Matematiska uppgifter

Examensuppgifter i

MATEMATIK

DEL 2

Urval för gymnasiets båda högsta ringar
(A soc., R biol., R mat.)

Utgivna av

SIXTEN THÖRNQVIST

lektor

TREDJE UPPLAGAN

Stockholm
NATUR OCH KULTUR

*

Printed in Sweden Nerikes Allehanda Tryckeri
Örebro 1961

Innehåll

Förord

Föreliggande bok är den andra av tre samlingar av matematiska examensuppgifter för gymnasiet. Den omfattar studentuppgifter på latinlinjen (L), på reallinjen före 1937 (R) samt på reallinjen allmän kurs (a.k.). De sistnämnda förekom första gången vårterminen 1937.

Samlingen är avsedd för allmänna linjens sociala gren samt för reallinjens båda grenar. På den sistnämnda linjen bör den lämpligen anskaffas, då trigonometristudiet upptages i R II^4 resp. R I^3.

(A) resp. (R) omedelbart efter uppgiftens nummer betyder, att denna är avsedd att behandlas endast på allmänna linjen resp. reallinjen. Motsvarande gäller för kapitelrubrikerna. Av de med (R) markerade uppgifterna kan åtskilliga förbigås på reallinjens biologiska gren; dock torde elever, som siktar på något av de båda högsta betygen, ha nytta av dessa uppgifter.

Inom varje grupp av uppgifter är de senare i möjligaste mån ordnade efter svårighetsgrad. Ordningsföljden mellan de olika kapitlen utgör ett förslag till kronologisk studiegång. Härvid ansluter sig samlingen till de läroböcker, som utgivits av C. E. Sjöstedt och S. Thörnqvist.

Den tredje upplagan omfattar utöver andra upplagans uppgifter de skrivningar, som givits i matematik på biologisk gren och på social gren augusti 1959–mars 1961.

S. Thörnqvist

Planimetriska tillämpningar på trigonometrien

a) problem, vilkas lösning förutsätter de trigonometriska funktionernas definitioner i rätvinkliga triangeln

1. I en likbent triangel är summan av basen och den däremot dragna höjden 10 m och hela omkretsen 16 m. Beräkna triangelns sidor, vinklar och yta. (V. 04. 3. L.)

2. I en likbent triangel är summan av höjden och basen lika med summan av de lika sidorna. Beräkna vinklarna. (H. 03. 2. R)

3. Bisektrisen till den räta vinkeln i en rätvinklig triangel delar hypotenusan i förhållandet $4 : 5$. Vilka är triangelns vinklar? (V. 94. 2. R)

4. Sök vinklarna i en rätvinklig triangel, om längderna av de från den räta vinkelns spets dragna inre och yttre bisektriserna förhåller sig till varandra som 3 till 4. (H. 17. 5. R)

5. Om man i en viss likbent triangel från basens mittpunkt drager normalerna till de lika stora sidorna, så delas triangeln av dessa normaler i tre lika stora delar. Beräkna triangelns vinklar. (H. 21. 1. R)

6. I en rätvinklig triangel delas hypotenusan av den inskrivna cirkelns tangeringspunkt i delarna 3 cm och 10 cm. Beräkna triangelns spetsiga vinklar. (Mars 41. 5. L)

7. I en cirkelsektor med radien 12 cm inskrives en cirkel. Sektorns radier delas mitt itu av tangeringspunkterna. Beräkna sektorns medelpunktsvinkel och yta. (Nov. 42. 2. L)

8. I en triangel, vars yta är 30 cm^2, är den minsta höjden 4 cm. En vinkel är $22°$; beräkna de övriga vinklarna. (Jan. 36. 4. L)

9. I en romb delas den ena diagonalen i tre lika stora delar av den inskrivna cirkelns periferi. Beräkna rombens vinklar. (Aug. 35. 1. L)

10. Från ett hörn i en liksidig triangel drages en rät linje, som delar den i triangeln inskrivna cirkelns omkrets i förhållandet $1 : 3$. Beräkna vinkeln mellan denna linje och höjden från samma hörn. (Aug. 40. 5. L)

11. I en rätvinklig triangel är en vinkel $30°$. Beräkna vinkeln mellan medianerna mot kateterna. (V. 34. 5. L)

12. I en rätvinklig triangel är den ena spetsiga vinkeln $40°$. Beräkna vinkeln mellan medianerna mot kateterna. (Aug. 46. 1. a.k.)

13. I en rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan 12 cm och medianen mot samma sida 13 cm. Sök triangelns sidor och minsta vinkel. (Mars 39. 2. L)

14. I en rätvinklig triangel är ena kateten lika med den andras projektion på hypotenusan. Beräkna vinklarna. (V. 07. 3. L)

15. Tre cirklar, vilkas radier är 1, 2 och 3 dm, tangerar varandra utantill. Beräkna ytinnehållet av den mellan cirklarna belägna figur, som begränsas av bågarna mellan tangeringspunkterna. (V. 84. 3. R)

16. I en rätvinklig triangel förhåller sig medianerna mot kateterna som 3 : 4. Beräkna triangelns vinklar. (Mars 45. 2. L)

17. En cirkel tangerar basen i en likbent triangel och skär vardera av dess lika sidor i tre lika delar. Bestäm med ledning härav triangelns vinklar. (V. 15. 8. L)

18. En cirkel tangerar en cirkelsektors båge och delar var och en av radierna till bågens ändpunkter i tre lika stora delar. Beräkna cirkelsektorns medelpunktsvinkel. (Nov. 43. 4. L)

19. I en cirkel med radien = 4 m utdrages en radie en meter utom cirkeln. Från denna punkt är en sekant dragen så, att den del därav, som ligger inom cirkeln, är dubbelt så stor som den, som ligger utom densamma. Hur stor är vinkeln mellan mellan denna sekant och den utdragna radien? (V. 08. 2. R)

20. En cirkel med 4 dm radie är given. Från en punkt, som ligger på 6 dm avstånd från medelpunkten, drages en sekant, vars utanför cirkeln belägna del är 3 dm. Sekanten delar cirkelns periferi i två delar. Beräkna längden av den mindre av dessa delar. (V. 34. 6. L)

21. Från en punkt på 6 cm avstånd från medelpunkten till en cirkel med 3 cm radie drages en sekant, vars utom cirkeln liggande del är 4 cm. I vilket förhållande delas cirkelns yta av denna sekant? (V. 98. 6. R)

22. Två orter har båda nordlig latitud 58°35′; den enas longitud är 5°35′ ostlig, den andras 30°45′ västlig. Beräkna avståndet längs breddcirkeln mellan orterna. Jordens omkrets är 4000 mil. (V. 33. 5. L)

23. Valparaiso och Kapstaden ligger på ungefär samma sydliga parallellcirkel. Longituden för den förra staden är 71,6° västlig och för den senare 18,4° ostlig. Vilken är latituden för dessa städer, om avståndet mellan dem utefter parallellcirkeln är 835 mil? Jorden antages vara en sfär med omkretsen 4000 mil. (Jan. 39. 1. L)

24. Vad är förhållandet mellan diagonalerna i en regelbunden sjuhörning? (V. 92. 3. R)

25. I en cirkel, vars radie är 1 m, är inskriven en fyrhörning, vars sidor i ordning efter varandra avskär bågar, som förhåller sig som 1 : 2 : 3 : 4. Beräkna fyrhörningens yta. (V. 02. 3. L)

26. I en regelbunden femhörning drages diagonalerna från ett hörn. Femhörningen delas därvid i tre trianglar. Bestäm förhållandet mellan ytorna av två närliggande trianglar. (Mars 40.5. L)

27. En regelbunden niohörnings minsta diagonal är 7 cm. Beräkna dess största diagonal. (Jan. 37. 1. L)

28. I triangeln ABC är vinkeln A 43,60°, sidan AB 13 cm och den inskrivna cirkelns radie 4 cm. Beräkna triangelns övriga vinklar. (Jan. 41. 4. L)

29. En kvadrat är inskriven i en annan kvadrat på det sätt, att den förras hörn ligger på var sin av den senares sidor. Hur stora vinklar bildar den ena kvadratens sidor med den andras, då kvadraternas ytor förhåller sig till varandra som 3 till 4? (H. 25. 1. R)

30. I en rätvinklig triangel är den inskrivna cirkelns radie $\frac{1}{6}$ av den ena kateten. Beräkna triangelns spetsiga vinklar. (Aug. 45. 2. L)

31. I et cirkelsegment är kordan 6 cm och höjden 4 cm. Beräkna segmentets yta. (Aug. 42. 3. L)

32. AB är en korda i en cirkel; C och D är två punkter på kordan så belägna, att $AC = CD = DB$; E är mittpunkten på den mindre cirkelbågen AB. Hur stor medelpunktsvinkel upptar kordan AB, då vinkeln CED är 64°? (Aug. 48. 3. L)

33. Sök vinklarna i en rätvinklig triangel, som är så beskaffad, att medianen till ena kateten är vinkelrät mot medianen till hypotenusan. (V. 26. 3. R)

34. I en likbent triangel drages medianerna mot de båda lika sidorna. Hur stora skall triangelns vinklar vara, för att dessa medianer skall vara vinkelräta mot varandra? (V. 32. 4. L)

35. Bestäm vinklarna i ett parallelltrapets, som uppfyller följande villkor. De två icke-parallella sidorna samt den mindre av de parallella sidorna är alla tre lika långa. Drages genom diagonalernas skärningspunkt en rät linje parallell med de båda parallella sidorna i trapetset, så delar den de icke parallella sidorna i förhållandet $3 : 5$. (H. 27. 1. R)

36. I en likbent triangel drages en transversal parallellt med basen genom den inskrivna cirkelns medelpunkt. Transversalen delar triangelns yta mitt itu. Beräkna triangelns vinklar. (Nov. 45. 2. L)

37. Hur stor är toppvinkeln i en likbent triangel, om triangeln genom en med basen parallell transversal kan uppdelas i en triangel och en fyrhörning, som har lika stora ytor och lika stora omkretsar? (Jan. 39. 5. L)

38. Beräkna vinklarna i ett parallelltrapets, då man vet, att de icke parallella sidorna är lika stora sinsemellan och lika med den större parallella sidan samt att desamma, i fall de utdrages, tillsammans med den mindre parallella sidan bildar en triangel av samma area som parallelltrapetsets. (V. 15. 1. R)

39. De båda icke parallella sidorna i ett parallelltrapets, vars omkrets är 32 cm, förlänges, tills de råkas. De har då förlängts 6 cm respektive 8 cm. Ytan av den utanför trapetset belägna triangeln är $4/5$ av trapetsets yta. Beräkna trapetsets sidor och spetsiga vinklar. (Mars 49. 5. L)

40. I en likbent triangel är den omskrivna cirkelns radie fyra gånger så stor som den inskrivna cirkelns radie.Beräkna triangelns vinklar. (V. 26. 7. L)

41. På en diameter i en cirkel väljes en punkt A, som delar diametern i förhållandet $1 : 3$ och genom A drages en korda, som i A delas i förhållandet $3 : 4$. Beräkna vinkeln mellan diametern och kordan. (Aug. 36. 5. L)

42. I en likbent triangel tangerar den inskrivna cirkeln en av de lika stora sidorna i en punkt, som ligger mitt emellan triangelns spets och skärningspunkten mellan sidan och bisektrisen till den motstående vinkeln. Beräkna triangelns vinklar. (Mars 46. 6. L)

43. I en likbent triangel är en kvadrat inskriven. Av kvadratens hörn faller två på den ena av de lika sidorna, det ena i dess mittpunkt. Beräkna triangelns vinklar. (Jan. 37. 8. L)

44. I triangeln ABC är vinkeln A rät, sidan AB 2 cm och vinkeln B 40°. Bisektrisen till sistnämnda vinkel, som skär AC i D, utdrages till E, så att $BD = DE$. Beräkna vinklarna i triangeln AEC. (Nov. 46. 3. a.k.)

45. (R) Två liksidiga trianglar, vardera med sidan a, täcker varandra fullständigt. Man vrider den ena triangeln 90° kring en mot trianglarnas plan vinkelrät axel genom trianglarnas gemensamma tyngdpunkt. Därefter sammanbindes trianglarnas hörnpunkter, så att en konvex sexhörning uppkommer. Bevisa, att denna är likvinklig, och beräkna den exakta längden av dess omkrets. (Mars 44. 3. a.k.)

46. (R) Genom mittpunkten M på sidan AB i den liksidiga triangeln ABC drages en linje, som skär AC i D och förlängningen av BC i E, så att $MD = DE$. Beräkna vinkeln AMD. (Mars 46. 2. a.k.)

47. I en likbent triangel drages från basens ena ändpunkt en linje, som delar motstående sida i förhållandet $1 : 2$. Vinkeln mellan den dragna linjen och basen är 60°. Beräkna triangelns vinklar. (Aug. 35. 1. R)

48. (R) I triangeln ABC är vinkeln $A = 90°$, sidan $AB = 2$ cm och sidan $AC = 1$ cm. Från mittpunkten D på AB drages en rät linje, som skär BC i E och förlängningen av AC i F, så att $DE : EF = 2 : 1$. Hur stor är vinkeln BED? (Aug. 50. 4. a.k.)

