för mittpunkten av sträckan FQ. (H. 27. 5. R)

244. Genom en parabels vertex O drages en korda OP. Därpå drages den mot denna korda svarande diametern. Genom diameterns skärningspunkt med styrlinjen drages en normal mot OP. Sök orten för normalens fotpunkt. (H. 17. 8. R)

245. En fast linje L och en fast punkt A utanför denna är givna. Normalen från A mot linjen L skär denna i B. P är en godtycklig punkt på linjen L, och Q mittpunkten av PB. Sök orten för skärningspunkten mellan mittpunktsnormalerna till AP och AQ samt upprita denna. (Jan. 39. 5. sp.k.)

246. En parabel, vars axel är parallell med y-axeln, går genom punkterna $(2;\ 1)$ och $(0;\ 4)$. Bestäm orten för parabelns vertex, och konstruera ortkurvan med angivande av eventuella maxima, minima och asymptoter. (Jan. 42. 5. sp.k.)

247. Normalen i en punkt A på parabeln $y^2 = 4ax$ råkar vertextangenten i punkten B. Sök och konstruera i stora drag orten för mittpunkten på sträckan AB. (Aug. 50. 3. sp.k.)

248. Kordan AB i parabeln $y^2 = 4ax$ går genom parabelns brännpunkt. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan mittpunktsnormalen till AB och den med AB parallella parabeltangenten. (Jan. 46. 4. sp.k.)

249. Normalen i en punkt A på parabeln $y^2 = 4x$ skär x-axeln i B. P är skärningspunkten mellan parabeltangenten i A och den räta linje genom B, som är parallell med y-axeln. Sök orten för P, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, om man visar, att ortkurvan har den givna parabeln till asymptotkurva, dvs. obegränsat närmar sig densamma, när punkten A rycker allt längre bort. (Jan. 54. 5. sp.k.)

250. I en godtycklig punkt på parabeln $y^2 = 4ax$ drages tangenten och normalen. Även i normalens andra skärningspunkt med parabeln drages tangenten. Sök och konstruera i stora drag orten för skärningspunkten mellan de båda tangenterna. (Mars 49. 5. sp.k.)

251. En parabel, vars axel är parallell med y-axeln i ett koordinatsystem, tangerar den räta linjen $x + y = 0$. Sök och konstruera orten för parabelns brännpunkt, då dess vertex genomlöper båda grenarna av kurvan $xy = 1$. (Nov. 45. 6. sp.k.)

252. P är en godtycklig punkt på parabeln $y^2 = 4x$, vars vertex är O. Genom P drages en rät linje parallellt med x-axeln. Sök orten för medelpunkten till den cirkel, som tangerar den nämnda räta linjen, x-axeln och den räta linjen PQ. Ange även ortens utseende i huvuddrag. (Mars 45. 6. sp.k.)

253. En rätvinklig triangel med den räta vinkelns spets i punkten $(2; 2)$ är inskriven i parabeln $y^2 = 2x$. Sök och konstruera orten för mittpunkten på hypotenusan. (Aug. 49. 7. sp.k.)

f) en tillämpning på ekvationsläran

254. En metod att dela en given spetsig vinkel v i tre lika stora delar är följande. I en cirkel med medelpunkten O och radien 1 längdenhet avsättes en medelpunktsvinkel $= 2v$. Tillhörande korda AB är $2a$ längdenheter. I ett rätvinkligt koordinatsystem, där enheten på vardera axeln är 1 längdenhet, uppritas parabeln $y^2 = x$. En cirkel med medelpunkten i punkten $(2; -a)$ går genom origo och skär parabeln dessutom i tre andra punkter, av vilka den närmast vertex belägna har y-koordinaten y_1. I den ursprungliga cirkeln avsättes därefter en korda AD med längden y_1 längdenheter. Vinkeln AOD betecknas med $2u$. Visa, att $u = \frac{v}{3}$. (Aug. 55. 6. sp.k.)

Stereometri

a) allmänna problem (bl.a. ytan av zoner, volymen av sektorer och klotsegment)

255. En rät cirkulär cylinder, i vilken höjden är 25% kortare än diametern i en basyta, är inskriven i en sfär. Bestäm förhållandet mellan volymerna av de tre delar, i vilka sfären delas av cylinderns båda basytor. (Jan. 52. 1. sp.k.)

256. En sfärisk sektor delas medelst ett plan i ett sfäriskt segment och en rät cirkulär kon. Härigenom delas sektorns begränsningsyta mitt itu. I vilket förhållande delas dess volym? (Jan. 47. 1. a.k.)

257. I en godtycklig punkt på kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ drages tangenten, vilken med koordinataxlarna bildar en triangel. Visa, att volymen av den rotationskropp, som alstras, då denna triangel roterar kring x-axeln är konstant. (Nov. 52. 1. sp.k.)

258. En rät cirkulär kon är inskriven i en sfär med radien R. Beräkna konens höjd, om dess volym är lika stor som volymen av ett av de båda sfäriska segment, i vilka sfären delas av konens basyta. (Jan. 54. 2. a.k)

259. Med en sträcka AB som diameter uppritas en halvcirkel. På periferin bestämmes en punkt C, så att den delar bågen AB i förhållandet $2 : 1$. Från punkten C fälles normalen CD mot AB. Figuren får rotera kring AB. Därvid alstras två kroppar av de delar, i vilka halvcirkelns yta delas av sträckan CD. Bestäm förhållandet dels mellan volymerna, dels mellan de totala begränsningsytorna av dessa båda kroppar. (Jan. 51. 2. a.k.)

260. Volymen av en sfärisk sektor är $\frac{1}{5}$ av hela sfärens volym. I sektorn inskrives en ny sfär, så att den tangerar såväl sektorns sfäriska som dess koniska yta. Hur stor del av den ursprungliga sfärens volym utgör volymen av den nya sfären? (Mars 42. 3. a.k)

261. I ett sfäriskt segment har man inskrivit ett klot, som tangerar segmentets buktiga yta i en punkt samt dess plana yta i dennas medelpunkt. Det inskrivna klotets volym är en sjättedel av segmentets volym. Beräkna förhållandet mellan det inskrivna klotets yta och segmentets totala yta. (H. 28. 3. R)

262. I en rät cirkulär kon, vars sida är lika stor som basytans diameter, är en sfär inskriven. Bestäm förhållandet mellan volymerna av de båda delar av konen, som ligger utanför sfären. (Mars 55. 2. a.k.)

263. Ett klot skäres av ett plan i två delar, vilkas totala ytor förhåller sig som $5 : 8$. Beräkna förhållandet mellan delarnas volymer. (Jan. 43. 3. a.k.)

264. En sfärisk sektor, som är mindre än en halvsfär, kan uppdelas i ett sfäriskt segment och en kon. Förhållandet mellan volymerna av dessa delar, tagna i nyss nämnd ordning, är $5 : 3$. Bestäm förhållandet mellan sektorns sfäriska och koniska ytor. (Mars 40. 4. a.k.)

265. Två plan skär varandra längs en tangent till ett klot och delar klotets yta i tre delar, som i ordning förhåller sig som $1 : 3 : 1$. Bestäm vinkeln mellan planen. (Aug. 54. 4. a.k.)

266. Kring ett klot omskrives en rät cirkulär kon. Genom den cirkel, längs vilken klotet tangerar konens mantelyta, lägges ett plan. Detta delar klotet i två segment, vilkas volymer förhåller sig som 5 : 27. Bestäm konens toppvinkel. (Nov. 47. 4. a.k.)

267. En sfär delas av ett plan i två segment, vilkas totala begränsningsytor förhåller sig som 1 : 2. Bestäm det exakta värdet av förhållandet mellan segmentens volymer, förenkla det så långt som möjligt, och beräkna det därefter approximativt. (Jan. 53. 4. a.k.)

268. Av en pyramid, vars höjd är 12 cm och basyta 48 cm^2, skall genom två med basytan parallella plan utskäras en skiva med tjockleken 3 cm och volymen 31 cm^3. Beräkna planens avstånd från pyramidens topp. (Mars 41. 3. a.k.)

269. En skål har formen av ett sfäriskt segment, vars höjd är lika med halva radien i sfären. I skålen nedlägges fyra lika stora klot, av vilka vart och ett tangerar två av de övriga. Skålens plana lock tangerar alla fyra kloten. Hur stor del av skålens volym upptages av de fyra kloten? (Nov. 45. 6. a.k.)

270. En parallellt stympad rät cirkulär kon är omskriven kring en sfär och inskriven i en annan sfär. Förhållandet mellan den stympade konens mantelyta och den mindre sfärens yta är 25 : 16. Bestäm förhållandet mellan den stympade konens mantelyta och den större sfärens yta. (Mars 43. 6. a.k.)

271. I en parallellt stympad rät cirkulär kon är basytornas radier R och r samt höjden h. Genom konens axel lägges tre plan, som uppdelar den stympade konen i sex kongruenta delar. I var och en av dessa kan man inskriva ett klot, som tangerar de fem begränsningsytorna, under förutsättning att ett visst samband råder mellan storheterna R, r och h. Bestäm detta samband. (Aug. 54. 8. a.k.)

272. En dubbelkon består av två kongruenta räta cirkulära koner med gemensam basyta. Dubbelkonen delas genom två mot dess axel vinkelräta plan i tre delar, vilka har lika stora volymer och lika stora totala begränsningsytor. Bestäm konernas toppvinkel. (Nov. 4. 8. a.k.)

273. Mantelytan i en rät cirkulär kon tangeras av en, oändlig följd av varandra successivt tangerande sfärer med medelpunkter på konens höjd. Den första sfären tangerar även konens basyta. Visa, att förhållandet mellan summan av alla sfärernas volymer och konens volym alltid är mindre än $2/3$. (Jan. 46. 8. a.k.)

274. En tetraeders begränsningsytor utgöres av kongruenta trianglar med sidorna 13 cm, 14 cm och 15 cm. Bestäm tetraederns volym. (Aug. 52. 8. a.k.)

275. En regelbunden tresidig pyramid är omskriven kring en sfär med radien 2 cm och inskriven i en sfär med radien 7 cm. Beräkna radien i den sfär, som tangerar basytan och sidoytornas förlängningar (en av de s.k. vidskrivna sfärerna). (Mars 53. 7. a.k.)

b) extremvärdesproblem

276. Bestäm höjden i den räta cirkulära cylinder med största möjliga volym, vars hela yta är lika med ytan av en sfär med radien r. (V. 19. 5. R)

277. En cirkelsektor med given radie och trubbig medelpunktsvinkel roterar kring en av sina begränsningsradier. För vilken medelpunktsvinkel får den därvid alstrade rotationskroppen så stor yta som möjligt? (Aug. 52. 1. sp.k.)

278. I flera länder finns särskilda bestämmelser om postpakets maximalstorlek. Det engelska postverket tillämpar följande bestämmelse. Man mäter omkretsen av paketets basyta och lägger därtill paketets höjd. Den så erhållna summan får ej överstiga 6 fot. Hut stor blir den största tillåtna volymen av ett paket, om dettas begränsningsytor antages vara rektanglar? (Lämpligen bestämmes först förhållandet mellan basytans sidor.) (Jan. 49. 3. sp.k.)