49. (R) I en rätvinklig triangel ABC är hypotenusan BC 27 cm. Den linje, som förenar den inskrivna cirkelns medelpunkt med B, är 12 cm. Bestäm triangelns spetsiga vinklar. (Nov. 46. 6. L)

50. (R) Från en punkt P utanför en cirkel drages tangenterna och en linje, som skär cirkeln i två punkter, A och B, så att $PA = AB$. Vinkeln mellan tangenterna, som är 60°, delas genom linjen PB i två delar. Hur stora är dessa? (Jan. 43. 7. L)

51. I triangeln ABC är $AB = AC$. Sammanbindningslinjen mellan B och den inskrivna cirkelns medelpunkt O utdrages och träffar AC i D. Beräkna triangelns sidor och vinklar, då BO är 3 cm och OD 2 cm. (Aug. 46. 8. L)

52. En liksidig triangel är inskriven i en cirkel. Från ett av triangelns hörn drages två kordor, vilka av den motstående triangelsidan delas i förhållandet $4 : 1$. Bestäm vinkeln mellan dessa kordor. (Mars 50. 8. L)

53. (R) I triangeln ABC är AB en längdenhet, vinkeln B 45° och vinkeln C 30°. Bestäm det exakta värdet av sin A. (Mars 43. 6. L)

b) problem, vilkas lösning förutsätter kännedom om sinus, cosinus och ytteoremen samt ”tangenten för halva vinkeln”

54. I ett parallelltrapets är de parallella sidorna 3 cm och 6 cm. En av de övriga sidorna är 4 cm och bildar med den större av de parallella sidorna en vinkel av 66,42°. Beräkna trapetsets övriga vinklar. (Jan. 43. 2. L)

55. I en triangel är två sidor 7 cm och 9 cm och medianen till den tredje sidan 4 cm. Sök triangelns vinklar. (Jan. 47. 1. L)

56. I en parallellogram förhåller sig närliggande sidors längder som 2 : 7 och diagonalernas längder som 3 : 4. Hur stora är parallellogrammens vinklar? (Nov. 52. 1. a.k.)

57. I triangeln ABC är $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm och vinkeln $A = 60°$. Hur stor vinkel bildar bisektrisen till vinkeln A med sidan BC? (Aug. 36. 2. L)

58. I en triangel är en vinkel 41,26°, en närliggande sida 3,4 dm och en motstående sida 2,9 dm. Beräkna de övriga vinklarna. (Mars 36. 1. L)

59. I en likbent triangel bildar medianen till en av de lika stora sidorna en vinkel av 80° med denna sida. Beräkna triangelns vinklar i det ena av de båda fall, som är möjliga. (Nov. 43. 2. a.k.)

60. I en triangel ABC är sidan AC 109 m, sidan AB 97 m och vinkeln C 32,9°. Hur många dylika trianglar finns, och hur stor är den tredje sidan? (V. 32. 7. L)

61. Två sidor i en triangel är 7 cm och 8 cm. Vinkeln, som står emot den förra, är 50°24′. Hur stor är triangelns yta? (V. 27. 2. L)

62. I en parallellogram är en sida 8 cm och en diagonal 25 cm. Vinkeln mellan dessa linjer är 24,14°. Vilka vinklar bildar parallellogrammens sidor med varandra? (Nov. 40. 3. L)

63. En sida i en triangel delas av tangeringspunkten för den inskrivna cirkeln i delarna 9 cm och 11 cm. Triangelns yta är 66 cm^2. Beräkna triangelns största vinkel. (Jan. 49. 5. L)

64. I triangeln ABC är sidan $AB = 2{,}4$ cm, sidan $AC = 4{,}5$ cm och ytan $= 2{,}7$ cm^2. Beräkna triangelns vinklar i de båda fall, som är möjliga. (Nov. 41. 6. L)

65. I en triangel ABC är $AB = 10$ cm, $BC = 6{,}5$ cm och vinkeln $A = 36{,}3°$. På AB väljes en punkt D så, att $AD = 3{,}5$ cm. Beräkna längden av CD. (Nov. 38. 2. a.k.)

66. I fyrhörningen $ABCD$ är AB och CD vardera 3 cm, AD 8 cm samt vinkeln A 60° och vinkeln B 110°. Beräkna vinklarna C och D i de båda fall, som är möjliga. (Mars 46. 5. L)

67. I triangeln ABC är $AB = 12$ dm, $BC = 6$ dm och $CA = 9$ dm. Punkten D på AC är så vald, att $AD : DC = 2 : 1$. Hur lång är sammanbindningslinjen BD? (Nov. 37. 2. L)

68. I triangeln ABC är vinkeln $C = 60°$ och sidan $AB = 31$ m. På AC väljes en punkt D så, att AD blir 20 m. BD blir då 21 m. Beräkna CD. (Aug. 39. 5. L)

69. Två sidor i en triangel är 11 cm och 22 cm. Mellanliggande vinkels bisektris är 12 cm. Beräkna triangelns vinklar. (H. 26. 2. L)

70. I en triangel förhåller sig två sidor som 1 : 2. Bisektrisen till den mellanliggande vinkeln är lika lång som den tredje sidan. Beräkna triangelns vinklar. (Jan. 53. 1. a.k.)

71. I en triangel förhåller sig två sidor som 9 : 13. Den tredje sidan är lika lång som den mot densamma dragna medianen. beräkna triangelns största vinkel. (Jan. 45. 2. L)

72. I fyrhörningen $ABCD$ är AB 16 cm, BC 16 cm, CD 6 cm, DA 14 cm samt diagonalen AC 16 cm. Beräkna den andra diagonalens längd. (Jan. 49. 2. L)

73. Två trianglar har lika stora ytor. Sidorna i den ena är 40 cm, 60 cm och 80 cm. Vinklarna i den andra är 40°, 60° och 80°. Beräkna den minsta sidan i den senare triangeln. (Mars 43. 3. a.k.)

74. I triangeln ABC är vinkeln $B = 21{,}1°$, $AB = 10$ cm och AC:s projektion på $BC = 10{,}5$ cm. Beräkna den omskrivna cirkelns radie. (Aug. 37. 4. L)

75. I en cirkel är en 5 m lång korda AB dragen. Genom A är en tangent dragen och på densamma är avsatt $AC = 6$ m. Sträckan BC delas då mitt itu av cirkelperiferin. Beräkna vinkeln BAC. (Mars 38. 3. L)

76. Två kordor AB och CD i en cirkel skär varandra inom cirkeln i en punkt E, så att $AE = 1$ cm, $BE = 8$ cm, $CE = 3$ cm och vinkeln $AEC = 60°$. Beräkna radien i den cirkel, som kan omskrivas kring triangeln BED. (Jan. 44. 3. L)

77. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Diagonalerna AC och BD skär varandra i punkten E, så att vinkeln AEB är 60°. Vidare är AE 8 cm, CE 3 cm, BD 10 cm och BE större än DE. Beräkna radien i cirkeln. (Mars 52. 4. a.k.)

78. En diameter i en cirkel delar en korda i förhållandet $3 : 4$ och delas själv av kordan i delar, som är 2 cm och 3 cm. Beräkna vinkeln mellan diametern och kordan. (Mars 41. 6. L)

79. I triangeln ABC är AB 11 cm, BC 20 cm och CA 13 cm. Med A som medelpunkt ritas en cirkel, vilken tangerar sidan BC. Beräkna längden av den cirkelbåge, som ligger inom triangeln. (V. 35. 6. L)

80. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm och $BC = 9$ cm. Bisektrisen till vinkeln A drages och råkar cirkeln i D. Hur långa är kordorna BD och CD? (Mars 39. 6. L)

81. I en triangel ABC är vinkeln $A = 75{,}88°$, sidan $AB = 9$ cm och vinkeln B:s bisektris $= 10$ cm. Beräkna sidan BC. (Mars 39. 4. L)

82. I fyrhörningen $ABCD$ är sidan AB 5 cm, sidan BC 12 cm och sidan CD 20 cm. Vinkeln B är 90° och vinkeln C 104°. Beräkna sidan AD samt vinklarna A och D. (Jan. 39. 7. L)

83. Vinkeln vid spetsen i en likbent triangel delas genom en rät linje i förhållandet $2 : 3$. Den nämnda linjen bildar med basen en vinkel av 85°. I vilket förhållande delar linjen triangelns yta? (Jan. 41. 3. L)

84. I en triangel är en vinkel 60°. Bisektrisen till denna vinkel delar den motstående sidan i förhållandet $3 : 4$. Sök triangelns övriga vinklar. (Aug. 45. 5. L)

85. I triangeln ABC är vinkeln A 40°. Bisektrisen till vinkeln B skär sidan AC i D. Ytan av triangeln BCD är dubbelt så stor som ytan av triangeln ABD. Beräkna de obekanta vinklarna i triangeln ABC. (Nov. 35. 3. L)

86. I en given triangel är en sidas längd $^2/_3$ av summan av de båda andra sidornas längder. Bisektrisen till den vinkel i triangeln, som står mot den förstnämnda sidan, delar triangeln i tvenne deltrianglar, vilkas ytor förhålla sig som $4 : 1$. Beräkna triangelns vinklar. (H. 28. 2. L)

87. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. Vinkeln A är 120°, sidorna AB och AC 5 cm respektive 3 cm. Hur stor är ytan av det cirkelsegment, som har BC till korda och som ligger helt utanför triangeln? (Mars 41. 4. L)

88. I en triangel är en vinkel 120°. Bisektrisen till denna vinkel delar motstående sida i tvenne delar med längderna 3 och 4 dm. Beräkna triangelns övriga sidor och vinklar. (V. 31. 2. L)

89. Bisektrisen till vinkeln A i en parallellogram $ABCD$ skär sidan BC i dess mittpunkt E. Sträckan AE är $^3/_5$ av diagonalen AC. Beräkna parallellogrammens vinklar. (Mars 53. 6. L)

90. I en triangel, vars yta är 210 cm^2, är två höjder 16,8 cm och 15 cm. Beräkna den vinkel, som dessa höjder bildar med varandra. (Nov. 39. 4. L)

91. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = AD = 4$ cm och $BC = CD = 5$ cm. Vinkeln A är 110°. Beräkna den i fyrhörningen inskrivna cirkelns radie. (Mars 49. 1. a.k.)

92. I ett parallelltrapets är de parallella sidorna 2 dm och 4 dm samt diagonalerna 3 dm och 4,5 dm. Beräkna vinkeln mellan diagonalerna. (Nov. 39. 2. L)

93. En fyrhörnings sidor är i ordning 3, 4, 5 och 6 m; diagonalen, som sammanbinder de båda förstas skärningspunkt med de båda senares, är 7 m. Hur lång är den andra diagonalen? (V. 95. R)

94. På en radie OA i en cirkel med medelpunkten O tages punkten P, så att PO blir en tredjedel av radien. Genom P drages kordan BC, så att $BP : PC = 7 : 8$. I vilket förhållande delas cirkelsektorn OAB:s yta av linjen BP? (Jan. 40. 6. L)

95. I triangeln ABC är vinkeln A 66,7°. Mittpunktsnormalen till sidan BC träffar sidan AB i punkten D, så att $AD : DB = 1 : 2$. Beräkna vinklarna B och C. (Jan. 44. 2. a.k.)

96. A, B, C, D och E är fem på varandra följande hörn i en regelbunden niohörning. I vilket förhållande delas diagonalen AD av diagonalen CE? (V. 33. 3. R)

97. Två vinklar i en triangel är 58° och 74°. Radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln är 40 cm. Hur stor är radien i den i triangeln inskrivna cirkeln? (Aug. 35. 6. R)

98. Sidan och diagonalen i en kvadrat väljes till kateter i en rätvinklig triangel. Beräkna vinkeln mellan medianen mot hypotenusan och medianen mot den längre av kateterna. (Aug. 51. 2. a.k.)

99. En regelbunden femuddig stjärnas spetsar sammanfaller med hörnen i en regelbunden femhörning, som är inskriven i en cirkel med 5 cm radie. Stjärnans begränsningslinjer utgör delar av diagonalerna i nämnda femhörning. Beräkna stjärnans yta och ange värdet i såväl exakt som approximativ form. (Aug. 45. 1. a.k.)

100. Vinkeln A i triangeln ABC är 43,30°, vinkeln B 27,39°. På BC väljes en punkt D, så att vinkeln DAC blir 30°. Sök förhållandet mellan ytorna av trianglarna BAD och CAD. (Aug. 41. 3. L)

101. I en triangel, vars yta är 8 cm^2, är en vinkel 30°. Bisektrisen till denna vinkel delar den motstående sidan i förhållandet $1 : 2$. Beräkna längden av denna sida. (Aug. 44. 5. L)

102. En fyrsiding med sidorna i ordning 1, 2, 3, 4 meter låter inskriva sig i en triangel. Beräkna fyrsidingens yta. (H. 10. R)

103. I en triangel är summan av två sidor 19 cm, den mellanliggande vinkeln 30° och ytan 21 cm^2. Beräkna triangelns sidor och övriga vinklar. (Mars 42. 4. L)

104. I en triangel är en sida 8 dm, triangelns yta 4 dm^2 och den kring triangeln omskrivna cirkelns radie 5 dm. Beräkna triangelns vinklar. (V. 47. 4. R)

105. I en rätvinklig triangel är avstånden från den omskrivna cirkelns medelpunkt till de båda spetsvinkliga triangelhörnen respektive 200 och 300 mm. Beräkna hypotenusans längd. (V. 26. 3. L)

106. I en triangel är en sida 4 cm och summan av de övriga sidorna 11 cm. Medelproportionalen till de in- och omskrivna cirklarnas radier är 2 cm. Bestäm triangelns sidor och största vinkel. (Aug. 40. 6. L)

107. Med sidan BC i triangeln ABC som diameter uppritas en cirkel, som skär AB D och AC i E. Om $AD : BD = 5 : 3$ och $AE : CE = 2 : 3$, hur stora är vinklarna i triangeln ABC? (Nov. 47. 6. L)

108. Kring en cirkel med 1 dm radie har man omskrivit en triangel, i vilken en sida är 3 dm och en av de vid denna sida stående vinklarna är 60°. Beräkna triangelns övriga vinklar. (H. 33. 7. L)

109. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. AB är 12 cm och CD 6 cm. AB och DC utdrages (åt B respektive C till) och skär varandra i E under 30° vinkel. BE är 8 cm. Beräkna fyrhörningens yta och vinklar. (Nov. 39. 7. L)

110. I en triangel ABC är sidan AB 96 cm, vinkeln A 30° samt den kring triangeln omskrivna cirkelns radie 50 cm. Hur stora är sidorna AC och BC? (V. 32. 1. R)

111. I triangeln ABC är $AB = 5$ dm, $BC = 4$ dm. Genom B drages en rät linje BD, som råkar AC i D. Man vet, att $AD : DC = 5 : 2$ och att $\wedge ABD = 45°$. Beräkna vinklarna i triangeln ABC. (Nov. 37. 7. L)

112. Bisektrisen BD i triangeln ABC är 12 cm och vinkeln BDA 60°. Sidorna AB och BC förhåller sig som $2 : 3$. Bestäm sidan AC och vinkeln BAC. (Mars 51. 6. L)

113. Beräkna ytan av en triangel, i vilken den inskrivna cirkelns radie är 1 cm, en sida är 4 cm och en intill denna sida liggande vinkel är 60°. (Nov. 42. 4. R)

114. (R) I en triangel ABC är sidan BC 4,5 cm och vinkeln A 37,9°. Sidan BC tages till diameter i en cirkel, som skär de övriga sidorna i D och E. Bestäm längden av sträckan DE. (Jan. 44. 8. L)

115. En fyrhörning, vars sidor i ordning är 3, 6, 9 och 12 cm är inskriven i en cirkel. Den första och den tredje sidan förlänges, tills de skär varandra. Hur stora är förlängningarna, och vilken vinkel bildar de med varandra? (Mars 45. 3. L)

116. (R) Vinkeln mellan de linjer, som i en romb förenar en sidas mittpunkt med den motstående sidans ändpunkter, är 45°. Beräkna rombens vinklar. (Aug. 42. 3. a.k.)

117. (R) I en triangel ABC är vinkeln $C = 100°$ och $CA : CB = 5 : 3$. Medianen till sidan AB utdrages, tills den skär den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln i D. Visa, att $DB : DA = 5 : 3$. (Nov. 42. 7. a.k.)

118. (R) I triangeln ABC är den inskrivna cirkelns radie $\frac{1}{16}$ av triangelns omkrets och $\frac{1}{4}$ av höjden mot sidan AB. Beräkna vinkeln C. (Mars 53. 6. a.k.)

119. (R) Genom en punkt på en diameter i en cirkel med radien 13 cm drages två kordor, vilka med diametern bildar vinklar på 30°. Dessa kordor har längden 24 cm. Två på samma sida om diametern liggande ändpunkter på kordorna sammanbindes. Beräkna längden av denna sammanbindningslinje. (Jan. 42. 8. L)

120. (R) I triangeln ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B. Sidan AB är 5 cm och sidan AC 4 cm. Beräkna triangelns vinklar. (Mars 52. 8. L)

121. (R) I fyrhörningen $ABCD$ är vinkeln A 100° och sidorna AB och AD lika stora. Den kring triangeln ABD omskrivna cirkeln delar sidorna BC och CD mitt itu. Beräkna fyrhörningens obekanta vinklar. (Jan. 48. 7. L)

c) några trigonometriska tillämpningar inom fältmätning, navigation m.m.

122. Två fartyg A och B styr samma kurs men med olika hastighet. Vid ett tillfälle, då avståndet mellan dem är 5,4 sjömil, synes B från A 47° vänster om kursriktningen. Hur stort är avståndet mellan dem vid ett senare tillfälle, då motsvarande vinkel är endast 32°? (Aug. 37. 3. L)

123. En ångare befinner sig 8 mil nordost om en fyr och går med en hastighet av 2 mil i timmen mot sydsydväst. Efter hur lång tid befinner den sig rätt söder om fyren? (V. 25. 3. L)

124. För att bestämma avståndet mellan ett strandat fartyg A och ett skär B, som låg mellan fartyget och stranden, uppmätte man på stranden en punkt C, som låg i rät linje med A och B, en baslinje $CD = 250$ m. Vidare mättes vinklarna $BCD = 84°$, $BDC = 83°$ och $ADC = 86°$. Beräkna avståndet AB. (Aug. 43. 3. L)

125. Från en ångare, som med konstant hastighet går i nordostlig riktning, siktar man kl. 8 en fyr i en riktning, som från norr avviker 20° mot öster. Kl. 9 ser man fyren rakt i norr. Hur dags kan man vänta sig se fyren rakt i väster? (Mars 41. 2. L)

126. Från ett skepp, som seglar från söder mot norr, observeras två fyrar rakt i väster. Efter en timmes seglats synes den ena av dessa fyrar i sydväst, den andra i sydsydväst. Avståndet mellan fyrarna är 8 km. Beräkna skeppets hastighet. (V. 19. 2. R)

127. Ett träd står i en plan södersluttning. Från en punkt på marken 34 m rakt väster om detsamma synes det under en synvinkel av 36,2°. Från en punkt på marken 52 m rakt söderut från trädets fot synes trädet undeer en synvinkel av 22,1°. Beräkna markens lutning mot horisonten. (Nov. 38. 7. L)

128. Från ett flygplan siktas foten och toppen av en radiomast under depressionsvinklarna (djupvinklarna) 8,9° resp. 8,1°. Masten är 63 m hög. Hur stort är avståndet mellan radiomastens fot och den punkt på marken, som vid tillfället i fråga ligger rakt under flygplanet? Markytan kan betraktas som horisontell. (Jan. 54. 3. L)

129. Ett fartyg A gick med 20 knops fart i ostnordostlig riktning. Då man ombord på A siktade en hamn i sydostlig riktning på 15 sjömils avstånd, såg man ett fartyg B lämna densamma. Det senare fartyget hade en hastighet av 16 knop. Efter en halvtimmes förlopp, under vilken tid de båda fartygen närmat sig varandra, låg de i rät linje med hamnen. Bestäm B:s kurs och dess avstånd till A vid det senare tillfället. 1 knop = 1 sjömil per timme. (Mars 40. 3. a.k.)

130. (R) Man har uppmätt avståndet mellan tre punkter A, B och C på en horisontell slätt och funnit $AB = 92,5$, $BC = 60,1$ och $AV = 110{,}4$ m. I en punkt P, belägen på förlängningen av AB åt B till, har man uppmätt vinkeln BPC, som befunnits vara 12,5°. Hur stort är avståndet PC? (H. 11. R)

131. Från en hamn A avgår en ångbåt med en hastighet av 2 mil i timmen i riktning, som från norr avviker 30° mot öster. Tre timmar senare avgår från en annan hamn B, som ligger 16 mil rakt öster om A, en motorbåt med en hastighet av 7 mil i timmen. Vilken kurs bör motorbåten hålla för att sammanträffa med ångbåten? (Aug. 43. 8. L)

132. (R) Ett flygplan P, som befinner sig över havet, iakttages i samma väderstreck från två observationspunkter på fastlandet, A och B, i det ögonblick då det passerar vertikalplanet genom A och B. Punkten A ligger vid stranden i nivå med havsytan, punkten B 600 m över havsytan. Från A syns P och B under elevationsvinklarna 54,1° respektive 21,1°. Vinkeln mellan syftlinjerna BP och BA är 43,9°. Beräkna flygplanets höjd över havsytan. (Mars 47. 5. L)

133. (R) För att bestämma höjden av en bergstopp P har man uppmätt en baslinje $AB = 198$ m i en sådan riktning, att vertikalplanet genom AB går genom P. Baslinjen är ej horisontell, utan ändpunkten B, som är närmast P, ligger 8,4 m högre än A. Syftlinjerna AP och BP bildar vinklarna 25,7° och 31,8° med horisontalplanet. Bestäm höjdskillnaden mellan P och B. (V. 36. 2. a.k.)

134. (R) Från två orter, som ligger på samma meridian och vilkas geografiska breddskillnad är 82°40′ (Kap Farvel på Grönland och Rio de Janeiro) observeras månen samtidigt, då den passerar meridianen. Månens höjd över horisonten befinnes vara på Kap Farvel 43°26′ och i Rio de Janeiro 52°39′. Beräkna härav månens avstånd från Rio de Janeiro vid tillfället i fråga. (Jorden antages vara sfärisk och dess radie = 6366 km). (Mars 51. 5. a.k.)

135. (R) Från en punkt P syns spetsarna av en flaggstång A och ett torn B i rät linje under höjdvinkeln 13,56°. Om man härifrån avlägsnar sig 50 m i riktning från tornet till en punkt Q med samma höjdnivå som P och belägen i samma plan som A, B och P, syns spetsarna av A och B under höjdvinklarna 6,38° resp. 12,52°. Beräkna avståndet mellan flaggstången och tornet. (Mars 37. 5. a.k.)

d) några bevis

136. I triangeln ABC är vinkeln A rät. Bevisa, att

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \qquad \text{(V. 25. 4. L)}$$

137. Flera fysikaliska formler (t.ex. linsformeln) kan skrivas $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Då två av storheterna a, b och f är kända, kan man bestämma den återstående genom att använda ett s.k. nomogram. Detta utgöres här av en triangel AOB, där vinkeln $O = 120°$, sidan $OA = b$, sidan $OB = a$ samt längden av bisektrisen till vinkeln $O = f$. Visa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

(Mars 42. 4. a.k.)

138. Från hörnet A i triangeln ABC drages en rät linje till en punkt D på sidan BC eller dess förlängning. Bevisa, att i båda fallen gäller sambandet

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin BAD}{\sin DAC}.$$

(Aug. 47. 2. L)

139. En sidan i en triangel delas av bisektrisen till den motstående vinkeln i förhållandet $5 : 7$ och av tangeringspunkten för den inskrivna cirkeln i förhållandet $3 : 5$. Visa, att en vinkel i triangeln är aritmetiskt medium till de övriga vinklarna. (Nov. 42. 7. L)

140. (R) I en rätvinklig triangel med ytan T uppritas den inskrivna cirkeln. Förenas tangeringspunkterna med varandra, erhålles en en triangel med ytan t. Bevisa, att förhållandet $t : T$ är lika med förhållandet mellan den inskrivna cirkelns radie och hypotenusan. (Aug. 47. 4. .a.k.)

141. (R) I ett parallelltrapets är de parallella sidorna a och b, de övriga sidorna c och d samt diagonalerna e och f. Visa, att $e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.
(Aug. 38. 8. a.k.)

Serier

a) ändliga geometriska serier

142. I en avtagande geometrisk serie är skillnaden mellan första och femte termen tre gånger så stor som skillnaden mellan andra och fjärde termen. Beräkna seriens kvot. (H. 25. 2. L)

143. I en geometrisk serie är summan av 1:a och 4:e termen $= 1085$ och summan av 2:a och 3:e termen $= 210$. Vilken är denna serie? (V. 24. 1. L)

144. I en geometrisk serie är summan av de 3 första termerna 351 och summan av de följande 13. Hur stor är seriens 7:e term? (V. 17. 1. L)

145. I en geometrisk serie med reella termer är summan av de två första termerna 16 och summan av de fyra följande 15. Vilken är serien? (Jan. 45. 1. a.k.)

146. I en geometrisk serie är summan av de fyra första termerna $= 26$ och summan av de andra och tredje termerna $= -5$. Sök första termen och kvoten.
(Aug. 41. 2. L)

147. I en geometrisk serie är summan av de tio första termerna 33 gånger så stor som summan av de fem första. Den sjätte termen är 24 enheter större än den fjärde. Vilken är serien? (Nov. 40. 1. L)

148. I en rätvinklig triangel bildar sidornas mätetal en geometrisk serie. Bestäm triangelns minsta vinkel. (Nov. 50. 1. L)

149. I en triangel bildar sidornas längder en geometrisk serie, och den minsta sidan är $\frac{4}{19}$ av omkretsen. Beräkna triangelns största vinkel. (Mars 44. 3. L)

150. I triangeln ABC bildar sidorna BC, AC och AB i nämnd ordning en stigande geometrisk serie. Bisektrisen till vinkeln C delar motstående sida i förhållandet $2 : 3$. Beräkna triangelns vinklar. (Mars 41. 8. L)

151. Bevisa, att om a, b, c och d i nämnd ordning är på varandra följande termer i en geometrisk serie, så är

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2. \qquad \text{(Jan. 44. 3. a.k.)}$$

152. Två geometriska serier består av vardera tre termer. Första termen i båda serierna $= 1$. Andra och tredje termerna i den andra serien erhålles av motsvarande termer i den första serien genom subtraktion med 2 respektive division med 4. Bestäm serierna. (Jan. 40. 3. L)

153. Man betraktar de båda serierna $\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{32}, \frac{3}{128}, \ldots$ och $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Visa, att om man i den första serien tar summan av ett godtyckligt antal på varandra följande termer från och med den första termen räknat, så kan man alltid i den andra serien finna ett antal på varandra följande termer från början räknat, vilka har samma summa. (V. 34. 7. L)

154. (R) Summan av alla termerna i en geometrisk serie med kvoten 2 är 381; summan av de två sista termerna är 288. Vilken är serien? (Aug. 41. 3. a.k.)

155. (R) I en geometrisk serie med nio termer är den andra termen $= 2$, och produkten av alla nio termerna är 1728. Beräkna seriens summa. (Jan. 37. 7. R)

156. Två geometriska serier har båda kvoten 2. Av den första serien, vars första term är 1, medtages dubbelt så många termer som av den andra, vars första term är 43. Hur många termer måste minst medtagas, för att den första seriesumman skall *överstiga* 3 gånger den senare? (Mars 38. 5. a.k.)

157. (R) För rektangulärt papper m.m. användes i viss utsträckning de s.k. DIN-formaten. De erhålles genom successiva vikningar av ett grundformat på sådant sätt, att samtliga format blir likformiga. Grundformatet benämnes $A0$; dess yta är 1 m^2. Genom att vika detta mitt itu, så att rektangelns längre sidor halveras, erhåller man formatet $A1$. Dess yta blir alltså hälften av av $A0$:s yta. Genom att vika $A1$ på samma sätt erhåller man $A2$, osv. Bevisa, att om $A1$ är likformigt med $A0$, så blir samtliga övriga format likformiga med dessa. Bestäm förhållandet mellan den större och den mindre sidan i formaten. Beräkna längden av sidorna i formatet $A6$ (brevkortsformat), uttryckt i mm. (Nov. 41. 7. a.k.)

b) oändliga geometriska serier

158. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 4. Hur stor är kvoten, då summan av termerna fr.o.m. den tredje är 9? (Nov. 47. 2. L)

159. Utveckla 1,2 i en oändlig geometrisk serie, vars kvot är kvadraten på den första termen. (H. 19. 2. L)

160. En oändlig, avtagande geometrisk serie har andra termen = 1 och summan = 8. Sök första termen och kvoten. (H. 23. 1. L)

161. En oändlig geometrisk series tredje term är 6. Den andra termen är $^2/_9$ av seriens summa. Beräkna den första termen. (Jan. 37. 5. L)

162. I en oändlig geometrisk serie med positiva termer är summan av de sex första termerna 63 och summan av alla de därpå följande 1. Bestäm seriens kvot och första term. (Aug. 44. 1. L)

163. I var och en av två oändliga geometriska serier med reella termer är första termen 3. Seriernas kvoter är varandras inverterade värden. Den ena serien är konvergent och den andra följaktligen divergent. Summan av de 7 första termerna i den ena serien är 64 gånger så stor som summan av de 7 första termerna i den andra. Bestäm summan av den konvergenta oändliga serien. (Aug. 47. 2. a.k.)