279. Vilken bland alla räta, cirkulära, stympade koner, som kan omskrivas kring en given sfär, har den minsta buktiga ytan. (V. 20. 6. R)

280. Spetsen i en rät cirkulär kon med konstant sida tages till medelpunkt för en sfär, som tangerar konens basyta. När konens höjd varierar, antar volymen av den inom konen belägna delen av sfären olika värden. Hur stor är konens toppvinkel, när den nämnda volymen antar sitt största värde? (Nov. 49. 6. a.k.)

281. Avståndet mellan två fasta punkter O och P är a. Punkten O tages till medelpunkt för en sfär med variabel radie och punkten P till spets för en rät cirkulär konisk yta, som tangerar sfären utefter en cirkel. Bestäm sfärens radie, så att den del av konen, som ligger mellan den koniska och den sfäriska ytan, får så stor volym som möjligt. (Nov. 46. 5. a.k.)

282. Två punkter, A och B, på jordytan är belägna diametralt motsatt varandra på samma nordliga latitud. För den som skall flyga från A till B blir vägen kortare, om han följer storcirkeln över nordpolen, än om han följer parallellcirkeln. Ange på vilken latitud A och B skall ligga, för att skillnaden i flygväg skall vara så stor som möjligt. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man grafiskt åskådliggör, hur den nämnda skillnaden varierar, när latituden ändras. (Mars 56. 4. sp.k.)

283. I en cirkel med radien 1 dm drages en diameter. Dess ena ändpunkt tages till medelpunkt för en annan cirkel, som skär den förra cirkeln i punkterna A och B och diametern i C. Kordan AB drages. Cirkelsegmentet $ABCA$ får rotera kring den nämnda diametern, varvid ett sfäriskt segment uppstår. Bestäm radien i den sist uppritade cirkeln, när volymen av det sfäriska segmentet uppnår sitt största värde. (Mars 54. 5. a.k.)

284. En sfärisk sektor är inskriven i ett klot med radien r, så att dess medelpunkt ligger på det givna klotets yta. Bestäm den sfäriska sektorns totala yta, då dess volym är så stor som möjligt. (Nov. 42. 6. a.k.)

285. En rät cirkulär kons mantelyta är lika stor som ytan av en cirkel med radien a. I konen inskrives en sfär. Bestäm sfärens radie, då den är så stor som möjligt. (Aug. 48. 3. sp.k.)

286. I en given klotsektor är medelpunktsvinkeln 120°. I sektorn inskrives en rät cirkulär cylinder, vars axel faller utefter sektorns symmetrilinje och vars buktiga yta är så stor som möjligt. Bestäm förhållandet mellan denna cylinders basradie och höjd. (Mars 54. 5. sp.k.)

287. Ett bussbolag befordrade med sina personbussar även styckegods men endast sådant, som icke hade alltför stora dimensioner. Sålunda fick en låda i form av en rätvinklig parallellepiped vara högst 1 m längs någon kant. För att med en av bolagets bussar kunna sända en 1,20 m lång, rak och smal glasstång tillverkade man en dylik låda med exakt 1 m längd och 1,20 m (rymd) diagonal. Övriga kantlinjer hos lådan bestämdes så, att volymen blev så stor som möjligt. Man fann då, att lådans totala begränsningsyta samtidigt blev så stor som möjligt. Bevisa detta och beräkna lådans kantlinjer. Till väggarnas tjocklek tages ingen hänsyn. (Nov. 50. 7. sp.k.)

288. En klotsektors spets och den cirkel, som begränsar dess sfäriska och koniska ytor, ligger på ytan av en given sfär med radien a. Sök maximum av sektorns volym. (Nov. 40. 5. sp.k.)

289. En halvsfär med radien R skäres av ett plan, som är parallellt med halvsfärens plana begränsningsyta. Den erhållna skärningsytan utgör den plana begränsningsytan av ett sfäriskt segment, som tangerar halvsfärens plana begränsningsyta. Hur stor är detta segments höjd, då dess volym är så stor som möjligt? (Aug. 48. 6. a.k.)

290. Av en given sfär utskäres en sfärisk sektor, och i denna inskrives en sfär. Denna tangerar sektorns koniska yta utefter en cirkel. Hur stor del av sektorns koniska yta utgör den av densamma genom cirkeln avskurna koniska mantelytan, då denna är så stor som möjligt? (Nov. 43. 2. sp.k.)

291. I ett klot med radien r inskrives en rät cirkulär cylinder. Vilken är dennas höjd, när dess totala begränsningsyta är så stor som möjligt? (Aug. 51. 6. sp.k.)

292. Kring ett halvklot med radien r omskrives en parallellt stympad rät cirkulär kon, så att dennas ena basyta och halvklotets plana yta ligger i samma plan. Bestäm det minsta värde, som den stympade konens totala yta kan anta. (Nov. 51. 5. sp.k.)

293. I ett sfäriskt segment är höjden 6 cm och den sfäriska ytans radie 7 cm. I detta segment inskrives ett annat sfäriskt segment, så att dess sfäriska yta tangerar det första segmentets plana yta i mittpunkten och dess plana begränsningsytas omkrets ligger på det första segmentets sfäriska yta. Sök den största volym, som det inskrivna segmentet kan anta. (Mars 47. 6. a.k.)

294. I en sfärisk sektor, vars medelpunktsvinkel är mindre än 180°, inskrives en rät kon, som har sin spets i kalottens mittpunkt, höjden utefter en radie i sektorn och basytans omkrets på sektorns koniska yta. Hur stor är sektorns medelpunktsvinkel, när volymen av den största inskrivna konen är 1/6 av sektorns volym? (Mars 51. 6. sp.k.)

295. Omkring ett givet halvklot omskrives en regelbunden tresidig pyramid, så att halvklotets plana yta och pyramidens basyta ligger i samma plan. Hur stor vinkel bildar sidoytorna med basytan, då pyramidens totala yta är så liten som möjligt? (Aug. 42. 6. sp.k.)

296. Två punkter på jordytan är rörliga längs var sin meridian. De har samma latitud, medan deras longitudskillnad är 90°. När latituden varierar, antar skillnaden mellan punkternas avstånd längs parallellcirkeln och deras avstånd längs storcirkeln genom punkterna olika värden. Bestäm den latitud, för vilken den nämnda skillnaden blir så stor som möjligt, och beräkna detta maximivärde. Jorden antas vara en sfär med radien 637 mil. (Nov. 47. 7. sp.k.)

297. I en given rät cirkulär kon är ett klotsegment inskrivet, så att dess plana yta ligger i konens basyta och dess sfäriska yta tangerar konens mantelyta. Visa, att segmentets sfäriska yta icke kan vara större än hälften av konens totala yta. Diskussion av möjlighetsvillkoret för att segmentets sfäriska yta skall bli lika med hälften av konens totala yta, erfordras icke men betraktas som en förtjänst. (Mars 50. 6. a.k.)

c) några variationsbeskrivningar

298. Ett klotsegments kalott är 16 cm^2. Vilken form skall segmentet ha, för att dess volym skall vara så stor som möjligt, och hur stor är då volymen? Undersök därjämte och åskådliggör grafiskt, hur segmentets volym varierar, när dess höjd ändras. (Mars 56. 7. a.k.)

299. Ett halvklot med radien R ligger med sin plana yta på ett bord och skäres av ett plan, parallellt med bordsskivan, så attr en klotskiva erhålles. På skivans övre plana yta placeras en regelbunden tetraeder $ABCD$ av sådan storlek, att hörnen i basytan ABC kommer att ligga på periferin. Undersök, hur avståndet från tetraederspetsen D till bordsskivan varierar med klotskivans tjocklek, och ange särskilt detta avstånds största och minsta värde. (Mars 47. 3. sp.k.)

300. En parallelltransversal i triangeln ABC skär sidorna AB och AC i D och E och höjden AM i N. Punkten P är belägen på normalen till triangelns plan i höjdens fotpunkt M. Sträckorna MA och MN synas från P under vinklarna v respektive x. Uttryck förhållandet mellan ytorna av trianglarna PDE och PBC som funktion av x, och bestäm villkoret för att denna funktion skall ha ett maximum eller minimum, då x varierar mellan 0 och v. (Nov. 45. 7. sp.k.)

301. I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är höjden h och basytans diagonal $6h$. Ett plan lägges genom pyramidens topp, parallellt med basytans ena diagonal. Undersök, hur ytan av den inom pyramiden belägna delen av detta plan varierar, då planet vrider sig kring toppen, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. (Mars 45. 7. a.k.)

302. En kropp består av två halvklot, vilka placerats så att de plana begränsningsytorna ligger mot varandra och medelpunkterna sammanfaller. Kroppens totala begränsningsyta är $12\pi a^2$, där a är en konstant. Mellan vilka gränser kan det större halvklotets radie variera? Undersök och åskådliggör i ett diagram, hur därvid den sammansatta kroppens volym varierar. (Jan. 48. 6. sp.k.)

303. Genom en diagonal i en kub med kantlinjen a lägges ett plan. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av den inom kuben belägna delen av detta plan varierar, då skärningspunkten mellan planet och en av kubens kantlinjer genomlöper denna kantlinje. (Nov. 44. 6. a.k.)

304. En rät cirkulär cylinder har volymen 3 volymsenheter och höjden 1 längdenhet. Genom en punkt P på cylinderns axel eller dennas förlängning drages en rät linje till en punkt Q på omkretsen av cylinderns ena basyta B. Vid rotation kring cylinderns axel alstrar linjen PQ, obegränsat utdragen åt båda hållen, mantelytan till en dubbelkon. Studera och åskådliggör grafiskt, hur volymen (y) av den del av dubbelkonen, som faller inom cylindern, varierar, då avståndet (x) mellan punkten P och basytan B ändras. (Nov. 41. 7. sp.k.)

305. I en sfär med medelpunkten O och radien 1 längdenhet är AB en diameter. Utefter AB lägges en koordinataxel med O som origo, så att punkten A får koordinaten $x = 1$. En rät cirkulär dubbelkon[2] med toppvinkeln 60° lägges med axeln utefter AB, så att dubbelkonens spets faller i en punkt P med koordinaten x på AB eller dess förlängning. Uttryck som funktion av x den del av den koniska ytan, som faller inom sfären. Studera denna funktion, och bestäm dess eventuella maxima och minima. Upprita slutligen den motsvarande kurvan. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man närmare undersöker funktionen och dess kurva för värdena $x = \pm 1$. (Mars 56. 7. sp.k.)

306. På ett horisontellt plan har man bredvid varandra placerat ett klot och en rät cirkulär kon med axeln vertikal. Klotets radie är R, konens höjd $2R$. Man skär de båda kropparna med ett rörligt plan, parallellt med det förra och på avståndet x från detta. Bestäm summan av de båda snittytorna som funktion av x, och undersök, för vilka värden på konens toppvinkel denna funktion antar maximum eller minimum i intervallet $0 < x < 2R$. (Nov. 53. 8. a.k.)