164. En divergent oändlig geometrisk series kvot är en enhet större än första termen. Den serie som bildas av termernas inverterade värden, är konvergent och har summan 4/9. Vilken är den ursprungliga serien? (Mars 46. 2. L)

165. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 3. Summan av alla termer med jämnt ordningsnummer är 2. Beräkna summan av alla termer med udda ordningsnummer. (Mars 51. 2. L)

166. Summan av en konvergent oändlig geometrisk serie är 4. En annan dylik serie bildas av var fjärde term i den förra serien från och med den tredje termen. Den nya seriens summa är 1. Bestäm den ursprungliga seriens kvot och första term. (Nov. 49. 2. a.k.)

167. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen lika med kvoten. Man bildar en ny serie av termerna med ordningsnumren 3, 6, 9, …Denna series summa är 1/3 av den ursprungliga seriens. Bestäm seriernas summor. (Jan. 50. 1. L)

168. Summan av en konvergent oändlig geometrisk serie förhåller sig till summan av termerna med ordningsnumren 3, 5, 7, …som $4 : 9$. Summan av den ursprungliga seriens båda första termer är $\frac{1}{9}$. Vilken är serien? (Aug. 47. 3. L)

169. För en konvergent oändlig geometrisk serie gäller, att summan av termerna med udda ordningsnummer och summan av termerna med jämna ordningsnummer är rötter till ekvationen $2x^2 + 3x - 2 = 0$. Vilken är serien? (Jan. 48. 1. a.k.)

170. I en konvergent oändlig geometrisk serie är produkten av den första och den tredje termen 1. Summan av den oändliga serie, som bildas av termerna med jämnt ordningsnummer, är 1,8. Ange seriens tre första termer. (Mars 54. 1. L)

171. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan medelproportional till första och tredje termerna. Skillnaden mellan tredje och andra termerna är = 1. Bestäm seriens summa. (Aug. 40. 2. a.k.)

172. Summan av termerna i en oändlig geometrisk serie är 1, och summan av termernas kvadrater är 2. Beräkna summan av termernas kuber. (Jan. 41. 2. L)

173. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av den första och den fjärde termen 35 samt produkten av den andra och den tredje 216. Bestäm den oändliga seriens summa. (Aug. 48. 2. L)

174. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av de de fyra första termerna 45 och summan av de två därpå följande termerna $2\frac{1}{4}$. Beräkna seriens kvot och dess summa. (V. 28. 2. L)

175. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan lika med kvadraten på första termen, och fjärde termen är $^{13}/_{9}$ mindre än den första. Vilken är serien? (Jan. 44. 2. L)

176. De tre första termerna i en konvergent oändlig geometrisk serie är 1, $1 - x$ och $2 - x$. Beräkna seriens kvot och fjärde term. (Nov. 51. 4. L)

177. Summan av termerna i en konvergent oändlig geometrisk serie är $0,9$. Stryker man i denna serie varannan term fr.o.m. den tredje, blir summan av de återstående termerna $0,75$. Ange den ursprungliga seriens tre första termer. (Nov. 55. 1. a.k.)

178. I en konvergent oändlig geometrisk serie multipliceras termerna i ordning med 4 , 20, 3, 4, 20, 3 osv. Summan av den på detta sätt genom ständigt upprepad multiplikation med faktorerna 4, 20, 3 erhållna serien är 8 gånger så stor som den ursprungliga seriens summa. Bestäm kvoten i den sistnämnda serien. (Aug. 54. 4. L)

179. En oändlig series första term är 1. Kvoten mellan en godtycklig term med jämnt ordningsnummer och närmast föregående term i serien är 2, och kvoten mellan en godtycklig term med udda ordningsnummer och närmast föregående term i serien är $\frac{1}{3}$. Bestäm den oändliga seriens summa. (Mars 44. 7. L)

180. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 1. De övriga termerna utgöres av bråk, som icke kan förkortas. Seriens första term bildar tillsammans med täljarna i de följande termerna en geometrisk serie med kvoten 2 och tillsammans med nämnarna en annan geometrisk serie. Vilken är den förstnämnda serien, om dess summa är $4\frac{1}{2}$ gånger så stor som dess kvot? (Jan. 45. 7. L)

181. I var och en av två konvergenta geometriska serier är första termen lika med kvoten. Den ena seriens summa är hälften så stor som den andras. Dividerar man den förra seriens termer i ordning med den senares, erhåller man en ny konvergent geometrisk serie, vars summa är tre gånger så stor som den största av de förstnämnda summorna. Beräkna de tre seriernas kvoter. (Nov. 39. 2. a.k.)

182. I en oändlig konvergent geometrisk serie divideras var tredje term från och med den tredje med 2. Därigenom blir seriens summa $\frac{13}{14}$ av det ursprungliga värdet. Hur stor är den givna seriens kvot? (Mars 39. 2. a.k.)

183. I en oändlig, avtagande geometrisk serie med positiva termer inskjutes mellan vart par av på varandra följande termer två nya, så att man får en ny dylik serie. Vilken bör kvoten i den ursprungliga serien vara, ifall den nya seriens summa är dubbelt så stor som den ursprungliga seriens summa? (H. 24. 6. L)

184. (R) Summan av de n första termerna av en konvergent oändlig geometrisk serie är 4 och summan av de därpå följande $2n$ termerna är 3. Bestäm den geometriska seriens summa. (Aug. 55. 3. a.k.)

185. (R) Första termen i en oändlig geometrisk serie är positiv. Mellan vilka värden skall kvoten ligga, för att summan av de 20 första termerna skall understiga seriens summa med mindre än $0,1\%$ av denna? Gränsernas värden skall anges approximativt med tre riktiga decimaler. (Aug. 43. 5. a.k.)

186. (R) Mellan vilka gränser ligger kvoten till en oändlig, avtagande geometrisk serie, om första termen är större än seriens halva summa och skillnaden mellan första och andra termen är mindre än tredjedelen av seriens summa? (H. 29. 3. R)

c) några planimetriska tillämpningar på oändliga geometriska serier

187. Två obegränsade räta linjer, a och b, skär varandra under rät vinkel i O. På a väljes en punkt A_1 och på b en punkt B_1, så att OA_1 blir dubbelt så stor som OB_1 Normalen i B_1 mot A_1B_1 skär a i A_2, normalen i A_2 mot B_1A_2 skär b i B_2, normalen i B_2 mot A_2B_2 skär a i A_3. På detta sätt konstrueras vidare punkterna B_3, A_4, B_4, … i oändlighet. Bestäm längden av den brutna linjen $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4 \ldots$ uttryckt i sträckan A_1B_1. (Mars 47. 4. L)

188. I en rätvinklig triangel, vars hypotenusa är 10 meter och kateter x och y, gör y med hypotenusan en vinkel $= 30°$. Om man nu från den räta vinkelns spets fäller mot hypotenusan en vinkelrät linje x_1; från den punkt, där den träffar hypotenusan, en annan x_2 vinkelrät mot y; från dess skärningspunkt med y åter x_3 vinkelrät mot hypotenusan osv.; vad blir summan av samtliga linjerna $x, x_1, x_2, x_3 \ldots$? (H. 89. R)

189. Sträckan $AA_1 = a$ är given. A_2 är mittpunkten av AA_1, A_3 är mittpunkten av A_1A_2, A_4 mittpunkten av A_2A_3, A_5 mittpunkten av A_3A_4, osv. Punkterna A_1, A_2, A_3, …, A_n, … närmar sig obegränsat en viss punkt, då n växer över alla gränser. Bestäm dennas avstånd från A. (Mars 39. 8. L)

190. I en cirkel med radien R och medelpunkten O_1 är AB en diameter. Med AO_1 som diameter uppritas en andra cirkel med medelpunkten O_2; med O_1O_2 som diameter en tredje cirkel med medelpunkten O_3; med O_2O_3 som diameter en fjärde cirkel med medelpunkten O_4 osv. På detta sätt erhålles en serie cirklar, vilka avtar i storlek och av vilka var och en tangerar den närmast föregående innantill. Då antalet cirklar växer obegränsat, närmar sig cirklarnas medelpunkter en viss punkt. Hur långt från A kommer denna punkt att ligga? (Aug. 42. 7. L)

191. I en cirkel har man inskrivit en fyrhörning, vars sidor i följd är 2 cm, 6 cm, 6 cm och 2 cm. I denna fyrhörning inskrives en cirkel och i denna cirkel en ny fyrhörning, likformig med den förstnämnda, i denna fyrhörning åter en cirkel, i denna cirkel en med de nämnda fyrhörningarna likformig fyrhörning osv. i oändlighet. Beräkna summan av alla nämnda cirklars ytor. (Aug. 39. 2. a.k.)

192. (R) I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är höjden h och de parallella sidorna AB och CD respektive a och b, där $a > b$. Man konstruerar en följd av parallelltrapets CDD_1C_1, $C_1D_1D_2C_2$, ..., likformiga med $ABCD$, så att C_1D_1 faller inom $ABCD$, C_2D_2 inom CDD_1C_1 osv. Då konstruktionen upprepas ett obegränsat antal gånger, kommer parallelltrapetsen att obegränsat avta i storlek och slutligen närma sig en punkt P inom $ABCD$. Sök läget av punkten P, uttryckt i a, b och h. (Mars 45. 6. a.k.)

193. (R) OAB är en given cirkelsektor med medelpunkten O, medelpunktsvinkeln $AOB = 2v$, som antages mindre än 120°, och radien $OA = OB = r$. I densamma inskrives en ny sektor $O_1A_1B_1$ med samma medelpunktsvinkel $2v$, vars medelpunkt O_1 ligger i mittpunkten av bågen AB; radiernas ändpunkter A_1 och B_1 ligger på radierna OA resp. OB. I sektorn $O_1A_1B_1$ inskrives på analogt sätt en sektor $O_2A_2B_2$ med medelpunktsvinkeln $2v$, så att sålunda O_2 ligger i mittpunkten av bågen A_1B_1 och att A_2 och B_2 ligger på O_1A_1 resp. O_2B_2. I sektorn $O_2A_2B_2$ inskrives på analogt sätt en sektor $O_3A_3B_3$ med medelpunktsvinkeln $2v$, osv. Man får på detta sätt en oändlig följd av sektorer, vilkas medelpunkter obegränsat närmar sig en viss punkt. Bestäm denna punkts läge. (V. 33. 8. R)

194. (R) I kvadraten $ABCD$, vars sida är a, inskrives en kvadrat $A_1B_1C_1D_1$ med A_1 i mittpunkten av AB, B_1 i mittpunkten av BC osv. I $A_1B_1C_1D_1$ inskrives på samma sätt en ny kvadrat $A_2B_2C_2D_2$ med A_2 i mittpunkten av A_1B_1 osv. I $A_2B_2C_2D_2$ inskrives på samma sätt kvadraten $A_3B_3C_3D_3$ osv. i oändlighet. Den spiralformigt brutna linjen $AA_2A_4A_6$ ... drages, och därigenom bildas en oändlig följd av trianglar AA_1A_2, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$, ... Hur stor är summan av alla dessa trianglars ytor? (Mars 36. 4. R)

195. (R) Från mittpunkten av sidan AB i en liksidig triangel ABC drages en perpendikel mot sidan BC, från dess fotpunkt en perpendikel mot AC, från dess fotpunkt drages en perpendikel mot AB, från dess fotpunkt en perpendikel mot BC osv i samma ordning i oändlighet. Visa att dessa perpendiklar obegränsat närmar sig sidorna i en viss triangel. (V. 18. 6. R)

196. (R) En följd av trianglar $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$, ... ligger så, att för varje heltalsvärde på n ($n \geq 2$) hörnen i i triangeln T_n sammanfaller med tangeringspunkterna för den i triangeln T_{n-1} inskrivna cirkeln. Hörnen i triangeln T_n betecknas med A_n, B_n och C_n, så att A_n ligger på $B_{n-1}C_{n-1}$ osv. Undersök, om gradtalet för vinkeln A_n i triangeln T_n går mot ett gränsvärde A för växande värden på n, dvs. om det finns ett tal A sådant, att skillnaden A och A_n blir numeriskt godtyckligt liten, blott n väljes tillräckligt stort. Ange i så fall detta gränsvärde. (Mars 54. 8. a.k.)

197. (R) Från en punkt P på en sida i en given kvadrat drages en linje L, som med den nämnda sidan bildar en vinkel $v < 45°$. Linjen L skär den följande kvadratsidan i en punkt P_1, varifrån linjen L_1 drages vinkelrätt mot L; L_1 skär den därpå följande kvadratsidan i P_2, varifrån linjen L_2 drages vinkelrätt mot L_1; L_2 skär den därpå följande kvadratsidan i P_3. Samma konstruktion upprepas, varvid i ordning erhålles punkterna P_4, P_5, P_6, ... Bevisa, att dessa punkter obegränsat närmar sig till hörnen i en kvadrat, som är oberoende av punkten P:s läge på den givna kvadratens omkrets men beroende av vinkeln v. (Mars 40. 8. a.k.)

198. (R) En polygonlinje $A_0A_1A_2A_3A_4$ ... är uppritad på följande sätt. A_0, A_1 och A_2 är hörn i en rätvinklig triangel, där kateten A_1A_2 är mindre än kateten A_0A_1. Vidare gäller följande för $n = 2, 3, 4, \ldots$ Sträckan A_nA_{n+1} är vinkelrät mot sträckan $A_{n-1}A_n$ och dragen åt A_{n-2} till, och kvoten mellan en sträcka och närmast föregående är konstant och lika med $A_1A_2 : A_0A_1$. Polygonlinjen har rätvinkliga hörn och ett spiralliknande utseende. Visa, att punkten A_n har ett gränsläge, när n växer obegränsat, och bestäm detta läge. (Nov. 54. 8. a.k.)

199. (R) Ett obegränsat antal punkter i ett koordinatsystem, $(x_1;\, y_1)$, $(x_2;\, y_2)$, $(x_3;\, y_3)$,...$(x_n;\, y_n)$,..., är så belägna, att storheterna $(y_2 - y_1)$, $(y_3 - y_2)$, $(y_4 - y_3)$, ... bildar en geometrisk serie med kvoten $\frac{1}{2}$ och första termen -1. Storheterna x_1, $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_2)$, $(x_4 - x_3)$,... bildar en geometrisk serie med kvoten 2 och första termen 1. Vidare är $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Bestäm y_1 och härled ett av n oberoende samband mellan x_n och y_n. Utpricka i koordinatsystemet läget av några punkter i den ovan angivna punktföljden. (Mars 43. 8. a.k.)

d) aritmetiska serier

200. I en aritmetisk serie är första termen -5 och sista termen 20. Två inom serien symmetriskt belägna termer är så beskaffade, att deras produkt är 36. Bestäm dessa termer. (Aug. 51. 3. a.k.)

201. Beräkna summan av alla tresiffriga hela positiva tal, som är jämnt delbara med 17. (Jan. 54. 1. a.k.)

202. Två aritmetiska serier, 80, 78, 76,... och 3, 7, 11, ... är givna. Av den senare serien skall tagas dubbelt så många termer som av den förra. Hur många termer av den förra serien kan man högst taga, om dennas summa skall vara större än den senares? (H. 43. 1. a.k.)

203. (R) I en aritmetisk serie är summan av ett godtyckligt antal termer lika med kvadraten på termantalet. Sök serien. (V. 12. 7. R)

204. (R) Vilken är den aritmetiska serie med n termer, vilkens summa är $4n + 5n^2$ oberoende av värdet på n? (V. 91. 2. R)

205. En aritmetisk serie är så beskaffad, att summan av de n första termerna är $n(3n + 1)$. I denna serie är summan av tre konsekutiva termers kvadrater lika med 10 164. Vilka är dessa tre termer? (Nov. 48. 3. a.k.)

206. I en aritmetisk serie är femte termen lika med summan av första och tredje termernas kvadrater, och det inverterade värdet av andra termen är lika med summan av tredje och sjätte termernas inverterade värden. Bestäm serien. (Nov. 40. 3. a.k.)

207. En aritmetisk serie består av 20 termer. Summan av alla termerna är 120, produkten av de båda mellersta termerna är 35. Vilken är serien? (H. 32. 5. L)

208. a^2, b^2, c^2 bildar en aritmetisk serie. Visa, att detta även är fallet med $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$. (H. 21. 8. L)

209. Parallellt med hypotenusan AB $(= 2a)$ i en likbent rätvinklig triangel drages en transversal CD, som av triangeln avskär ett parallelltrapets $ABCD$. Hur stor är trapetsets yta, om dess baser, AB och CD, och dess höjd i nämnd ordning bildar en aritmetisk serie? (Nov. 51. 1. a.k.)

e) några uppgifter, där aritmetiska och geometriska serier kombineras

210. Tre tal, vilkas summa är 31, bildar en geometrisk serie. Om man ökar det andra talet med 8, uppstår en aritmetisk serie. Vilka är talen? (V. 21. 3. L)

211. En aritmetisk och en geometrisk serie har båda första termen $= 2$. Produkten av seriernas andra termer är $= 12$, och produkten av deras tredje termer $= 11$. Vilka är dessa serier? (V. 18. 1. L)

212. (R) En geometrisk och en aritmetisk serie består var och en av fem olika termer. Serierna har samma första term och samma tredje term. Den geometriska seriens andra term är lika med den aritmetiska seriens fjärde term. Bestäm förhållandet mellan de båda seriernas summor. (Aug. 53. 1. a.k.)

213. (R) Den aritmetiska serien 1, 3, 5, 7, 9,... innehåller som delserie den geometriska serien 1, 3, 9,... Hur många termer i den aritmetiska serien måste minst medtagas, för att summan av den geometriska serien skall överstiga 1000, och hur stor är då den aritmetiska seriens summa? (Mars 47. 2. a.k.)

214. (R) I en aritmetisk serie med olika termer och första termen 1 betecknas summan av de n första termerna med S_n. Summorna S_{27}, S_{36} och S_{48} bildar i nämnd ordning en geometrisk serie. Ange det enklaste uttrycket för S_n. (Mars 43. 2. a.k.)

f) problem på serier i allmänhet

215. Hur många termer skall medtagas i serien

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots$$

för att summan skall bli 421? (H. 24. 1. L)

216. Bestäm summan av n termer i följande serie av 10-logaritmer:

$$\log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \dots$$

Bestäm därefter de värden på n, för vilka summan är ett helt positivt tal. (Nov. 44. 3. a.k.)

217. (R) I en serie med första termen $= a$ är varje term med jämnt ordningsnummer $\frac{1}{2}$ enhet större än närmast föregående term och varje term med udda ordningsnummer $\frac{1}{3}$ enhet mindre än närmast föregående term. Summan av de 50 första termerna i serien är 150. Bestäm a. (Mars 49. 3. a.k.)

218. Radioaktiva ämnen sönderfaller på så sätt, att under en viss tidsperiod alltid samma procentuella mängd av ämnet omvandlas. För ett visst radiumpreparat har observerats, att av en ursprunglig mängd M efter 10 år återstår $0,996M$. Bestäm ämnets halveringstid, dvs. den tid som erfordras, för att hälften av en given mängd skall sönderfalla. (Jan. 49. 5. a.k.)

g) binomialteoremet

219. (R) Sök förhållandet mellan nionde och åttonde termerna i utvecklingen av

$$\left(\frac{2x^2}{y^3} + \frac{y^2 z}{4}\right)^{13}.$$

(Mars 38. 4. a.k.)

(A) Sammansatt ränta

a) några tillväxtproblem

220. En person har i testamente förordnat, att vid årsskiftet närmast efter hans död 15 000 kr skall avsättas till en stipendiefond. Vid slutet av vart och ett av de första trettio åren skall räntan läggas till kapitalet. I fortsättningen skall vid varje års slut avkastningen under året utdelas i form av ett stipendium. Beräkna dettas storlek, om räntefoten är 3,5 %. (Ändrat) (V. 34. 2. L)

221. Å vart och ett av två från början lika stora kapital har räntorna under 20 år vid varje års slut lagts till kapitalet. De årliga räntorna har beräknats å det ena kapitalet efter 6 % under de första 10 åren och efter 4 % under de sista 10 åren samt å det andra kapitalet efter 5 % under hela 20-årsperioden. Vilket av de båda kapitalen är störst vid 20-årsperiodens slut? (Nov. 35. 6. L)

222. En person placerade vid ett årsskifte 10 000 kr mot 4 % ränta på ränta. Vid varje årsskifte uttog han 25 % av den upplupna räntan för skatteändamål m.m. Återstoden kapitaliserades. Beräkna kapitalets storlek efter 10 år, sedan den vanliga uttagningen verkställts och kapitaliseringen skett, samt ange räntan för det tionde året. (Nov. 47. 3. L)

223. En person tog år 1921 en livförsäkring på 10 000 kr. Premien var 200 kr och erlades vid slutet av varje kalenderår, första gången vid slutet av år 1921. Personen avled år 1943, innan premien detta år erlagts. Försäkringen utbetalades vid början av år 1944. Till vilket sammanlagt belopp skulle de erlagda premierna ha vuxit vid denna tidpunkt, om de i stället för att inbetalas till försäkringsbolaget hade kunnat placeras så, att en årlig ränta av 4 % erhållits, och vilken placering skulle i detta fall varit fördelaktigast? (Nov. 44. 2. L)

224. En person insatte 10 000 kr i en bank den 31 december 1925 och 1000 kr den 31 december varje följande år t.o.m. den 31 december 1937. På sitt sålunda bildade kapital har han därefter en årlig ränteinkomst. Hur stor blir denna, om räntefoten antages vara 3 %? (Nov. 38. 3. L)

225. En person insatte 100 kr i en bank vid slutet av varannan månad fr.o.m. februari 1931 t.o.m. december 1940. Räntefoten var hela tiden 3 %, och räntan lades till kapitalet vid slutet av varje år. Hur mycket hade han innestående i banken den 1 januari 1941? (Nov. 41. 3. L)

226. En person hade vid början av ett år 1000 kr innestående i en bank. Den sista december insatte han däefter regelbundet varaje år 100 kr. Hur stort belopp hade han i banken, sedan han gjort den tionde insättningen, om ränta på ränta beräknades under de första 5 åren efter 4 % och under de därpå följande åren efter $2\frac{1}{2}$ %? (Nov. 46. 2. L)

227. En fond, som donerats till välgörande ändamål, uppgår vid början av år 1955 till 10 000 kr. Den får emellertid inte användas, förrän den vuxit till minst 15 000 kr. För att fonden skall nå denna storlek redan vid slutet av år 1960, förbinder sig en person att vid varje års slut, första gången år 1955 och sista gången år 1960, till fonden avsätta en så stor summa, att detta blir möjligt. Hur stor skall denna summa minst vara? Räntan beräknas efter 3 % och kapitaliseras vid slutet av varje år. (Mars 55. 2. L)

228. Hur mycket skall man vid början av vart och ett av 10 på varandra följande år insätta i en sparbank, för att ränteavkastningen under 10:e året skall bli 4000 kr? Räntefoten antages vara 3, 5 %. (H. 30. 1. L)

229. För reparationer och nyanskaffning vid en idrottshall fonderas av inkomsterna en viss summa vid varje års slut. Fonden uppgick vid slutet av femte året till 5310 kr, vilken summa då togs helt i anspråk för angivet ändamål. Utbetalning för nästa reparation och nyanskaffning beräknas inträffa efter ytterligare tio år. Hur stor summa står då till förfogande? Ränta på ränta beräknas efter 3 %. (Mars 40. 3. L)

b) några problem rörande amortering m.m.

230. En skuld på 10 000 kr växer med 5 % ränta på ränta. Efter 5 år avbetalas 4000 kr, 3 år senare 5000 kr, och efter ytterligare 2 år betalas återstoden. Hur stor blir denna sista inbetalning. (H. 97. R)

231. Ett lån på 20 000 kr upptogs den 31 december 1936 och skall amorteras med 2500 kr vid varje års slut, första gången den 31 dec. 1939. Hur mycket återstod av lånet den 31 dec. 1948, sedan amorteringen denna dag ägt rum? Räntefot 4 %. (April 37. 6. L)

232. En studerande, som vid början av ett år ärvde 30 000 kr, placerade hela detta belopp mot 5 % ränta. Under de tio första åren måste han vid varje års slut lyfta 3000 kr för att bestrida kostnaderna för sin utbildning. Härtill åtgick, utom räntan för året, en del av kapitalet. Hur mycket återstod av detta efter det tionde årets slut? (Mars 42. 2. L)

233. En fond utgjorde 16 000 kr vid början av år 1918. Ingen utbetalning gjordes under åren 1918–1926, men därefter utdelades ett stipendium på 800 kr i början av varje år. Hur stor var fonden i början av 1931, sedan årets stipendium utdelats? Fonden förräntades hela tiden efter 4 %, och räntan lades till kapitalet vid varje årsskifte. (Jan. 36. 5. L)

234. En person erhöll den 31 december 1932 ett lån på 10 000 kr mot 4 % ränta på ränta. Från och med år 1933 betalar han årligen den 31 december 600 kr i ränta och amortering. Dessutom betalar han den 31 december 1935 2000 kr och den 31 december 1937 3000 kr. Hur sotr är skulden den 31 december 1939 efter årets inbetalning? (Aug. 39. 4. L)

235. En statsskuld, som vid början av ett år var 7 300 000 kr, skall med 4 procents ränta betalas under loppet av 12 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Hur stor är den årliga inbetalningen? (Nov. 36. 4. L)

236. En person donerar vid början av ett år en fond på 100 000 kr till ett läroverk. Under de tio närmaste åren skall vid varje års slut ett belopp av 7000 kr utbetalas till ett visst ändamål, men efter den nämnda tidens förlopp skall fondens årliga avkastning användas till stipendier. Hur stor summa kan då årligen utdelas, om fonden hela tiden är placerad mot $3\frac{1}{2}$ % ränta? (Mars 41. 3. L)

237. En skuld på 12 000 kr skall amorteras under 20 år på så sätt, att vid slutet av vart och ett av femte, tionde, femtonde och tjugonde åren efter lånets upptagande inbetalas 3000 kr och vid slutet av vart och ett av de 20 åren dessutom en viss summa. Hur stor blir denna om räntefoten är 5 %? (Aug. 41. 5. a.k.)

238. Ett lån, löpande med 4 % ränta på ränta, skall amorteras genom lika stora annuiteter, den första ett år efter lånets erhållande. Beräkna annuitetens storlek i procent av lånesumman, om efter 10 år, sedan annuiteten erlagts, endast $\frac{1}{3}$ av lånet skall återstå. (Aug. 46. 2. a.k.)