307. I en rät cirkulär kon är basradien 1 cm och höjden h cm, där h är en konstant. I konen inskrives en rät cirkulär cylinder med axeln utefter konens höjd. Cylinderns basradie är x cm och dess totala begränsningsyta är y cm^2. Bestäm y som funktion av x. Undersök därefter för olika värden på h, hur den nämnda ytan varierar, då x genomlöper de värden, som x kan anta, och åskådliggör detta i ett och samma koordinatsystem. Bestäm särskilt eventuella maximi- och minimipunkter och de h-värden, för vilka dylika kan förekomma. Beskriv slutligen med ledning av undersökningen och kurvorna, hur den ifrågavarande ytan varierar för olika värden på h. (Mars 53. 8. a.k.)

Ellipsen

a) allmänna problem

308. Visa, att de tangenter till ellipsen $2x^2 + 6y^2 = 3$, som går genom punkten $(1;\ 1)$, är vinkelräta mot varandra. (Mars 53. 1. sp.k)

309. Kring ellipsen $16x^2 + y^2 = 16$ omskrives en liksidig triangel, vars ena sida är parallell med ellipsens längsta axel. Beräkna triangelsidans längd. (V. 26. 1. R)

310. Under vilka vinklar skär kurvorna $x^2 + 3y^2 = 4$ och $3x^2 + y^2 - 4y = 0$ varandra? (Jan. 54. 1. sp.k.)

311. Två kongruenta ellipser har samma medelpunkt, och deras storaxlar är vinkelräta mot varandra. Kurvorna skär varandra under 60° vinkel. Bestäm deras excentricitet. (Nov. 45. 1. sp.k.)

[2] En dubbelkon av detta slag uppstår, om två varandra skärande räta linjer roterar kring en bisaektris till en av de vinklar, som bildas av dem.

312. [3] Upprita kurvorna $y^2 = 4x$ och $x^2 + y^2 + 2x = 0$, och bestäm ekvationerna för deras gemensamma tangenter. (Mars 54. 2. sp.k.)

313. I en ellips, vars storaxel AA' är parallell med x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, har ändpunkten P av en parameter sammanbundits med punkterna A och A'. Visa, att den ena av linjerna PA och PA' har en riktningskoefficient (vinkelkoefficient) som är två enheter större än den andras. (Nov. 55. 1. sp.k.)

314. Från ena ändpunkten av storaxeln i en ellips syns parametrarna under synvinklarna $2u$ och $2v$ samt lillaxeln under synvinkeln $2w$. Bevisa sambandet

$$\tan^2 w = \tan u \cdot \tan v. \qquad \text{(Jan. 52. 1. sp.k)}$$

315. Hur stor är excentriciteten för en ellips, om den vinkel, under vilken en halvparameter synes från ellipsens medelpunkt, är lika stor som den spetsiga vinkel, som tangenten i en ändpunkt av en parameter bildar med storaxelns förlängning? (Nov. 50. 1. sp.k.)

316. I en ellips sammanbindes en parameters ena ändpunkt P med storaxelns ändpunkter A och B. Vinkeln APB är $105°$. Bestäm ellipsens excentricitet. (Jan. 45. 1. sp.k.)

317. I en ellips med excentriciteten $\sqrt{6}/3$ ligger medelpunkten i origo och storaxeln längs x-axeln. Ellipsen skäres av cirkeln $x^2 + y^2 = 36$, så att skärningspunkterna bildar hörnen i en kvadrat. Sök ellipsens ekvation. (Jan. 42. 1. sp.k.)

318. En ellips är inskriven i en kvadrat, så att axlarna faller utefter diagonalerna och tangeringspunkterna delar kvadratens sidor i förhållandet $1 : 3$. Hur stor del av kvadratens yta upptar ellipsen? (Aug. 45. 1. sp.k.)

319. Från vilka punkter på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 6$ synes avståndet mellan ellipsens brännpunkter under en vinkel av $60°$? (Aug. 41. 1. sp.k.)

320. Bestäm den spetsiga vinkeln mellan de gemensamma tangenterna till parabeln $y^2 = 4ax$ och ellipsen $x^2 + 4y^2 = 8a^2$. (Jan. 41. 2. sp.k.)

321. Bevisa, att ellipsen $2x^2 + y^2 = A$ och parabeln $y^2 = Bx$ skär varandra under räta vinklar, oberoende av värdena på konstanterna A och B. (Mars 42. 3. sp.k.)

322. Normalen i ena ändpunkten av en parameter i en ellips går genom den mindre axelns ena ändpunkt. I vilket förhållande delas normalens inom ellipsen belägna del av den större axeln? (Nov. 49. 2. sp.k.)

323. Normalen och tangenten i en punkt på en ellips skär storaxeln och dess förlängning i punkterna N respektive T. Sträckan NT delas i tre lika stora delar av en brännpunkt och storaxelns ena ändpunkt. Beräkna ellipsens excentricitet. (Nov. 48. 1. sp.k.)

324. AB är lillaxeln i en ellips, F är ena brännpunkten och O medelpunkten. Förlängningen av den räta linjen AF skär ellipsen i ytterligare en punkt P. Ellipsens normal i P delar sträckan OF mitt itu. Beräkna ellipsens excentricitet. (Aug. 46. 3. sp.k.)

[3] Bör följa efter uppg. 202.

325. En ellips, vars brännpunkter ligger på y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, tangeras av de räta linjerna $2x+y-6 = 0$ och $2x+y+4 = 0$. Avståndet mellan brännpunkterna är lika stort som avståndet mellan de givna tangenterna. Sök ellipsens ekvation. (Nov. 54. 4. sp.k.)

326. I ändpunkterna av parametrarna i ellipserna $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, där a är konstant men b kan ha olika värden mindre än a, drages tangenterna. Dessa går alltid genom den ena eller den andra av två bestämda punkter. Vilka är dessa? (Mars 49. 2. sp.k.)

b) några bevis

327. Visa, att det segment, som ur en godtycklig tangent till en ellips utskäres av vertextangenterna, från en brännpunkt synes under rät vinkel. (V. 22. 7. R)

328. Genom en punkt P på en ellips drages kordorna PR och PS parallellt med ellipsens axlar. Visa, att ellipsnormalen i P delar diametern RS i två delar, vilkas förhållande är oberoende av P:s läge på ellipsen. (Mars 50. 1. sp.k.)

329. En cirkel med radien a är uppritad i ett plan L. Genom en diameter AB i cirkeln lägges ett plan M, som bildar vinkeln v med planet L. P är en godtycklig punkt på cirkeln, Q är projektionen av P i planet M. Visa, att orten för Q blir en ellips. Bestäm dess ekvation, och undersök, hur dess excentricitet beror av vinkeln v. (Jan. 44. 3. sp.k.)

330. I en ellips är inskrivna dels den romb, som har hörnen i axlarnas ändpunkter, dels en godtycklig rektangel. Visa, att om man i rektangeln inskriver en ellips, vars axlar faller utefter den givna ellipsens, så tangerar denna ellips även rombens axlar. (Mars 52. 1. sp.k.)

331. En cirkel tangerar en ellips i storaxelns ändpunkter. På ellipsen är P en godtycklig punkt. En parabel har sin brännpunkt i P och går genom ellipsens brännpunkter. Visa, att parabelns styrlinje tangerar den nämnda cirkeln. (Jan. 44. 7. sp.k.)

c) några extremvärden

332. I en ellips är storaxeln konstant. Visa, att största möjliga värde av skillnaden mellan halva parametern och avståndet från en brännpunkt till närmaste vertex är 1/8 av storaxeln. (Nov. 42. 1. sp.k.)

333. I en ellips inskrives en fyrhörning på så sätt, att dess hörn blir belägna i axlarnas ändpunkter. I ellipsen drages en korda parallellt med ellipsens mindre axel, som är $2b$. Bestäm längden av denna korda i det fall, då summan av dess utanför fyrhörningen belägna delar är så stor som möjligt. (Mars 44. 2. sp.k.)

334. En triangel har två hörn i punkterna (10; 0) och (0; 5) och det tredje på ellipsen $x^2 + 3y^2 = 21$. Bestäm det minsta värde, som triangelns yta kan anta. (Aug. 47. 4. sp.k.)

335. I en ellips drages en korda från lillaxelns ena ändpunkt genom en av brännpunkterna. Bestäm ellipsens excentricitet, då den diameter, som halverar kordan, bildar så stor spetsig vinkel som möjligt med ellipsens storaxel. (Aug. 52. 4. sp.k.)

336. AB är en fix korda i en ellips, C en rörlig punkt på ellipsens omkrets. Av de trianglar ABC, som ligger på ena sidan om AB, har ABC_1 den största ytan, och av dem, som ligger på den andra sidan, är ABC_2 den största. Bevisa, att linjen C_1C_2 är diameter i ellipsen och delar AB mitt itu. (Nov. 40. 7. sp.k.)

337. Ange excentriciteten för den största ellips, i vilken summan av storaxeln och ena parametern är konstant. (Aug. 53. 2. sp.k.)

338. Giv ekvationen för den ellips, som tangerar y-axeln och linjen $\frac{x}{h} + \frac{y}{l} = 1$, $(h > 0)$, har ena axeln utefter positiva x-axeln och omsluter största möjliga yta. (V. 39. 7. sp.k.)

339. En triangel bildas av koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem jämte den räta linjen $x + 2y = 4$. En ellips, vars axlar är parallella med koordinataxlarna, är inskriven i triangeln. Visa, att om ellipsens yta är den största möjliga, så delas hypotenusan mitt itu av motsvarande tangeringspunkt.

d) ortproblem

340. Vilken kurva beskrives av en punkt, som rör sig i ett rätvinkligt axelsystems plan på det sätt, att dess avstånd till y-axeln alltid är dubbelt så stort som dess avstånd till punkten $(1;\ 0)$? (H. 21. 2. R)

341. En punkt rör sig i ett koordinatsystem, så att dess avstånd från x-axeln är dubbelt så stort som des avstånd från en given punkt $(a;\ b)$ i första kvadranten. Orten för den rörliga punkten är en andragradskurva. Bestäm dennas ekvation och excentricitet. (Jan. 53. 1. sp.k.)

342. Sök och konstruera orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ innantill och går genom punkten $(0;\ 2)$. (Nov. 50. 5. sp.k.)

343. På en rörlig korda OP i en parabel med toppen O tages en punkt Q, som ligger på samma avstånd från P och från skärningspunkten mellan parabelns axel och tangenten i punkten P. Sök orten för Q. (Mars 37. 5. sp.k.)

344. I en ellips drages en godtycklig diameter och dennas konjugatdiameter. Från brännpunkterna fälles normalerna mot den förstnämnda diametern. Visa, att skärningspunkterna mellan dessa normaler och den dragna konjugatdiametern alltid ligger på var sin bestämda räta linje, och ange dessa linjers ekvationer. (Mars 47. 1. sp.k.)

345. Punkten P ligger på en ellips, vars ena brännpunkt är F. Ellipsnormalen i P skär den mindre axeln eller dess förlängning i N. Genom P drages en linje parallellt med den större axeln. Sök orten för skärningspunkten mellan denna linje och linjen FN. (Mars 42. 4. sp.k.)