239. En kommun upptar ett lån på 4 millioner kronor mot 4 % årlig ränta på ränta att genom lika stora årliga inbetalningar amorteras på 40 år. Hur mycket återstår av lånet efter 20 år? (H. 16. 3. L)

240. Ett lån återbetalas medelst annuiteter på 1600 kr. Första annuiteten erlades ett år efter lånets upptagande. Då sjunde annuiteten erlagts, uppgick återstoden av lånet till 523 kr. Hur stort var lånet från början? Ränta på ränta beräknas efter 4 %. (Aug. 40. 2. L)

241. En skuld på 10 000 kr skall avbetalas under 10 år på så sätt, att vid slutet av vart och av de 5 första åren betalas ett visst belopp och vid slutet av vart och ett av de sista 5 åren ett dubbelt så stort belopp. Bestäm storleken av dessa belopp, om räntefoten är 3 %. (Mars 43. 2. L)

242. En person erhöll ett lån, som skulle amorteras genom 10 lika stora annuiteter, erlagda vid slutet av varje år med början ett år efter lånets upptagande. Hur många procent av lånets ursprungliga belopp återstod att betala, omedelbart efter det att den femte annuiteten erlagts? Ränta på ränta beräknas efter 4 %. (Aug. 54. 2. a.k.)

c) några nuvärdesproblem

243. En person hade förbundit sig att till en stiftelse utbetala 1000 kr vid början av vart och ett av åren 1920 till och med 1939. Personen avled år 1926 (betalningen för detta år var erlagd), och arvingarna önskade genom en enda inbetalning i början av år 1927 infria vad som återstod av den åtagna förbindelsen. Hur stor summa skulle de då erlägga, om ränta på ränta beräknas efter 4 %. (Aug. 35. 5. L)

244. En studerande erhöll i början av år 1947 ett räntefritt lån på 10 000 kr att återbetalas med en femtedel av lånesumman vid början av vart och ett av åren 1953–1957. Beräkna värdet vid tidpunkten för lånets mottagande av den gåva, som studeranden genom denna räntefrihet kan sägas ha erhållit, om man beräknar ränta efter 3 % och denna tänkes kapitaliserad vid varje års slut. (Mars 48. 4. L)

245. En penninganstalt har iklätt sig skyldighet att under 24 år vid slutet av vart år till en person (eller eventuellt hans arvingar) utbetala ett visst, alltid lika stort belopp. Hur stor summa kan personen ifråga, då räntefoten är $3\frac{1}{2}$ %, vid första årets början utbekomma av anstalten, därigenom att den förstnämnda årliga utbetalningen fastställes till ett 500 kr lägre belopp än det ursprungligen bestämda? (V. 22. 5. L)

246. En villaägare tog i slutet av år 1931 ett amorteringslån å 10 000 kr till en räntefot av 4 %, vilket skulle amorteras genom lika stora annuiteter vid slutet av vart och ett av de följande 30 åren. Vid slutet av år 1938, innan den då förfallna annuiteten erlagts, såldes villan, varvid köparen också övertog amorteringslånet, som han skulle fortsätta att amortera enligt den nämnda planen. Till vilket belopp skall köparen då uppskatta återstoden av lånet, om han beräknar kunna låna pengar till 3, 5 %? (Nov. 39. 3. a.k.)

247. En person ämnar bli medlem av Svenska Turistföreningen. Årsavgiften, som erlägges i förskott, är 10 kr, men genom att erlägga 200 kr på en gång kan man bli s.k. ständig medlem. En sådan erlägger icke ytterligare avgift till föreningen men har samma förmåner som en årligen betalande medlem. Hur många årsavgifter kan personen beräknas erlägga, för att det skall löna sig för honom att bli ständig medlem? Ränta på ränta beräknas efter 3 %, och räntan tänkes kapitaliserad vid samma tidpunkt varje år, nämligen då medlemsavgifterna erlägges. (Aug. 49. 6. L)

248. Av två olika hushållsspisar kostar den ena i inköp 200 kr, den andra 800 kr. Den årliga kostnaden vid användning beräknas för den förra spisen bli 100 kr, för den senare däremot endast 65 kr. Båda spisarna beräknas vara lika hållbara. Hur många år skall de vara i bruk, för att den dyrare spisen skall ställa sig ekonomiskt fördelaktigare än den andra? Man antar, att de årliga kostnaderna erlägges vid årets slut. Ränta beräknas efter 5 %. (Jan. 42. 6. L)

d) några problem, där räntefot eller tid skall bestämmas

249. Den svenska kronans realvärde beräknas ha minskat med 50 % under åren 1938–1952, dvs. för en krona fick man i slutet av år 1952 blott hälften av den varumängd, som man i början av år 1938 kunde ha köpt för samma mynt. Efter vilken räntefot borde ett kapital ha förräntats i en bank, om det vid början av år 1953 skulle ha haft samma realvärde, som det hade vid insättningen i banken vid början av år 1938? Räntan tänkes kapitaliserad vid varje års slut. (Nov. 54. 2. a.k.)

250. En person upptog vid början av ett år ett lån på 5000 kr och återbetalade detsamma jämte enkel ränta efter 12 år. Efter vilken procent beräknades räntan, om man vet, att han skulle ha fått erlägga 5 kr mera, ifall räntan kapitaliserats vid varje års slut och beräknats efter 4 %? (Mars 45. 1. L)

251. En person får låna en viss penningsumma vid början av år 1943 mot att han betalar antingen 225 kr vid slutet av vart och ett av åren 1943, 1944,..., 1952 eller 459 kr vid slutet av vartannat år, nämligen åren 1944, 1946, ..., 1952. De båda betalningssätten är likvärdiga. Efter vilken räntefot beräknas årlig ränta på ränta? (Nov. 43. 5. L)

252. En person har vid ett års början 50 000 kr placerade mot 5 % ränta. Vid varje års slut lyfter han ett belopp, som utgör 30 % av årets ränta, undert det att återstoden lägges till kapitalet. Vid början av vilket år inträffar det första gången, att kapitalet överstiger 75 000 kr? (Nov. 50. 4. L)

253. Hur länge kan ur en fond å 20 000 kr utgå ett årligt stipendium å 1200 kr, då räntefoten är 5 % och stipendiet varje år utbetalas vid årets slut? (H. 13. R)

254. En donation å 5000 kr får ej användas, förrän kapitalet genom 4,5 % ränta på ränta vuxit till 20 000 kr. Hur länge dröjer det, om vid slutet av varje år 50 kr avsättes till förvaltningsarvode? (H. 20. 2. L)

255. Ett lån på 10 000 kr upptogs i början av år 1950 mot 3 % årlig ränta på ränta. Vid slutet av varje år erlägges som ränta och amortering en annuitet av 500 kr. Vid början av vilket år inträffar det för första gången, att den återstående skulden understiger hälften av det ursprungliga lånebeloppet? (Mars 54. 5. L)

256. En person stiftade vid ett års början en stipendiefond å 6500 kr med föreskrift, att vid årets slut och därefter likaledes vid varje följande års slut ett stipendium på 100 kr skulle utdelas, så länge den årliga räntan understege 400 kr. Hur många gånger utdelades ett sådant stipendium, då räntefoten var 4 %. (V. 35. 5. L)

257. En person har lånat en summa vid början av år 1940. Ett visst antal år behöver han inte göra några inbetalningar men skall sedan amortera skulden genom 10 annuiteter, vilka var och en utgör 15 % av det ursprungliga lånet. När skall han erlägga den första annuiteten? Ränta på ränta beräknas efter 3 %. (Nov. 46. 2. a.k.)

258. Ett lån som löper med 4 % ränta, skall amorteras genom 40 lika stora inbetalningar, erlagda med ett års mellanrum och den första ett år efter lånets erhållande. Hur många dylika inbetalningar måste göras, innan den återstående skulden understiger hälften av lånets ursprungliga belopp? (V. 27. 5. L)

e) några allmänna problem

259. För att kunna åtaga sig en större beställning måste ett industriföretag göra vissa nyanläggningar, vilka kostnadsberäknas till 900 000 kr. På grund av värdeminskning genom förslitning kan anläggningarna efter tio år beräknas vara värda endast 150 000 kr. Med hur mycket måste den årliga vinsten, beräknad till varje års slut, minst ökas under denna tioårsperiod, för att de planerade anläggningarna inte skall ställa sig ekonomiskt ofördelaktiga? Ränta på ränta beräknas efter 4 %. (Jan. 54. 3. a.k.)

260. En person skall under tio år amortera ett lån genom lika stora annuiteter på 647,60 kr. Han erhåller dock tillstånd att i stället erlägga endast upplupen ränta under vart och ett av de fem första åren och sedan amortera skulden genom inbördes lika stora annuiteter under de fem senare åren. Hur stora skall dessa annuiteter vara, om räntefoten är 5 %? (Aug. 37. 1. a.k.)

261. Vid början av vart och ett av 10 på varandra följande år placerar en person 1000 kr mot 4 % årlig ränta, vilken vid slutet av varje år lägges till kapitalet. Det på detta sätt samlade kapitalet ämnar han förbruka genom att vid början av vart och ett av de därpå följande 10 åren uttaga ett visst belopp. Hur stort blir detta? (Mars 47 2. L)

262. En person ämnar vid slutet av varje år fr.o.m. 1942 t.o.m år 1951 i en bank insätta ett så stort belopp, att han vid början av vart och ett av tio på varandra följande år fr.o.m. 1963 kan lyfta 1000 kr. Hur stort skall det förstnämnda beloppet minst vara, om räntefoten hela tiden antages vara 3,5 %? (Aug. 42. 2. L)

263. En tjänsteman erhåller fr.o.m. år 1935 en årlig pension av 5400 kr. Han har fr.o.m. år 1900 t.o.m. år 1934 erlagt en årlig pensionsavgift av 270 kr. Om de inbetalade pensionsavgifterna skulle användas till pensionen, hur många år skulle denna då kunna utbetalas? Räntefoten är 4 %. Såväl pensionen som pensionsavgiften tänkes utbetalad i förskott varje år. (Nov. 40. 8. L)

264. Ett lån togs vid början av ett år. Räntefoten var då 3 %. Lånet beräknades bli betalt genom 20 lika stora annuiteter, vardera på 1500 kr, vid slutet av varje år fr.o.m. det år då lånet erhölls. Räntefoten höjdes emellertid till $3\frac{1}{2}$ % fr.o.m. det elfte året. Med vilket belopp måste annuiteten höjas de sista tio åren, för att lånet skulle bli betalt i rätt tid? (Nov. 51. 4. a.k.)

Analytisk geometri

a) allmänna problem rörande punkter och räta linjer

265. Från skärningspunkten mellan de räta linjerna $y = 2x + 3$ och $y = 3x - 2$ drages en normal mot linjen $8x + 11y + 2 = 0$. Sök normalens ekvation och längd. (Jan. 38. 3. a.k.)

266. En rät linje, som går genom punkterna $(+1;\ +3)$ och $(+3;\ +4)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem, råkar y-axeln i punkten A. Genom punkten $(+3;\ +2)$ går en mot denna linje vinkelrät rät linje, som råkar densamma i B och x-axeln i C. Beräkna ytinnehållet av den fyrsiding, vars hörn utgöres av origo samt punkterna A, B och C. (Nov. 37. 2. a.k.)

267. Bestäm ekvationen för den kortaste medianen i en triangel, vars sidor faller utefter linjerna $y = 4x + 11$, $2y = x + 1$ och $2x + 3y = 5$. Beräkna även medianens längd. (Mars 44. 2. a.k.)

268. Två räta linjer med ekvationerna $2x + y + 1 = 0$ och $x + 2y - 1 = 0$ är givna. Sök ekvationerna för de räta linjer genom punkten $(4;\ -4)$ som med de givna linjerna bildar rätvinkliga trianglar, samt beräkna ytorna av dessa trianglar. (Mars 43. 1. a.k.)

269. Genom punkten $(+4;\ 0)$ drgaes en rät linje, som tillsammans med x-axeln och linjen $4x - y + 8 = 0$ bildar en triangel med ytan 12 ytenheter. Bestäm ekvationen för denna räta linje. (Aug. 37. 2. a.k.)

270. En rät linje genom punkten $P\ (5;\ 4)$ bildar med x-axeln och den räta linjen $2x - y - 6 = 0$ en triangel. Då den förstnämnda linjen vrider sig kring punkten P, inträffar det för vissa lägen, att triangelns yta blir 14 ytenheter. Vilken är då linjens ekvation? (Aug. 42. 1. a.k.)

271. En rektangel har ett hörn i origo, ett hörn i punkten $(-2;\ 6)$ och den ena diagonalen utefter den räta linjen $x + 7y - 40 = 0$. Bestäm koordinaterna för de återstående hörnen. (Mars 54. 1. a.k.)

272. En rektangel har ett hörn på x-axeln, det motstående hörnet på y-axeln och ett av de återstående hörnen på linjen $x = 3$. Rektangelns diagonaler skär varandra i punkten $(1;\ 2)$. Ange koordinaterna för rektangelns hörn. (Nov. 53. 1. a.k.)

273. En rätvinklig triangels hypotenusa har sina ändpunkter i punkterna $(0;\ -3)$ och $(10;\ 2)$. Fotpunkten för höjden mot hypotenusan ligger på x-axeln. Ange läget av den räta vinkelns spets. (Jan. 49. 2. a.k.)

274. I ett koordinatsystem är punkterna $A\ (4;\ -1)$ och $C\ (-8;\ -5)$ givna. Bestäm två punkter B och D, så att deras sammanbindningslinje har vinkelkoefficienten 3 och fyrhörningen $ABCD$ är en rektangel. Beräkna även ytan av denna rektangel. (Jan. 48. 4. a.k.)

275. I en triangel ABC är sidorna AB och AC lika stora. Hörnet A är beläget i punkten $(2;\ 5)$ och hörnet B i punkten $(4;\ 1)$. Höjden mot sidan BC går genom punkten $(0;\ 1)$. Beräkna koordinaterna för hörnet C. (Aug. 44. 1. a.k.)

276. (**R**) Två på varandra följande hörn i en romb är belägna i punkterna $(2;\ 5)$ och $(13;\ 8)$. Diagonalernas skärningspunkt ligger på den räta linjen $5x + y - 57 = 0$. Ange koordinaterna för rombens övriga hörn i de båda fall, som är möjliga. (Aug. 52. 3. a.k.)

277. (**R**) Ekvationerna för två sidor i en triangel är $2x + y - 9 = 0$ och $x + 2y + 6 = 0$. Den kring triangeln omskrivna cirkelns medelpunkt är belägen i punkten $(6;\ 2)$. Bestäm den tredje sidans ekvation. (Mars 46. 1. a.k.)