346. I en likbent triangel är basen bestämd till längd och läge medan de lika sidorna varierar. Sök och upprita geometriska orten för skärningspunkten mellan höjden mot den ena av de lika sidorna och medianen mot den andra. (Aug. 51. 3. sp.k.)

347. En sträcka med längden 1 längdenhet glider med sin ena ändpunkt på linjen $y = kx$ och med den andra på linjen $y = -kx$. Sök orten för sträckans mittpunkt och visa, att den yta, som ortkurvan omsluter, är oberoende av k. (Mars 43. 3. sp.k.)

348. En sträcka AB delas av punkten P i två delar, med längderna a och b. Sträckan AB rör sig så, att punkterna A och B hela tiden glider utefter en sluten kurva K, som inte skär sig själv. Punkten P antas därvid beskriva en sluten kurva K', som inte skär sig själv och som inte till någon del ligger utanför K. Man kan då visa, att den yta, som ligger mellan de båda kurvorna, alltid är πab. Visa detta för det fall, då K är en rektangel, vars sidor är $\geq a + b$. (Jan. 56. 6. sp.k.)

Hyperbeln

a) allmänna problem

349. Bestäm ekvationen för den diameter till hyperbeln $5x^2 - 2y^2 = -3$, som delar kordor, parallella med linjen $3x + 2y = 0$ mitt itu. (V. 25. 1. R)

350. Från punkten $(3;\ \frac{22}{3})$ drages brännpunktsradierna till hyperbeln $16x^2 - 9y^2 + 32x + 12y + 156 = 0$. Sök längden av dessa radier. (Aug. 46. 1. sp.k.)

351. Brännpunkterna till hyperbeln $16x^2 - 9y^2 - 192x - 36y + 684 = 0$ sammanbindes med origo. Beräkna ytan av den fyrhörning, som begränsas av dessa sammanbindningslinjer och hyperbelns asymptoter. (Jan. 42. 2. sp.k.)

352. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av x-axeln och asymptoterna till hyperbeln $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$. (Aug. 40. 2. sp.k.)

353. Genom punkten $(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$ drages i hyperbeln $x^2 - 3y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ en korda, som delas mitt itu i punkten. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av kordan och tangenterna till hyperbeln i kordans ändpunkter. (Aug. 44. 4. sp.k.)

354. Brännpunktsradierna till en viss punkt på en hyperbel är vinkelräta mot varandra, och tangenten i denna punkt bildar 60° vinkel med transversalaxeln. Sök hyperbelns excentricitet. (Mars 52. 3. sp.k.)

355. Till en hyperbel med transversalaxeln utefter y-axeln är linjerna $4x - 3y = 0$ och $21x - 20y = 0$ konjugatdiametrar och linjen $21x - 20y + 17 = 0$ tangent. Bestäm hyperbelns ekvation. (Jan. 53. 4. sp.k.)

356. En ellips tangerar en liksidig hyperbel i dess vertices. Ellipsen skär konjugathyperbeln till den givna hyperbeln under räta vinklar. Beräkna ellipsens excentricitet. (Jan. 55. 3. sp.k.)

357. En hyperbel har brännpunkterna i $(5;\ 0)$ och $(-5;\ 0)$ samt tangerar linjen $2x + 3y + 3 = 0$. Bestäm hyperbelns ekvation och tangeringspunktens koordinater. (Aug. 37. 2. sp.k.)

358. Bestäm ekvationen för den hyperbel, vars asymptoter representeras av ekvationen $9x^2 - 16y^2 = 0$ och som går genom punkten $(4;\ 1)$. (Aug. 39. 1. sp.k.)

359. Den ena parametern i en hyperbel är parameter även i en parabel, som tangerar hyperbelns andra gren. Beräkna vinkeln mellan hyperbelns asymptoter. (Mars 43. 1. sp.k.)

360. Den ena parametern i en hyperbel är även parameter i en parabel, vars vertex ligger i hyperbelns medelpunkt. Bestäm hyperbelns excentricitet. (Nov. 55. 2. sp.k.)

361. Två konjugatdiametrar till en hyperbel, vars axlar är parallella med koordinataxlarna, är $3x + 2y + 1 = 0$ och $3x + 8y - 23 = 0$. Linjen $x - 4y + 3 = 0$ tangerar hyperbeln. Sök dennas ekvation. (Nov. 47. 4. sp.k.)

362. En hyperbel har transversalaxeln parallell med y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Dess medelpunkt ligger i punkten $(4;\ 4)$, dess ena asymptot går genom origo, och dess ena vertex (topp) har ordinatan 5. Ange ekvationerna för de tangenter till denna hyperbel, som kan dragas från punkten $(0;\ 3)$. (Aug. 53. 3. sp.k.)

363. Asymptoterna till hyperbeln $b^2x^2 - a^2(y - b)^2 = a^2b^2$ tangerar ellipsen $b^2x^2 + a^2(y + b)^2 = a^2b^2$. Bestäm excentriciteten för var och en av de båda kurvorna. (Mars 51. 4. sp.k.)

364. En cirkel tangerar en given hyperbels transversalaxel i dess mittpunkt och hyperbeln i ena ändpunkten av en parameter. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter. (Jan. 44. 4. sp.k.)

365. Bestäm ekvationen för den parabel, som har sin axel längs x-axeln och tangerar hyperbeln $3x^2 - y^2 = 3$ i ändpunkterna av dess parameter genom högra brännpunkten. (Aug. 41. 3. sp.k.)

366. Förlängningarna av en rektangels sidor tangerar hyperbeln $4x^2 - 9y^2 = 36$. En sida i rektangeln är 2 längdenheter. Hur stora är de övriga? (Jan. 49. 2. sp.k.)

367. Två kongruenta hyperbler i samma plan har gemensam medelpunkt och vinkeln mellan deras transversalaxlar är rät. Kurvorna skär varandra under 45° vinkel. Bestäm deras excentriciteter. (Mars 55. 3. sp.k.)

368. En hyperbel har medelpunkten i origo och transversalaxeln längs x-axeln. Diametern $x + 3y = 0$ och dess konjugatdiameter bildar 45° vinkel med varandra. Bestäm hyperbelns excentricitet. (Mars 49. 3.p.k.)

369. I var och en av två konjugathyperbler drages en parameter. Med dessa parametrar som diametrar uppritas två cirklar. Dessa skär varandra under räta vinklar. Bestäm hyperblernas excentriciteter. (Aug. 51. 4. sp.k.)

370. Ekvationen $3x^2 - 4y^2 + 6x + 36y + m = 0$ betyder för olika värden på konstanten m en kurva, som i allmänhet är en hyperbel. Diskutera kurvans utseende för olika värden på m, och ange det samband, som måste finnas mellan två m-värden, m_1 och m_2, för att motsvarande kurvor skall vara konjugathyperbler. (Nov. 54. 6. sp.k.)

371. En hyperbels vertices är A och B; M är en godtycklig punkt på hyperbeln. Genom A drages två räta linjer, som är parallella med varsin av asymptoterna. Dessa skär linjen MB i punkterna P och Q. Visa, att $PM = MQ$. (Mars 57. 5. sp.k.)

372. Hyperblerna $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och $xy = k^2$ skär varandra under räta vinklar. Hur stor vinkel bildar den förra hyperbelns asymptoter med varandra? (Nov. 40. 4. sp.k.)

373. Härled ekvationen för diametern till kordor med given vinkelkoefficient i hyperbeln $xy = a^2$. Visa, att denna diameter även är diameter till kordor med samma vinkelkoefficient i hyperbeln $xy = -a^2$. Bestäm därefter ytan av en triangel, där ett par konjugatdiametrar råkar de båda hyperblerna. (Mars 46. 5. sp.k.)

374. Ekvationen $3xy-4y^2-6y-9 = 0$ betyder en hyperbel. Sök ekvationen för diametern till de kordor i denna hyperbel, vilkas riktningskoefficient är k. Använd den erhållna ekvationen för att bestämma medelpunktens koordinater samt ekvationerna för kurvans symmetriaxlar och asymptoter. (Mars 45. 7. sp.k.)

b) några bevis

375. Tangenterna till en hyperbel i den ena parameterns ändpunkter skär en av asymptoterna i punkterna A och B. Visa, att sträckan AB:s projektion på konjugataxeln är lika lång som parametern. (Mars 54. 1. sp.k.)

376. Bevisa, att normalen från fokus mot asymptoten i en hyperbel är lika med halva konjugataxeln. (H. 15. 3. R)

377. Bevisa, att en hyperbel är liksidig, om den cirkel, som uppritas med ena parametern som diameter, tangerar asymptoterna. (Jan. 51. 1. sp.k.)

378. Från en punkt P på x-axeln kan man draga tangenter til ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{p^2} = 1$ eller till hyperbeln $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{q^2} = 1$. Sammanbindningslinjen mellan tangeringspunkterna skär x-axeln i punkten Q. Visa, att den för de båda kurvorna gemensamma axeln i båda fallen delas harmoniskt av P och Q. (Nov. 43. 1. sp.k.)

379. En ellips och en hyperbel har gemensamma brännpunkter och parametrar. Visa, att den ena kurvans excentricitet är det inverterade värdet av den andras. (Mars 46. 1. sp.k.)

380. En cirkel inskrives i den triangel, som bildas av båda asymptoterna och ena vertextangenten till en hyperbel. Visa, att denna cirkels radie är lika stor som det stycke av den utdragna parametern, som ligger mellan asymptoten och hyperbeln. (Mars 42. 2. sp.k.)

381. En brännpunktsradie till hyperbeln $b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$ tages till diameter i en cirkel. Visa, att denna cirkel tangerar cirkeln $x^2+y^2 = a^2$. (Aug. 54. 3. sp.k.)

382. P är en godtycklig punkt på en hyperbel med brännpunkterna F_1 och F_2. Bevisa, att medelpunkten för den i triangeln PF_1F_2 inskrivna cirkeln ligger på en av vertextangenterna. (Jan. 52. 5. sp.k.)

383. Man bildar en triangel, som har sina hörn i de båda vertices till hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ samt i en godtycklig punkt på kurvan. Visa, att höjdernas skärningspunkt ligger på hyperbeln. (H. 12. R)

384. Tangenten i en punkt på en liksidig hyperbel bildar 60° vinkel med transversalaxeln. Bevisa, att brännpunktsradierna till denna punkt är vinkelräta mot varandra. (Nov. 51. 1. sp.k.)

385. En ellips och en hyperbel har samma brännpunkter. Bevisa, att kurvorna skär varandra under räta vinklar. (Nov. 43. 5. sp.k.)

386. En rät linje genom medelpunkten till hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$ skär kurvan i punkterna A och B. På hyperbeln är P en godtycklig punkt. Visa, att linjerna PA och PB bildar lika stora vinklar med var och en av asymptoterna. (Mars 48. 5. sp.k.)