278. (**R**) Punkterna $(-2;\ -1)$ och $(-4;\ 3)$ är mittpunkter på två motstående sidor i en romb. Rombens ena diagonal är parallell med linjen $x - y = 0$. Bestäm koordinaterna för rombens hörn. (Aug. 50. 3. a.k.)

279. Hörnen i en triangel är belägna i punkterna $A\ (2;\ 0)$, $B\ (-4;\ 3)$ och $C\ (4;\ 9)$. En med sidan BC parallell transversal har en längd inom triangeln av 6 längdenheter. Sök transversalens ekvation. (Nov. 49. 1. a.k.)

280. (**R**) I en triangel är mittpunkterna på två sidor belägna i punkterna $(1,5;\ 0)$ respektive $(3,5;\ 1)$. Medianerna skär varandra i punkten $(2;\ 1)$. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor. (Mars 47. 1. a.k.)

281. (**R**) Ekvationerna för två sidor i en triangel är $2x-y+6=0$ och $x+y-12=0$. Bestäm ekvationen för den tredje sidan, då dess mittpunkt är $(3;\ 3)$. (Nov. 44. 1. a.k.)

282. (**R**) I en triangel ABC har sidan AB ekvationen $2x-y+11=0$ och den från A dragna medianen ekvationen $3x+y-1=0$. Den från B dragna medianen skär sidan AC i punkten $(3;\ 2)$. Bestäm koordinaterna för triangelns hörn. (Jan. 50. 3. a.k.)

283. Kateterna i en rätvinklig triangel ligger utefter linjerna $2x-y+5=0$ och $x+2y+3=0$. Hypotenusans mittpunkt är punkten $(-4;\ -5)$. Bestäm ekvationen för den linje, utefter vilken hypotenusan ligger. (Nov. 40. 6. a.k.)

284. (**R**) Ekvationerna för två sidor i en triangel är $4x-y+4=0$ och $3x+y-4=0$. Triangelns tyngdpunkt ligger i punkten $(0;\ -\frac{2}{3})$. Vilken är ekvationen för triangelns tredje sida? (Aug. 46. 3. a.k.)

285. (**R**) Triangeln OAB har hörnet O i origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, hörnet A på x-axeln och hörnet B i punkten $(1;\ 3)$. Triangelns tyngdpunkt och den punkt, där triangelns höjd från O skär medianen från B, delar nämnda median i tre lika stora delar. Sök koordinaterna för hörnet A. (Jan. 54. 4. a.k.)

286. (**R**) Ett parallelltrapets $ABCD$, vars parallella sidor AB och CD förhåller sig som $1:2$, har hörnet A i punkten $(-3;\ 6)$ och hörnet D på x-axeln. Diagonalerna AC och BD skär varandra under räta vinklar i punkten $(-1;\ 2)$. Bestäm sidornas ekvationer. (Aug. 47. 3. a.k.)

287. (**R**) I en triangel ABC är $D\ (3;\ 2)$ och $E\ (5;\ 0)$ mittpunkter på sidorna AB och AC samt $F\ (4;\ -3)$ fotpunkten för höjden från A mot BC. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor. (Mars 45. 3. a.k.)

288. (**R**) Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten $(-4;\ -4)$ och hörnet B i punkten $(8;\ 2)$. Höjden mot sidan AB skär medianen mot sidan BC i origo. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor. (Mars 52. 3. a.k.)

289. (**R**) I triangeln ABC utgöres ett hörn av punkten $A\ (2;\ 2)$, hörnet B ligger på linjen $x-3y+6=0$, och medianen till sidan AC är 3 längdenheter. Medianerna skär varandra i origo. Bestäm koordinaterna för B och C. (Nov. 42. 5. a.k.)

290. (**R**) Beräkna avståndet mellan medianernas skärningspunkt och bisektrisernas skärningspunkt i en triangel, i vilken två sidor är $AB=10$ och $AC=16$ cm och mellanliggande vinkel 60°. (Nov. 37. 7. a.k.)

291. (**R**) En rätvinklig triangel, vars yta är 130 ytenheter, har den räta vinkelns spets i origo och hypotenusan utefter den räta linjen $x+y=10$. Beräkna koordinaterna för mittpunkten på hypotenusan. (Nov. 39. 6. a.k.)

292. (**R**) I ett parallelltrapets $ABCD$ är diagonalerna vinkelräta mot varandra. Ändpunkterna A och B av en av de parallella sidorna är belägna i punkterna $(-4;\ 4)$ och $(-1;\ -2)$. De icke parallella sidornas förlängningar skär varandra i punkten $(3{,}5;\ -2)$. Bestäm koordinaterna för punkterna C och D. (Mars 48. 5. a.k.)

293. (**R**) Hörnet A i en romb $ABCD$ ligger i punkten $(-2;\ -4)$ och hörnen B, C och D på de räta linjerna $x + y - 1 = 0$, $x - 8 = 0$ respektive $x - y = 0$. Bestäm koordinaterna för de tre sistnämnda hörnen. (Mars 50. 5. a.k.)

b) några analytisk-geometriska bevis

294. En triangels hörn ligger i punkterna $A\,(-1\frac{3}{4};\ -2)$, $B\,(1;\ 3\frac{1}{2})$ och $C\,(4;\ -3)$. Höjden från C och dennas förlängning skär koordinataxlarna i punkterna D och E. Bevisa, att triangeln ADE är likbent. (Mars 41. 1. a.k.)

295. O är origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, A en punkt på negativa x-axeln och B en punkt på negativa y-axeln. På hypotenusan AB och kateten AO i den rätvinkliga triangeln ABO uppritas utåt kvadraterna $ABCD$ och $AOPQ$. Bevisa, att de räta linjerna DO och BQ skär varandra under räta vinklar. (Nov. 45. 1. a.k.)

296. En triangel har sina hörn i punkterna $(0;\ 0)$, $(4;\ 0)$ och $(0;\ 3)$. Varje hörn förbindes med den punkt, i vilken den inskrivna cirkeln tangerar motstående sida. Visa, att de tre räta linjerna går genom samma punkt. (Aug. 39. 3. a.k.)

297. (**R**) På kateterna i en rätvinklig triangel uppritas utåt kvadrater. Diagonalernas skärningspunkt i vardera kvadraten sammanbindes med motstående hörn i triangeln. Bevisa, medelst analytisk geometri eller på annat sätt, att de båda sammanbindningslinjerna råkas på bisektrisen till den räta vinkeln i triangeln. (Nov. 50. 4. a.k.)

298. (**R**) Hörnen i fyrsidingen $OACB$ har koordinaterna $O\,(0;\ 0)$, $A\,(a;\ 0)$, $C\,(2a;\ 3b)$, $B\,(0;\ b)$. Linjen CB skär OA i punkten D, linjen CA skär OB i punkten E. Linjerna CO och AB skär linjen DE i punkterna P respektive Q. Visa, att $EP : PD = EQ : QD$. (Nov. 46. 4. a.k.)

299. (**R**) I rektangeln $OABC$ ligger punkten P på sidan OA och punkten Q på sidan OC. Sammanbindningslinjerna CP och AQ skär varandra i punkten R. Punkten S är det fjärde hörnet i en rektangel, vars övriga hörn är O, P och Q. Bevisa med hjälp av analytisk geometri, att punkterna B, S och R ligger på en rät linje. (Mars 55. 5. a.k.)

300. (**R**) En rektangel $OABC$ är placerad så, att sidorna OA och OC faller utefter de positiva axlarna i ett koordinatsystem. Från hörnet B fälles normalen BN mot diagonalen AC. Rektangelns sidor är variabla, men dess omkrets är konstant $(= 2p)$. Visa, att linjen BN alltid går genom en fix punkt. (Nov. 51. 7. a.k.)

301. (**R**) I ett rätvinkligt koordinatsystem är O origo, A en punkt på x-axeln och B en punkt på y-axeln. En rät linje genom A träffar OB i en punkt C mellan O och B så, att $OC : CB = 2 : 3$. En rät linje genom B träffar OA i en punkt D mellan O och A så, att $OD : DA = 3 : 2$. Linjerna AC och BD skär varandra i E.

Från O är en linje dragen genom E; den träffar AB i F. Bestäm förhållandet $AF : FB$. (Uppgiften kan lösas antingen med analytisk geometri eller med euklidisk geometri.) (H. 35. 9. R)

302. (**R**) I en godtycklig triangel är H höjdernas skärningspunkt, M medianernas skärningspunkt och N mittpunktsnormalernas skärningspunkt. Bevisa – lämpligen medelst analytisk geometri – att H, M och N ligger i rät linje samt att M delar sträckan HN innantill i förhållandet $2 : 1$ (Satsen om Eulers linje. (Jan. 42. 8. a.k.)

Hela rationella funktioner

a) allmänna problem rörande kurvor, deras tangenter och normaler

303. Upprita kurvan $10y = x^4 - 8x^2 + 7$. Ange särskilt kurvans skärningspunkter med koordinataxlarna samt dess maximi- och minimipunkter. (Aug. 47. 1. a.k.)

304. Upprita kurvorna $16y = 3x^3 - 36x$ och $27y = 27x - x^3$ i deras huvuddrag. Visa, att kurvornas maximi- och minimipunkter utgör hörn i en kvadrat. (Mars 45. 2. a.k.)

305. Hörnen A och B i ett parallelltrapets $ABCD$ ligger på den räta linjen $x+y+2 = 0$. Hörnen C och D ligger i första kvadranten och på kurvan $y = x^2$. Sidorna AD och BC är parallella med x-axeln och halveras av samma kurva i andra kvadranten. Bestäm koordinaterna för trapetsets hörn. (Jan. 52. 3. a.k.)

306. Konstruera kurvan A med ekvationen $y = 3x^2 - x^3$ i dess huvuddrag. Undersök och åskådliggör i samma koordinatsystem den funktion B, som anger, hur vinkelkoefficienten (riktningskoefficienten) för tangenten i en punkt på kurvan A beror av tangeringspunktens x-koordinat. Använd slutligen funktionen B och dess grafiska bild för att utreda, vilka riktningsvinklar tangenten till kurvan A kan ha, när tangeringspunkten genomlöper kurvan. (Mars 52. 6. a.k.)

307. I punkten $(-1;\ -6)$ på kurvan $y = 2x^3-3x^2-1$ är en tangent dragen. Visa, att det stycke av tangenten, som ligger mellan tangeringspunkten och tangentens skärningspunkt med y-axeln, delas mitt itu av x-axeln. (H. 19. 4. R.)

308. I skärningspunkterna mellan den räta linjen $x + y = 3$ och kurvan $x^2 = 4y$ drages tangenterna till kurvan. Sök skärningspunkterna mellan dessa tangenter. (Aug. 41. 2. a.k.)

309. En kurvas ekvation är $y = 16 + 5x - 2x^2$. I punkten $(2;\ 18)$ på kurvan är tangenten dragen. En rät linje genom punkten $(2;\ 0)$ är parallell med denna tangent och skär kurvan i A och B. Beräkna längden av kordan AB. (Jan. 39. 3. a.k.)

310. I de punkter på kurvan $4y = x^4 - 10x^2 + 9$, där x-koordinaterna är 2 respektive -2, drages tangenterna och normalerna till kurvan. Bestäm ytan av den fyrhörning, som dessa linjer begränsar. (Jan. 40. 2. a.k.)

311. Till kurvan $y = x^2$ har man dragit tangenterna från punkten $(\frac{1}{2};\ -2)$ samt en tangent parallellt med den korda, som förenar de förstnämnda tangenternas tangeringspunkter. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av de tre tangenterna. (Aug. 48. 5. a.k.)

312. Visa, att kurvorna $8x^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ och $x^2 + 2x + 2y + 2 = 0$ endast har en punkt gemensam och att de i denna punkt ha samma tangent. Ange ekvationen för denna tangent och upprita kurvorna. (Aug. 44. 2. a.k.)

313. Upprita kurvan $y = -x^4 + 4x^2$, och ange eventuella maximi- och minimipunkter samt skärningspunkter med axlarna. Sök därefter tangeringspunkterna för de tangenter till kurvan, som är parallella med linjen $y = 4x + 1$. (Nov. 48. 1. a.k.)

314. Till kurvan $3y = 2x^3 - 3x$ kan dragas två tangenter, som är parallella med linjen $x - y = 0$. Var och en av dessa tangenter råkar kurvan i en annan punkt än tangeringspunkten. Bestäm dessa punkter. (H. 33. 5. R)

315. En rät linje med riktningsvinkeln 45° tangerar kurvan $3y = x^3 - 4x^2$ i en punkt A och skär den dessutom i en punkt B. Bestäm koordinaterna för punkterna A och B. (Aug. 45. 2. a.k.)

316. I den utanför origo belägna skärningspunkten mellan kurvorna $y = ax^2$ och $y = x^3$ uppritas normalen till vardera kurvan. Visa, att ytan av den triangel, som bildas av dessa normaler och ordinataxeln, har ett av konstanten a oberoende värde. (H. 34. 7. R)

317. Konstruera kurvan $y = x^3 - 5x^2 + 7x$ med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter. Bestäm därefter ekvationerna för de tangenter, som går genom origo. (Jan. 53. 3. a.k.)

318. Tangenten i punkten $P(-3;\ -2)$ till kurvan $y = x^3 + 3x^2 - 2$ skär kurvan i en punkt Q. Beräkna vinkeln mellan tangenten i P och tangenten i Q. (Jan. 38. 7. a.k.)

319. Två punkter $P\,(x_1;\ y_1)$ och $Q\,(x_2;\ y_2)$ ligger på kurvan $y = x^2$. Sträckan PQ eller dess förlängning skär y-axeln i punkten A, och en med PQ parallell tangent skär y-axeln i punkten B. Beräkna längden av sträckan AB, uttryckt i x_1 och x_2. (Jan. 49. 3. a.k.)