387. Två konjugathyperbler med koordinataxlarna som axlar har excentriciteterna e och e_1. I de i första kvadranten belägna ändpunkterna av hyperblernas parametrar drages tangenterna, en till vardera hyperbeln. Visa, att den spetsiga vinkeln mellan dessa tangenter bestämmes genom ekvationen

$$\tan v = \frac{ee_1 - 1}{e + e_1}$$

och att v blir minst, när hyperblerna är liksidiga. (Nov. 48. 7. sp.k.)

c) ortproblem

388. I ett rätvinkligt koordinatsystem är de räta linjerna $y = x$ och $y = -x$ samt punkten $P\,(a;\ 0)$ givna. En rät linje genom P skär de båda givna linjerna, och normaler drages till dessa i skärningspunkterna. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan dessa normaler, när linjen vrider sig kring P. (Nov. 49. 5. sp.k.)

389. Två parabler, vilkas axlar sammanfaller med x-axeln, tangerar den räta linjen $y = 2x$. Avståndet mellan deras vertices är en längdenhet. Sök och konstruera orten för dessa parablers skärningspunkter. (Jan. 40. 4. sp.k.)

390. P är en godtycklig punkt på parabeln $y^2 = 4ax$; F är parabelns brännpunkt; A styrlinjens skärningspunkt med axeln. Förlängningen av linjen PF skär vertextangenten i Q. Sök orten för skärningspunkten mellan linjen PA:s förlängning och den linje genom Q, som är parallell med axeln. (Aug. 41. 5. sp.k.)

391. Upprita i dess huvuddrag kurvan $y = \dfrac{a}{x^2 + 1}$, där a är en konstant. En punkt P på kurvan är så belägen, att kurvans normal i denna punkt går genom origo. Sök och upprita geometriska orten för P, när a antar olika värden. Ange vidare, hur antalet normaler genom origo beror av a samt vilka spetsiga vinklar som dessa normaler kan bilda med y-axeln. (Mars 54. 7. sp.k.)

d) brutna rationella funktioner, vilkas kurvor är hyperbler

392. Funktionskurvan $y = \dfrac{3x^2}{4x - 16}$ är en hyperbel. Konstruera densamma, och bestäm det exakta värdet på dess excentricitet. (Jan. 45. 4. sp.k.)

393. Upprita kurvan

$$4y = \frac{3x^2 + 10x}{x - 5}.$$

Kurvan är en hyperbel. Bestäm läget av dess vertices. (Jan. 43. 5. sp.k.)

e) ett problem rörande andragradskurvor i allmänhet

394. Undersök kurvan $kx^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ för olika reella värden på konstanten k. Upprita kurvan för några k-värden, som representerar kurvans huvudtyper. – Det erfordras icke men betraktas som en förtjänst, om redogörelse lämnas för hur kurvan successivt ändras, då k varierar. (Nov. 50. 6. sp.k.)

Bevis från n till $n + 1$ m.m.

395. Bevisa likheten:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

(V. 85. R)

396. Bevisa "från n till $n + 1$" riktigheten av formeln

$$1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(V. 11. 6. R)

397. Bevisa formeln

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

(Jan. 42. 7. a.k.)

398. Bevisa riktigheten av formeln

$$\frac{1}{\cos v} + \frac{\sin^2 v}{\cos 2v \cos v} + \frac{\sin^2 v}{\cos 3v \cos 2v} + \cdots + \frac{\sin^2 v}{\cos(n+1)v \cos nv} = \frac{\cos nv}{\cos(n+1)v}.$$

(Aug. 43. 7. sp.k.)

399. Visa genom ett bevis från n till $n + 1$ eller på annat sätt, att

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Med hjälp av binomialteoremet kan man bevisa, att $2^n > 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, då n är ett helt tal > 2. Använd denna olikhet för att beräkna den angivna seriens summa, när antalet termer växer obegränsat. – Något bevis för olikheten erfordras inte men betraktas som en förtjänst. (Jan. 56. 7. a.k.)

400. Ett mosaikmönster består av regelbundna kongruenta månghörningar. Varje linje i mönstret utgör sida i två månghörningar. Varje hörnpunkt i mönstret utgör hörn i de månghörningar, som där sammanstöter. Undersök, hur många dylika mönster som är möjliga, och ange deras beskaffenhet.

(Aug. 41. 8. a.k.)

Uppgifter på matematisk gren

Mars 1957 – mars 1961

Mars 1957

1. Bestäm konstanten a, så att funktionen $\dfrac{x-a}{x^2-ax+1}$ får ett maximum för $x = 0$.
2. I ekvationen $\tan y = \dfrac{1+cx}{c-x}$ är c en konstant. Om $x \neq c$ och y ligger i intervallet $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, så bestämmes y genom ekvationen som en deriverbar funktion av x. Bevisa, att denna funktion oberoende av värdet på konstanten c satisfierar ekvationen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Punkterna A och B på en parabel ligger lika långt från vertex. En tredje punkt P på parabeln sammanbindes med A och B. Sammanbindningslinjerna skär parabelns axel eller dess förlängning i punkterna C och D. Bevisa, att sträckan CD halveras av vertex.
4. I en triangel är en vinkel 45°. Medianen till den motstående sidan bildar med denna en vinkel av 45°. Breäkna triangelns obekanta vinklar.
5. I en rätvinklig parallellepiped är två motstående sidoytor kvadratiska. Hörnen i den ena av dessa ligger på ytan av en sfär med radien R, och den andra sidoytan tangerar sfären. Hur stora är parallellepipedens kanter, om deras summa är så stor som möjligt?
6. Kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin(x - v)$, där v är en konstant, som inte är en multipel av 2π, begränsar tillsammans ett oändligt antal lika stora slutna områden. Beräkna ytan av ett av dessa i det fall, då $v = \pi/3$. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att ytan även bestämmes för det fall, då v har ett godtyckligt värde.
7. Höjden i en given liksidig triangel är 6 cm. Bestäm geometriska orten för en punkt så belägen, att summan av kvadraterna på dess avstånd till triangelns sidor är konstant och lika med a cm^2. Diskutera och ange ortens läge i förhållande till triangeln för olika värden på konstanten a.
8. Funktionen $y = f(x)$ har bestämda första och andra derivator och $f''(0) \neq 0$. Funktionskurvan går genom origo och tangerar där x-axeln. Normalen till kurvan i en godtycklig punkt P skär y-axeln i punkten N. Bevisa, att punkten N obegränsat närmar sig till en punkt N_0 med y-koordinaten $\dfrac{1}{f''(0)}$, då P obegränsat närmar sig origo. Detaljerad motivering erfordras.

Augusti 1957

1. En rät cirkulär cylinder skäres med ett plan, som bildar den spetsiga vinkeln v med cylinderns axel. Snittkurvan är en ellips. Beräkna dess excentricitet.

2. Genom ekvationerna $\begin{cases} x = \sin z \\ y = \cos pz \end{cases}$, där p är en konstant, $-1 < x < 1$ och $-\dfrac{\pi}{2} < z < \dfrac{\pi}{2}$, definieras y som en entydig funktion av x. Visa, att denna funktion satisfierar differentialekvationen

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2 y = 0.$$

3. I en likbent triangel är avståndet från höjdernas skärningspunkt till basen lika med längden av de lika stora sidorna. Bestäm triangelns vinklar.

4. En parabel har vertex i origo och linjen $y = x + 2$ till styrlinje. Ange parabelns ekvation, och bestäm ekvationerna för de tangenter till parabeln, som är parallella med koordinataxlarna.

5. Funktionen $y = f(x)$ antages ha derivata för $x = a$. Denna derivata $f'(a)$ kan definieras på följande sätt:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Enligt den allmänna teorien för gränsvärden innebär detta, att hur litet det positiva talet ε än väljes, så kan man finna ett positivt tal δ, så beskaffat att

$$\left| f'(a) - \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right| < \varepsilon, \quad \text{om } |h| < \delta.$$

Om ε väljes $= 10^{-6}$, vilket är då det största värde, som δ kan anta i det fall, då $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ och $a = 1$?

6. Normalen i en punkt P på kurvan $y = x^3$ bildar med koordinataxlarna en triangel. Ytan av denna triangel delas av kurvan i förhållandet $3 : 5$, varvid den mindre delen begränsas bl.a. av x-axeln. I vilket förhållande delas triangelns yta av kurvans tangent i punkten P?

7. En funktion $f(x)$ kan, om den uppfyller vissa här inte preciserade villkor, skrivas

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + R(x),$$

där $f'(x)$, $f''(x)$ och $f'''(x)$ är första, andra respektive tredje derivatorna av $f(x)$ med avseende på x och där $R(x)$ är en s.k. restterm, som går mot 0, när x går mot 0. För små värden på x kan därför funktionen $f(x)$ approximativt ersätta med funktionen

$$g(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0).$$

Bestäm funktionerna $g(x)$ och $R(x)$ i det fall, då $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{1 + x}$. Visa, att $\lim_{x \to 0} R(x) = 0$. Ange med fem decimaler det fel, som uppstår, om man i stället för $f(x)$ använder $g(x)$ för värdet $x = 0,1$. Bestäm slutligen skärningspunkten mellan kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ och visa, att dessa i skärningspunkten har samma tangent.

8. I en tetraeder $ABCD$ är kantlinjerna AB 3 cm, AC 4 cm och BC, BD och CD vardera 5 cm. Undersök, hur längden av den återstående kantlinjen AD varierar, och bestäm de gränser, mellan vilka denna längd ligger.

November 1957

1. I en geometrisk serie med positiva termer är kvoten 2. Produkten av de två första termerna är 8 och produkten av samtliga termer 2^{55}. Bestäm antalet termer i serien.

2. Två klot skär varandra så, att $1/3$ av det mindre klotets yta ligger inom det större klotet och $1/4$ av det större klotets yta ligger inom det mindre klotet. Hur många procent av det mindre klotets volym ligger inom det större klotet?

3. Bisektrisen till en vinkel A i en triangel bildar $60°$ vinkel med sidan BC och är lika stor som radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln. Beräkna vinkeln A.

4. Den inre begränsningsytan av en bägare är en rotationsyta. Den uppkommer, när den del av kurvan $y = \frac{1}{4}x^2$, som bestämmes av villkoret $0 \le x \le R$, roterar kring y-axeln. Koordinatsystemet är rätvinkligt, och längdenheten är 1 cm på var och en av koordinataxlarna. Bägaren rymmer fylld till brädden 1/4 liter. Bestäm konstanten R.

5. Vid en atombombsexplosion bildas radioaktivt splitter, som utsänder radioaktiv strålning under lång tid efter explosionen. Denna strålnings intensitet brukar mätas i ”röntgen per timme”, r/tim. Vid ett experiment fann man på ett visst avstånd från försöksstationen följande sammanhårande värden av tiden x tim efter explosionsögonblicket och intensiteten y r/tim:

x	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	5,0	10,0	50
y	251	36,3	15,8	2,29	1,00	0,145	0,063	0,009

Inpricka dessa värden i ett diagram med $^{10}\log x$ som abskissa och $^{10}\log y$ som ordinata, och upprita en kurva, som så nära som möjligt ansluter sig till de erhålla punkterna. Bestäm med hjälp härav $^{10}\log y$ som funktion av $^{10}\log x$. Ange slutligen i explicit form y som funktion av x.

6. Mot en normal till en parabel fälles normalen från parabelns brännpunkt. Sök och konstruera orten för den senare normalens fotpunkt.

7. Genom ekvationen $x = \cos^2 y$ och villkoret $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ bestämmes y i implicit form som en entydig funktion av x i området $0 \le x \le 1$. Ange $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ explicit form som funktioner av enbart x. Åskådliggör slutligen funktionen $y(x)$ med ett diagram. Ange särskilt ekvationerna för tangenterna i kurvans inflexionspunkt och ändpunkter.

8. Ekvationen $x^2 + y^2 - 9 + m(x-2)(x+2) = 0$, där m är ett reellt tal, som kan anta olika värden, betyder ett kägelsnitt i ett rätvinkligt koordinatsystem. Undersök, hur kägelsnittets art och dess symmetriaxlars lägen beror av m. Därvid skall för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man utifrån den givna formen för ekvationen visar, att kägelsnittet för alla m-värden går genom hörnen i en viss rektangel, samt schematiskt uppritar exempel på de kägelsnitt av de olika typer, som ehållits vid utredningen.

Januari 1958

1. P är en punkt på kurvan $y = x^3$ i första kvadranten i ett rätvinkligt koordinatsystem. X och Y är projektionerna av P på x- respektive y-axeln; O är origo. Rektangeln $OXPY$ delas av kurvan i två delar. Bevisa, att förhållandet mellan delarnas ytor är konstant, dvs. oberoende av P:s läge. Ange även detta förhållande.
2. I en pyramid med kvadratisk basyta bildar två motstående sidoytor invändigt vinklarna 30° respektive 135° med basytan. De båda övriga sidoytorna bildar lika stora vinklar med basytan. Hur stora är dessa?
3. Den räta linjen $3x + 4y - 7 = 0$ tangerar kurvan $16y = x^3 + ax^2 + 3xx + b$ i dennas inflexionspunkt. Bestäm konstanterna a och b.
4. Funktionen $f(x)$ definieras på följande sätt:

$$f(x) = x^2, \quad \text{då } x \leq 1,$$
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad \text{då } x > 1.$$

   Bestäm konstanterna a och b, uttryckta i den tredje konstanten c, så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x = 1$ och så att kurvan $y = f(x)$ har en bestämd tangent, då x-koordinaten är 1. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man undersöker, för vilka värden på c den erhållna kurvan skär igenom tangenten i den kurvpunkt, som har x-koordinaten 1.
5. Till ellipsen $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ drages tangenten i en godtycklig punkt P på kurvan. T är tyngdpunkten i den triangel, som bildas av koordinataxlarna och den nämnda tangenten. Bestäm ekvationen för orten för T, när P genomlöper ellipsen, och upprita ortkurvan i dess huvuddrag. Undersök speciellt, hur T rör sig, när P närmar sig axlarnas ändpunkter.
6. AC är en korda i en halvcirkel med diametern AB och medelpunkten O. Radien OD är parallell med AC. Genom D drages en linje parallellt med AB. När vinkeln BAC varierar från 0° till 60°, skär kordan AC den nämnda parallella linjen i en punkt E. Sträckorna DE och EC samt bågen CD begränsar en figur DEC. Hur stor är vinkeln BAC, när denna figur har största möjliga yta?
7. Mantelytan till en rät cirkulär cylinder kan omformas till en tetraeder på följande sätt. Var och en av de båda cirkellinjer, som begränsar manteln, kläms ihop till en kantlinje i tetraedern. En sådan kantlinjes längd blir sålunda hälften av cirkelns omkrets. De båda så uppkommande kantlinjerna skall vara vinkelräta mot varandra. Bestäm förhållandet mellan cylinderns höjd och basradie, så att den uppkommande tetraedern blir reguljär.
8. Två parabler har parallella och lika riktade axlar. Bevisa, att antalet gemensamma tangenter till de båda kurvorna är lika stort som antalet skärningspunkter mellan dem.

.

Mars 1958

1. Beräkna ytan av det slutna område, som begränsas av parablerna $y^2 = 4x$ och $x^2 = 4y$.
2. Funktionerna "sinus hyperbolicus för x" ($\sinh x$) och "cosinus hyperbolicus för x" ($\cosh x$) definieras på följande sätt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Bevisa formlerna

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x\,;$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

3. O är medelpunkten i en cirkel, och P är en punkt, belägen på ett avstånd från O, som är $1\frac{1}{2}$ gånger cirkelns radie. Från P är en sekant dragen, som skär cirkeln i punkterna A och B. Vinkeln OPA är tredjedelen av vinkeln AOB. Beräkna vinkeln OPA.
4. En kropp begränsas av två koncentriska sfäriska ytor, den yttre med den konstanta radien R, den inre med den variabla radien x. Ett tangentplan till den inre sfären delar den nämnda kroppen i två delar. Bestäm x, så att volymen av den större av delarna blir så stor som möjligt.
5. Bestäm konstanten a, så att funktionen $\dfrac{ax^2}{x-1}$ får ett maximum $= -4$.
6. En hyperbel är liksidig, dvs transversalaxeln är lika med konjugataxeln. Den ena grenen tangerar i vertex y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Samma gren går genom punkten $(-3;\ 0)$. Sök och konstruera orten för vertex på hyperbelns andra gren. Därvid skall undersökas, om orten består av hela den mot den erhållna ekvationen svarande kurvan.
7. Bestäm $\lim_{x\to 0} y$ och $\lim_{x\to 0} \dfrac{dy}{dx}$ för funktionen $y = \dfrac{x^2}{\sin 2x}$. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att utseendet av den mot funktionen svarande kurvan sksseras för $-\pi \le x \le \pi$.
8. Två punkter, P_0 och P_1, på parabeln $x^2 = 4ay$ har x-koordinaterna x_0 respektive x_1. Bestäm koordinaterna för skärningspunkten R_1 mellan kurvans normaler i P_0 och P_1. När punkten P_1 obegränsat närmar sig punkten P_0, dvs. när $x_1 \to x_0$, närmar sig R_1 obegränsat en punkt R_0. Ange dennas koordinater som funktioner av x_0. Bestäm därefter ekvationen för orten för R_0, när P_0 genomlöper parabeln. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att ortkurvan konstrueras i stora drag.

Augusti 1958

1. Sök ekvationen för spegelbilden av den räta linjen $x + 2y + 4 = 0$ med avseende på linjen $3x + y - 6 = 0$, vilken betraktas som en plan spegel.

2. En mur är 5 m hög och går i riktningen nordost–sydväst. En dag, då solen står rakt i söder, är murens skugga 3 m bred, mätt vinkelrätt mot murens längdriktning. Beräkna solens elevationsvinkel.
3. Kurvorna $y = 3x^2$ och $y = 4x^3$ har utom x-axeln ytterligare en gemensam tangent. Bestäm dennas ekvation.
4. En rät linje med ekvationen $x = h$ avskär av hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ett segment. Beräkna volymen av den kropp, som genereras, då detta segment roterar kring x-axeln.
5. För vilka värden på konstanten a betyder ekvationen $(a+2)x^2 - ay^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ en ellips, en parabel respektive en hyperbel? – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att undersökningen genomföres mera detaljerat. Därvid kan bl.a. för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln.
6. På kurvan $y = a^x$, där $a > 0$, tages en följd av punkter $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, vilkas abskissor utgör termer i en aritmetisk serie. Bevisa, att ordinatorna för punkterna $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ utgör termer i en geometrisk serie och riktningskoefficienterna för kordorna $P_1P_2, P_2P_3. \dots, P_{n-1}P_n$ termer i en annan geometrisk serie.
7. En rät cirkulär kon med bottenytan B och mantelytan M ligger på ett horisontellt plan, som den tangerar utefter en generatris. Konen får rulla på underlaget med spetsen fix, tills den första gången på nytt tangerar underlaget längs samma generatris som i utgångsläget. Beräkna längden L av den väg, som bottenytans medelpunkt beskriver under rörelsen, uttryckt i B och M. Om B antas ha ett givet värde, bestäm

$$\lim_{M\to B} L \quad \text{och} \quad \lim_{M\to\infty} L.$$

8. En kurva $y = f(x)$ går genom $(1;\ 1)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Riktningskoefficienten för normalen i en godtycklig punkt på kurvan är proportionell mot kvadraten på punktens x-koordinat.Bestäm $f(x)$ och diskutera kurvans utseende.

November 1958

1. Bevisa formeln

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$

där n är ett positivt heltal.
2. Bestäm konstanterna a, b och c så, att kurvan $y = ax^2 + bx + c$ går genom punkterna $A\,(1;\ 0)$, $B\,(3;\ 12)$ och kurvans tangent i B går genom origo O. Beräkna därefter ytan av det område, som begränsas av kurvbågen AB och de räta linjerna AO och BO.
3. En sfär är inskriven i en rät cirkulär kon. Bevisa, att förhållandet mellan sfärens och konens volymer är lika med förhållandet mellan deras ytor.

4. En ellips och en hyperbel är så belägna, att vardera kurvans vertices är brännpunkter till den andra kurvan. Hyperbelns parameter är dubbelt så stor som ellipsens. Bestäm kurvornas excentriciteter.

5. Genom sambandet $\sin y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, där $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, bestämmes y som en deriverbar funktion av x. Härled för $\dfrac{dy}{dx}$ och $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ uttryck, som endast innehåller variabeln x. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man uppritar den mot funktionen svarande kurvan i dess huvuddrag.

6. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten $(0;\ 1)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem, och hörnet B genomlöper kurvan $x^2 - 4y = 0$. Sidan BC är parallell med y-axeln och lika stor som sidan AB. Bestäm geometriska orten för tyngdpunkten i triangeln ABC, när hörnet B beskriver den angivna kurvan. Upprita orten i dess huvuddrag.

7. En cirkelsektor med medelpunktsvinkeln $2v$, där $v < 90°$, roterar kring en diameter i den cirkel, varav sektorn utgör en del. Nämnda diameter råkar inte sektorns båge. Den yta, som vid rotationen alstras av cirkelbågen, är S, och summan av de övriga alstrade ytorna är A. Det finns ett samband mellan de tre storheterna S, A och v. Bestäm detta.

8. Funktionen $y = F_0(x) = x - \sin x$, där x mätes i radianer, är > 0 för $x > 0$. En följd av funktioner $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$ kan bestämmas så, att de uppfyller villkoren $\dfrac{dF_k(x)}{dx} = F_{k-1}(x)$ och $F_k(0) = 0$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$. Visa först, att $F_k(x) > 0$ för $x > 0$. Bestäm därefter så många funktioner i följden, att med hjälp av deras ovan angivna egenskaper följande olikheter skall kunna visas för $x > 0$:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \text{och}$$
$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Januari 1959

1. I en geometrisk serie är första termen 1. Denna term, summan av andra och tredje termerna samt fjärde termen bildar i denna ordning en aritmetisk serie. Bestäm den geometriska seriens kvot.

2. För lufttrycket, b mm Hg, på höjden h km över havsytan gäller approximativt och inom vissa gränser formeln $b = 760e^{-\lambda h}$, där λ är en konstant. Enligt företagna mätningar är lufttrycket på 22 km höjd ungefär 31 mm Hg. Bestäm λ och beräkna därefter det ungefärliga lufttrycket på 38 km höjd.

3. Normalen till en ellips i ena ändpunkten P av en parameter skär storaxeln i punkten Q. Bestäm ellipsens excentricitet, om Q ligger lika långt från P som från ellipsens ena brännpunkt.

4. Funktionen $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, där p, q och r är konstanter, har ett maximum för $x = a$ och ett minimum för $x = b$. Bevisa att $f''(a) + f''(b) = 0$.

5. I en punkt A på parabeln $y^2 = 4ax$ drages tangenten, vilken skär x-axeln i punkten B. Punkten P ligger mellan A och B och delar sträckan AB så, att $PA : PB = m : n$. Sök ekvationen för orten för P, när A beskriver parabeln, och ange dess geometriska betydelse.
6. Det finns x-värden, för vilka såväl täljaren som nämnaren i funktionen
$$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin x - \sin 2x}$$
antar värdet 0. Undersök, om funktionen har några gränsvärden, när x obegränsat närmar sig ifrågavarande x-värden, och bestäm i så fall dessa gränsvärden.
7. Undersök kurvan $y = x - 1 - \dfrac{4}{x^2}$ med avseende på miximi- och minimipunkter, asymptoter och skärningspunkter med koordinataxlarna, samt upprita densamma i dess huvuddrag. Bestäm därefter ytan av den del av planet, som i första kvadranten ligger mellan x-axeln, kurvan, dess sneda asymptot och en linje $x = a$, där $a > 2$. Undersök slutligen, om denna yta har ett gränsvärde, när $a \to \infty$, och ange i så fall gränsvärdets storlek.
8. I en parallellt stympad rät cirkulär kon är den större bottenradien 2 cm. Sidans längd varierar och antages vara $2x$ cm. I ett axelsnitt går mittpunktsnormalen till sidan alltid genom den större bottenytans medelpunkt. Den stympade konens totala yta är y cm^2. Bestäm y som funktion av x, undersök denna funktion med avseende på maxima och minima och upprita motsvarande kurva i stora drag. Funktionens definitionsområde måste beaktas.

Mars 1959

1. Den räta linjen $x + 2y = 5$ är normal till kurvan $y = a(1 + x^2)$. Bestäm värdet på konstanten a.
2. I en regelbunden tresidig pyramid är vinkeln vid spetsen i en sidoyta lika stor som vinkeln mellan en sidokant och basytan. Bestäm denna vinkel.
3. I den vid A rätvinkliga triangeln ABC är sidan BC parallell med y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Hörnet A ligger i punkten $(0;\ 1)$ och hörnet B på kurvan $y = x^2$. Bestäm geometriska orten för hörnet C, när B genomlöper den angivna kurvan, och konstruera orten i dess huvuddrag med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.
4. En likbent triangel med toppvinkeln 20° är inskriven i en cirkel. En transversal genom cirkelns medelpunkt delar en av triangelns lika stora sidor i förhållandet $3 : 1$ från spetsen räknat. I vilket förhållande delar transversalen den andra av de lika stora sidorna?
5. Undersök funktionen $y = \sin 3x + \sin x$ med avseende på maxima och minima, samt upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. Beräkna därefter ytan av det område, som begränsas av x-axeln och kurvan för $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

6. Funktionen $I = F(T)$ definieras genom ekvationen $I = aT^2 \cdot e^{-\frac{b}{T}}$, där a och b är konstanter och $a > 0$. Genom sambanden

$$x = \frac{10^4}{T}, \quad y = {}^{10}\log I - 2 \cdot {}^{10}\log T$$

införes variablerna x och y i stället för T och I. Den på detta sätt erhållna funktionen $y = f(x)$ representeras grafiskt av en rät linje. Beräkna dennas riktningskoefficient, om $a = 60,2$ och $F(2000) = 0,0010$.

7. Ekvationen $x^2(1-a) + y^2(1+a) - 1 = 0$, där a är ett reellt tal, som kan anta olika värden, betyder ett kägelsnitt i ett rätvinkligt koordinatsystem. Undersök, hur kägelsnittets art och dess symmetriaxlars lägen beror av a. Därvid skall för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln. Slutligen skall genom schematiskt uppritade diagram lämnas en översikt av hur kägelsnittet varierar, när a genomlöper alla rella värden.

8. Undersök utseendet av kurvan $y = x^3 + ax + b$ för olika reella värden på konstanterna a och b. Bevisa därefter med ledning av denna undersökning, att om ekvationen $x^3 + ax + b = 0$ har tre reella rötter, så gäller olikheten $4a^3 + 27b^2 < 0$. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man bevisar omvändningen av föregående sats, dvs. om $4a^3 + 27b^2 < 0$, så har ekvationen tre olika reella rötter.

Augusti 1959

1. Undersök kurvan $y = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$ med avseende på maximipunkter, minimipunkter och asymptoter, samt konstruera den i dess huvuddrag.

2. Enligt en berömd sats av Euler ligger i varje triangel tyngdpunkten, den omskrivna cirkelns medelpunkt och höjdernas skärningspunkt på en rät linje, ”Eulers linje”. Bevisa denna sats för det specialfall, då triangelns hörn i ett rätvinkligt koordinatsystem är $(-8;\ 0)$, $(8;\ 0)$ och $(4;\ 8)$.

3. En regelbunden polyeders totala begränsningsyta och volym, uttryckta i motsvarande enheter, betecknas med A respektive V. Antalet sidoytor i polyedern är s och antalet kantlinjer k. Då gäller följande samband:

$$\frac{A^3}{V^2} = 18k \tan\left(\frac{s}{k} \cdot 90^\circ\right)\left[\sin^2\left(\frac{s}{k} \cdot 90^\circ\right) : \sin^2\left(\frac{s-2}{k} \cdot 90^\circ\right) - 1\right].$$

Bevisa riktigheten härav för den regelbundna tetraedern, kuben och den regelbundna oktaedern.

4. Från punkten $(-18;\ 0)$ drages tangenterna till parabeln $y^2 = 8x$. Vidare drages den tangent, vars riktningskoefficient är 1. De tre tangenternas skärningspunkter utgör hörn i en triangel. Bevisa, att den kring denna triangel omskrivna cirkeln går genom parabelns fokus.

5. I punkterna $P_1\ (x_1;\ y_1)$ och $P_2\ (x_2;\ y_2)$ på hyperbeln $xy = 1$ drages normalerna till hyperbeln. Visa, att skärningspunkten mellan dessa nornaler obegränsat närmar sig en viss punkt N, då $x_2 \to x_1$, samt bestäm koordinaterna för N.

6. I ekvationen $\tan x + a \tan 2x = 3 \tan 3x$ är a en reell konstant. Om a uppfyller vissa villkor, är $x = n\pi$, där $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots$, de enda reella lösningarna till ekvationen. Bestäm dessa villkor.
7. En godtycklig punkt P på en ellips sammanbindes med storaxelns ena ändpunkt A. Genom A drages normalen mot linjen AP, och på denna avsättes sträckan $AR = AP$. Sök och upprita den kurva, som punkten R beskriver, då P beskriver den givna ellipsen.
8. Ett papper har formen av en rektangel $ABCD$, där sidorna AB och BC är 2 dm respektive 3 dm. Papperet vikes längs en rät linje EF på sådant sätt, att hörnet A faller i en punkt A' på sidan BC. Punkten E ligger på sidan AB och punkten F kan ligga på sidan CD eller på sidan DA. Vinkeln $A'AE$ betecknas med v. Bestäm längden av sträckan EF som funktion av v, beräknas dess största respektive minsta värde, och åskådliggör slutligen funktionen i ett diagram.

November 1959

1. Det finns ett polynom y av tredje graden i x, som satisfierar differentialekvationen $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$ och som antar värdet 1 för $x = 1$. Bestäm detta polynom.
2. Parabeln $y^2 = 2px$ och en cirkel har gemensam tangent i origo. Cirkeln skär dessutom parabeln i två punkter. Visa, att radien i cirkeln har ett bestämt gränsvärde, när dessa punkter obegränsat närmar sig origo. Ange ekvationen för den så erhållna gränscirkeln, den s.k. krökningscirkeln till parabeln i origo.
3. Bestäm maxima och minima till funktionen $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$, och konstruera motsvarande kurva i dess huvuddrag.
4. I en regelbunden tresidig pyramid är sidokanten hälften så stor som summan av baskanten och höjden. Bevisa, att vinkeln mellan två sidoytor är exakt dubbelt så stor som vinkeln mellan en sidoyta och basytan.
5. Upprita kurvan $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ i dess huvuddrag. Från punkten P på kurvan med x-koordinaten 1 fällas normalerna PX mot x-axeln och PY mot y-axeln. Origo betecknas med O. I vilket förhållande delas ytan av rektangeln $OXPY$ av kurvan? – Det förutsättes bekant, att $\dfrac{de^x}{dx} = e^X$.
6. I en hyperbel har transversalaxeln ett bestämt läge och dess längd är $2a$, medan konjugataxeln varierar. Sök och konstruera orten för parametrarnas ändpunkter.
7. Summera serien $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$. – Man kan exempelvis använda en metod liknande den som användes vid härledning av den geometriska seiens summa.
8. I en likbent triangel med ytan 1 ytenhet inskrives en ellips på så sätt, att en av ellipsens axlar blir parallell med triangelns bas. Visa, att ytan av den största ellips, som på detta sätt kan inskrivas, är oberoende av den likbenta triangelns form. Ange också denna maximiyta.

Januari 1960

1. Undersök kurvan $y = \dfrac{x^2 - 0,8x}{x^2 - 1}$ med avseende på asymptoter samt maximi- och minimipunkter. Upprita kurvan i dess huvuddrag.
2. För vilka x-värden, $0 \leq x \leq 2\pi$, konvergerar den oändliga serien
$$1 - 2\sin x + 4\sin^2 x - 8\sin^3 x + \dots .$$
3. Man vill undersöka funktionen $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ för x-värden. som är något större än 2. Bestäm fördenskull det största positiva tal δ, som är sådant, att $y > 10^4$ för alla x-värden i intervallet $2 < x < 2 + \delta$.'
4. En rörlig transversal, parallell med en sida i en triangel, avskär ett parallelltrapets. Bevisa medelst analytisk-geometrisk metod, att orten för diagonalernas skärningspunkt i trapetset är den nämnda sidans median.
5. Funktionen $y(x)$ antages satisfiera differentialekvationen $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2(n+1)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$, där n är ett helt positivt tal eller 0. Man bildar den nya funktionen $z(x) = y(x) \cdot x^{2n+1}$. Visa, att denna funktion satisfierar differentialekvationen
$$x\frac{d^2z}{dx^2} - 2n\frac{dz}{dx} + xz = 0.$$
6. I parabeln $x^2 = 4ay$, där $a > 0$, är F brännpunkten och O vertex. En punkt på parabeln i första kvadranten betecknas med P, dess abskissa med x_1. Parabelnormalen i P råkar parabelns axel i punkten N. Ytan av triangeln PNF betecknas med $T(x_1)$, och ytan av figuren POF, begränsad av sträckorna PF och OF samt parabelbågen OP, betecknas med $S(x_1)$. Bestäm förhållandet $T(x_1) : S(x_1)$, och undersök, om detta har något gränsvärde, då $x_1 \to \infty$, och ange i så fall detta gränsvärde.
7. Ett klotsegment har en konstant volym, som lämpligen kan antas vara $\dfrac{\pi}{3}$ volymsenheter. Bestäm segmentets totala begränsningsyta som funktion av segmentets höjd. Visa, att denna funktion avtar, då höjden växer. Beräkna ytans minsta värde, och visa, att detta uppnås, nör klotsegmentet antar klotform.
8. Ett klot ligger på en horisontell bordsskiva. Parallella ljusstrålar faller in mot klotet, så att en skugga erhålles på bordsskivan. Visa, att det skuggade området begränsas av en ellips och att beröringspunkten mellan klotet och bordsskivan utgör ellipsens ena brännpunkt.

Mars 1960

1. Upprita kurvan $y = x^4 - 6x^2 + 5$ i dess huvuddrag. Kurvan och x-axeln begränsar tillsammans tre ändliga områden. Hur förhåller sig ytorna av dessa områden till varandra?
2. En fyrsidig pyramids basyta är en rektangel. Vinklarna mellan sidoytorna och basytan är i ordning 30°, 45°, 50° och 45°. Beräkna vinklarna mellan sidokanterna och basytan.

3. Upprita kurvan $4y = \frac{9}{x+2} - \frac{10}{x} + \frac{9}{x-2}$, och ange eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter.
4. Upprita i ett rätvinkligt koordinatsystem kurvan $y = \frac{1}{\cos x}$ i dess huvuddrag. Kurvan, linjen $x = \frac{\pi}{4}$ samt koordinataxlarna begränsar ett område, som får rotera kring x-axeln. Beräkna volymen av den alstrade rotationskroppen.
5. Den ena asymptoten till en liksidig hyperbel har i ett rätvinkligt koordinatsystem ekvationen $x + y + 1 = 0$. Hyperbeln går genom origo och tangerar den räta linjen $x + 2y = 0$. Bestäm hyperbelns ekvation.
6. I ekvationen $y = x^3 + ax$ har konstanten a ett sådant värde, att motsvarande kurva har en maximi- och en minimipunkt. Bestäm det största värde, som den spetsiga vinkeln mellan tangenten i inflexionspunkten och sammanbindningslinjen mellan maximi- och minimipunkten kan anta.
7. Parabeln $y^2 = 4x$ och den räta linjen $x = a$, där a är en konstant, är givna. Parabelns topp är O, dess brännpunkt F. Genom en punkt P på parabeln drages diametern. Denna eller dess förlängning skär den givna räta linjen i punkten A. Bestäm ekvationen för orten för skärningspunkten mellan linjerna OA och PF. Undersök, hur den geometriska betydelsen av denna ekvation ändras, när A antar alla reella värden.
8. I en triangel känner man en sida och förhållandet mellan de båda andra. Beräkna vinkeln mellan den givna sidan och bisektrisen till den motstående vinkeln, när triangelns yta är så stor som möjligt.

Augusti 1960

1. Från punkten $(-2;\ 0)$ drages de båda tangenterna till parabeln $y^2 = 8x$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Beräkna ytan av det område, som begränsas av parabeln och de båda tangenterna.
2. Ett klot belyses av en punktformig ljuskälla på det konstanta avståndet a från klotets medelpunkt. Hur stor skall klotets radie vara för att ytan av det belysta området på klotet skall bli så stor som möjligt?
3. I funktionen $y = a \cdot e^x \cos(x + v)$ är a och v konstanter. Visa, att $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, oberoende av a och v. – Det förutsättes bekant, att $\frac{de^x}{dx} = e^x$.
4. Upprita i ett rätvinkligt koordinatsystem kurvan $3y = \frac{4x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ i dess huvuddrag. Kurvan är en hyperbel. Bestäm ekvationerna för dess axlar och koordinaterna för dess vertices.
5. En ellips har sin ena brännpunkt i origo och den andra på x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Den räta linjen $x + y = 4$ är tangent till ellipsen. Sök och upprita orten för lillaxelns ändpunkter.
6. Upprita kurvan $y = \frac{1 - \cos x}{1 - 2\sin x}$, och ange eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter.

7. Problemet att dela en given vinkel i tre lika stora delar kan lösas approximativt på följande sätt. I en halvcirkel med medelpunkten O och diametern AB drages en radie OC, som med OA bildar den givna vinkeln v, samt en radie OM vinkelrätt mot AB. En cirkel med punkten B som medelpunkt går genom M och skär den räta linjen BC i punkten D. En cirkel med M som medelpunkt och radien lika stor som AB skär i punkten E förlängningen av AB åt B till. Vinkeln AED är då den sökta. Beräkna denna vinkel i det fall, då vinkeln v är 80,00°.
8. För en funktion $f(x)$ gäller om $|x| < 1$, att $\frac{df(x)}{dx} = \frac{2}{1-x^2}$ och $f(0) = 0$. Bevisa med tillhjälp härav, att $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$.

November 1960

1. Konstruera kurvan $y = \frac{x^3-2x}{x^2-3}$ i dess huvuddrag, och ange eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.
2. Bisektrisen till vinkeln A i triangeln ABC delar sidan BC i förhållandet $3:4$. Vinkeln B är 60° större än vinkeln C. Beräkna triangelns vinklar.
3. En rät cirkulär kons basdiameter är lika med dess höjd. Konens höjd är också diameter i ett klot. Hur stor del av konens volym ligger inom klotet?
4. I funktionen $y = a \cdot e^{-bx^2}$ är $a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ och $b = \frac{1}{2\sigma^2}$, där σ är en konstant. Visa, att $x = \sigma$ är ett nollställe till $\frac{d^2y}{dx^2}$. – Det förutsättes bekant, att $\frac{de^x}{dx} = e^x$.
5. P är en punkt på en given parabel. En cirkel tangerar parabelns axel, brännpunktsradien till P samt den del av diametern genom P, som ligger inom parabeln. Bestäm geometriska orten för cirkelns medelpunkt.
6. Kurvan $y = \sin x$ ersättes i intervallet $0 \le x \le \pi$ approximativt med den parabel $y = ax^2 + bx + c$, som går genom maximipunkten och skärningspunkterna med x-axeln för den ifrågavarande delen av sinuskurvan. Om man använder denna approximation vid beräkning av den yta, som begränsas av x-axeln och den nämnda delen av sinuskurvan, vilket blir förhållandet mellan det begångna felet och det korrekta värdet?
7. Ytan av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ är π ytenheter. Ange ellipsens excentricitet som funktion av längden av halvaxeln a, bestäm denna funktions definitionsområde, och åskådliggör funktionen grafiskt.
8. Upprita kurvan $y = \frac{1}{1+x^2}$ i dess huvuddrag. Denna kurva, x-axeln samt linjerna $x = a$ och $x = \frac{1}{a}$, där a är ett godtyckligt tal mellan 0 och 1, begränsar ett ändligt område. Bevisa, att detta område delas mitt itu av linjen $x = 1$.

Januari 1961

1. Undersök kurvan $5y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4x + 5}$ med avseende på asymptoter samt maximi- och minimipunkter. Upprita kurvan i dess huvuddrag.
2. En cirkel och en hyperbel har samma medelpunkt. Cirkeln går genom parameterkordornas ändpunkter. Vinkeln mellan kurvornas tangenter i dessa punkter är 60°. Bestäm hyperbelns excentricitet.
3. I ett klotsegment är summan av höjden och radien i den plana begränsningsytan 4 cm. Uttryck segmentets buktiga yta som funktion av segmentets höjd. Åskådliggör denna funktion grafiskt, och ange dess minsta värde.
4. I en likbent triangel drages genom den inskrivna cirkelns medelpunkt en transversal parallellt med en av de lika stora sidorna. Bestäm triangelns vinklar, om transversalen delar basen i förhållandet $2 : 3$.
5. Tangenten i en punkt P på kurvan $y = x^3$ i ett rätvinkligt koordinatsystem skär kurvan i en annan punkt Q. Bestäm först sambandet mellan riktningskoefficienterna för tangenterna i P och Q, och därefter det största värde, som den spetsiga vinkeln mellan tangenterna kan anta.
6. I en given likbent triangel inskrives en ellips, så att en av ellipsens axlar blir parallell med triangelns bas. Sök och konstruera geometriska orten för ändpunkterna av denna axel.
7. I en sfärisk sektor är radien 1 dm. Bestäm toppvinkeln i sektorn, då den koniska och sfäriska ytan är lika stora. Vilket är det största värde, som skillnaden mellan den koniska och den sfäriska ytan kan anta, om konens toppvinkel är mindre än den nyss bestämda vinkeln. Den sökta skillnaden skall anges i exakt form.
8. För en funktion $f(x)$ gäller, att $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}$ och $f(0) = 0$. Bevisa, att funktionen $f(x)$ är identisk med den funktion y av x, som i implicit form definieras genom ekvationen $\tan y = x$, där $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man konstruerar kurvan $y = f(x)$ i dess huvuddrag.

Mars 1961

1. En ellips, som har medelpunkten i origo och storaxeln utefter x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, har excentriciteten $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ och tangerar linjen $2x - y + 3 = 0$. Bestäm ellipsens ekvation.
2. De båda plattorna i en kondensator med kapacitansen C farad är förenade med ett motstånd med resistansen R ohm. Om spänningen mellan kondensatorplattorna i ett visst ögonblick är U_0 volt och t sekunder senare U_t volt, gäller sambandet $U_t = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. Vid experiment med en kondensator, för vilken $C = 10^{-5}$ har man funnit $U_0 = 20$ och $U_1 = 1$. Beräkna R.

3. I en konvergent oändlig geometrisk serie är den andra termen 2. Bestäm seriens summa som funktion av den första termen, och ange funktionens definitionsområde. Representera slutligen funktionen grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.

4. Punkterna $A\,(6;\ 0)$ och $B\,(0;\ 4)$ är punkter i ett rätvinkligt koordinatsystem. En rät linje, parallell med linjen $x+y=0$, skär x-axeln i punkten C och y-axeln i punkten D. Bestäm och upprita orten för skärningspunkten mellan de räta linjerna AD och BC.

5. I en triangel är en vinkel 30° och den motstående sidan medelproportional till de övriga sidorna. Beräkna triangelns övriga vinklar.

6. I en triangel är en höjd 10 cm. Den halveras av en av de andra höjderna. Ange triangelns yta som funktion av den spetsiga vinkeln mellan dessa höjder, och bestäm denna ytas minsta värde.

7. Undersök kurvan $y = x + 2\cos^2 x$ med avseende på maximi- och minimipunkter samt inflexionspunkter. Visa, att kurvan ett obegränsat antal gånger tangerar var och en av de räta linjerna $y = x$ och $y = x + 2$. Upprita kurvan i dess huvuddrag. Punkterna A och B är två på varandra följande kontaktpunkter med linjen $y = x$. Beräkna ytan av det ändliga område i koordinatplanet, som begränsas av kurvan och sträckan AB.

8. En klotsektors volym är $\dfrac{4\pi}{3}$ cm^3. Ange sektorns totala yta som funktion av sfärens radie, och bestäm denna funktions eventuella maxima och minima.