320. På kurvan $y = x^3 - 3x$ har man tagit en punkt P, vars x-koordinat betecknas med a. Tangenten till kurvan i P skär denna dessutom i en punkt R. En triangel har två hörn i P och R och det tredje i origo. Beräkna dess yta uttryckt i a. (V. 35. 8. R)

321. Upprita kurvan $y = x^3 + 2x^2$ i dess huvuddrag. Visa, att den räta linjen $3x - 4y + 9 = 0$ tangerar kurvan, och sök ekvationen för en tangent, som är vinkelrät mot nämnda linje. (Aug. 46. 7. a.k.)

322. Upprita en kurva över funktionen $y = x^3 - 3x$. Från punkten $(1\frac{1}{3};\ -4)$ drages tangenter till kurvan. Var tangerar dessa? Sök även tangenternas ekvationer och den vinkel, de bildar med varandra. (Maj 36. 6. R)

323. Två normaler till kurvan $2y = x^2 + 2x + 4$ bildar tillsammans med x-axeln en likbent triangel med basen längs x-axeln och tyngdpunkten i kurvans minimipunkt. Bestäm ekvationerna för dessa normaler. (Aug. 52. 4. a.k.)

324. (**R**) Upprita kurvan $y = 2x - x^3$ i dess huvuddrag med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter. Genom origo går tre räta linjer, som är normaler till kurvan. En av dem har fotpunkten i origo, d.v.s. den är normal till kurvan i denna punkt. Vilka är de båda andra normalernas fotpunkter? (Nov. 50. 6. a.k.)

325. (**R**) Visa, att normalen i punkten $(-2;\ 0,5)$ till kurvan $y = x^2 + 8x + 12,5$ går genom origo. Finns ytterligare någon normal till kurvan med samma egenskap? Ange i så fall dess ekvation. (Jan. 42. 6. a.k.)

326. (**R**) Bestäm ekvationerna för de gemensamma tangenterna till kurvorna $y = x^2$ och $2y = 4x - x^2 - 2$. (Nov. 53. 4. a.k.)

327. (**R**) Ange ekvationen för den gemensamma tangenten till de båda kurvorna $y = x^3$ och $y = x^3 + 4$. Bestäm därefter koordinaterna för de punkter, där tangenten skär kurvorna. (Mars 41. 4. a.k.)

328. (**R**) Bestäm ekvationen för den gemensamma normalen till de båda kurvorna $y = x^2 - 2x + 1$ och $y = x^2 + 2x - 1$. (Nov. 45. 4. a.k.)

329. (**R**) Upprita kurvan $4y = x^4 - 4x^3$ i dess huvuddrag. Bestäm ekvationen för den tangent till kurvan, som tangerar densamma i tvenne punkter. (Nov. 43. 8. a.k.)

b) konstantbestämningar i funktioner

330. Kurvan $3y = ax^4 + bx^3 - a^2$ har en minimipunkt i punkten $(1;\ -\frac{10}{3})$. Bestäm konstanterna a och b samt upprita kurvan. (Mars 53. 4. a.k.)

331. En storhet y är en funktion av en annan storhet x, som kan anta alla värden fr.o.m. 10 t.o.m. 30. Sambandet mellan y och x uttryckes genom ekvationen $y = ax^2 + bx^3$, där a och b är konstanter. För $x = 12$ resp. 18 är motsvarande värden på $y = 16$ resp. 27. Bestäm för vilket värde på x värdet på y blir störst, och upprita motsvarande kurva inom variationsområdet. (Mars 54. 2. a.k.)

332. Bestäm konstanterna a, b och c, så att funktionen $ax^3 - (a^2 + 1)x^2 + bx + c$ får ett minimum $= 4$ för $x = 1$ och så att den för $x = -1$ antar värdet -8. (Jan. 51. 4. a.k.)

333. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = (a^2 - 1)x^4 - (a^2 + 2a)x^3 + 2(a+1)x^2 + b$, så att y antar ett maximivärde $= 4$ för $x = 1$. (Aug. 55. 2. a.k.)

334. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = a + bx - x^2$, så att motsvarande kurva går genom punkterna $(-1;\ 0)$ och $(0;\ 2)$. Beräkna därefter ytan av den triangel, som bildas av kurvans normaler i de nämnda punkterna samt dessa punkters sammanbindningslinje. (Aug. 42. 2. a.k.)

335. Diskutera och upprita kurvan $y = ax^4 + bx^3$, då man vet, att den har ett minimum i punkten $(1;\ -1)$. (Nov. 41. 3. a.k.)

336. Vilket värde måste konstanten a ha, för att x-axeln skall vara tangent till kurvan $y = x^2 - 2x + 3 + a(x-1)$? (H. 17. 2. R)

337. Diskutera och upprita kurvan $y = ax^3 + bx^2$, då man vet, att den skär x-axeln i punkten $(4,5;\ 0)$ och att dess normal i denna punkt skär y-axeln i punkten $(0;\ ^2/_3)$. (Jan. 41. 3. a.k.)

338. Bestäm konstanterna a och b i ekvationen $y = x^4 - x^3 + ax^2 + bx$, så att tangenten i origo till motsvarande kurva skär denna i punkten $(2;\ 4)$. Ange även, var denna tangent ytterligare skär kurvan. (För nöjaktig behandling kräves icke, att kurvan uppritas.) (Nov. 46. 1. a.k.)

339. I funktionen $y = x^4 - ax^2$ är a en positiv konstant. Bestäm denna konstant så, att motsvarande kurvas maximi- och minimipunkter blir hörn i en liksidig triangel. (Nov. 54. 3. a.k.)

340. Kurvorna $y = f(x)$ och $y = f'(x)$, där $f(x) = x^3 + ax + b$ och $f'(x)$ är derivatan av $f(x)$ med avseende på x, skär varandra i en punkt med x-koordinaten 1. Kurvan $y = f(x)$ har en minimipunkt, i vilken kurvan tangerar x-axeln. Bestäm värdena på konstanterna a och b, och upprita kurvorna i samma koordinatsystem. (Mars 50. 4. a.k.)

341. Funktionen $y = x^3 + 3cx^2 + c$, där c är en konstant, har ett maximivärde som är dubbelt så stort som funktionens minimivärde. Bestäm konstanten c. (Nov. 53. 1. sp.k.)

342. På en kurva med ekvationen $y = ax^3 + bx$, där a och b är konstanter, är $A\ (x;\ y)$ en fast punkt och $B\ (x + \Delta x;\ y + \Delta y)$ en rörlig punkt. Riktningskoefficienten (vinkelkoefficienten) för sekanten AB har värdet $5/4$ för $\Delta x = 1$ och värdet $3/5$ för $\Delta x = 0,1$, samt går mot gränsvärdet $5/9$ då Δx går mot 0. Bestäm konstanterna a och b samt koordinaterna för punkten A. Upprita slutligen kurvan i dess huvuddrag. (Aug. 55. 6. a.k.)

343. (**R**) För vissa värden på konstanten k är normalen i origo till kurvan $ky = x^3 - 8x^2 + 15x$ också tangent till kurvan. Bestäm dessa värden på k. (Aug. 54. 6. a.k.)

344. (**R**) Kurvorna $y = ax^2 - bx$ och $y = ax - bx^2$ skär varandra i två punkter under räta vinklar. Bestäm konstanterna a och b. Upprita kurvorna för dessa värden på a och b, och beräkna ytan av den fyrsiding, som inneslutes mellan tangenterna i kurvornas skärningspunkter. (Mars 47. 5. a.k.)

345. (**R**) Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = ax^3 + bx^2$ så, att funktionskurvan går genom punkten $(2;\ -2)$ och dess normal i denna punkt går genom kurvans utanför origo belägna skärningspunkt med x-axeln. Konstruera därefter kurvan, samt bestäm normalens återstående skärningspunkt med kurvan. (Mars 49. 7. a.k.)

346. (**R**) Diskutera kortfattat utseendet av kurvorna $y = x^n$ för olika positiva heltalsvärden på n. På en sådan kurva väljes en godtycklig punkt P med positiva koordinater. Genom P drages dels en rät linje parallell med x-axeln, dels normalen till kurvan i punkten. Dessa linjer bildar tillsammans med y-axeln en rätvinklig triangel. Undersök, om det finns något värde på n, för vilket ytan av denna triangel är oberoende av P:s läge, och ange i så fall ytan för detta n-värde. (Aug. 40. 8. a.k.)

347. (**R**) Kurvorna $y = x^3 + ax$ och $y = x^4 + bx$, där a och b är konstanter, har minimum i samma punkt. Bestäm övriga gemensamma punkter och konstruera kurvorna. (Jan. 46. 7. a.k.)

348. (**R**) Kurvan $y = f(x)$, där $f(x)$ är ett polynom av tredje graden, har en minimipunkt i $(a;\ -a)$ och en maximipunkt i $(-a;\ a)$, där a är en konstant. Visa, att detta är möjligt, endast om $a > 0$. Kurvan har en tangent, som går genom minimipunkten utan att tangera kurvan i denna punkt. Sök denna tangents ekvation. (Jan. 54. 7. a.k.)

349. (**R**) Den kurva, som motsvarar ekvationen $y = ax^4 + bx^2$, där a och b är konstanter, har ett minimum och två maxima, vilka utgöra hörn i en liksidig triangel. Bestäm tecknen för a och b, och ange det algebraiska sambandet mellan dessa konstanter. (Mars 42. 7. a.k.)

350. (**R**) Tangenten i origo till kurvan $y = x^4 - bx^2 + 2x$ skär kurvan i en maxima- eller minimipunkt. Beräkna konstanten b, upprita kurvan samt bestäm ekvationen för en linje, som tangerar kurvan i två punkter. (Jan. 48. 8. a.k.)

351. (**R**) Visa, att man kan välja de inbördes tecknen för två av koefficienterna i ekvationen $y = ax^4 + bx^2 + cx$ på ett sådant sätt, att en tangent till motsvarande kurva är parallell med kurvans tangent i origo och tangerar kurvan i två skilda punkter, A och B. Bestäm därefter kurvans ekvation, om punkterna A och B är $(-1;\ 0)$ och $(1;\ 2)$. Upprita slutligen i detta speciella fall kurvan i stora drag. Utnyttja därvid utom kurvans redan kända tangenter kurvans skärningspunkter med x-axeln och med tangenten i origo. Eventuella maximi- och minimipunkter behöver icke beräknas utan endast antydas i diagrammet. (Nov. 52. 8. a.k.)

352. (**R**) Bestäm den funktion $y = f(x)$ av andra graden, vars motsvarande kurva tangerar linjerna $y = 4$, $y = x + 2$ och $y = - - 2x + 12$. (Jan. 44. 8. a.k.)

353. (**R**) I funktionen $y = x^3 - ax$ är a en konstant. Om värdet på a väljes på lämpligt sätt, kan man på den motsvarande kurvan finna punkter P och Q så belägna, att tangenten i P samtidigt blir normal i Q. Bestäm vinkelkoefficienten för PQ, uttryckt i a, och ange viklet villkor a måste uppfylla, för att någon dylik tangent skall finnas. (Mars 48. 8. a.k.)

c) en tillämpning inom ekvationsläran

354. Undersök, hur antalet skärningspunkter mellan kurvan $y = 12x^2 - 4x^3 - 3x^4$ och räta linjen $y = k$ varierar med värdet på k, och bestäm med hjälp härav, hur många positiva och hur många negativa rötter ekvationen

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + k = 0$$

får för olika värden på k. (H. 32. 6. R)

d) några kurvskaror

355. (**R**) Undersök funktionen $y = x^4 + ax^2$, där a är en konstant, med avseende på nollställen (dvs. de x-värden, för vilka funktionen blir $= 0$) samt maxima och minima. Undersökningen skall genomföras för alla reella värden på a, olika fall skall särskiljas och motsvarande kurvor uppritas i stora drag. (Aug. 49. 4. a.k.)

356. (**R**) Diskutera utseendet av kurvan $y = x^3 + ax + b$, där a och b är konstanter. Ange kurvans skärningspunkter med tangenten i en punkt på kurvan med abskissan a. (Jan. 43. 6. a.k.)

357. (**R**) Undersök kurvan $y = x^3 + ax^2 + a^3$, där a är en konstant, med avseende på maximi- och minimipunkter. Ange med tillhjälp därav, vilka huvudtyper kurvan uppvisar och för vilka värden på a dessa förekommer. Upprita slutligen exempel på de olika huvudtyperna. (Mars 51. 6. a.k.)

358. (**R**) Undersök kurvan $10y = x^4 - 8x^3 + 2ax^2$ med avseende på maximi- och minimipunkter för olika värden på konstanten a, och åskådliggör i skilda koordinatsystem exempel på de olika huvudtyper av kurvor, som kan förekomma. (Mars 55. 8. a.k.)

e) maximi- och minimibestämningar

359. I ekvationen $ax^2 - a^2x = 1$ är a en positiv konstant. Visa, att ekvationens rötter är reella. Beräkna det värde på a, för vilket summan av rötterna och deras inverterade värden blir så stor som möjligt. (Jan. 44. 1. a.k.)

360. I en triangel är höjden mot en sida dragen. Var på denna höjd skall en punkt P vara belägen, för att summan av kvadraterna på avstånden från P skall vara så liten som möjligt? (Jan. 42. 1. a.k.)

361. På sidan AB i en triangel ABC är en punkt P given. Hur skall en med AB parallell transversal RQ dragas, för att den i triangeln ABC inskrivna triangeln PQR skall få största möjliga yta? (Mars 38. 1. a.k.)

362. På sidorna AB, BC och CA i en liksidig triangel med sidan a tages i ordning tre punkter P, Q och R så, att BQ blir dubbelt så stor som AP och CR tre gånger så stor som AP. Hur stor skall AP väljas, för att ytan av triangeln PQR skall bli så liten som möjligt? (V. 28. 8. L)

363. Genom en punkt P på en given triangels bas drages två räta linjer, som är parallella med sidorna och alltså jämte dem bildar en parallellogram. Var skall P tagas, för att denna parallellogram må bli så stor som möjligt? (V. 09. 4. R)

364. I en triangel ABC drages en transversal DE parallell med BC. Från D, som ligger på AB, drages transversalen DF parallell med AC och från E transversalen EG parallell med AB. Sök läget av D, då ytan av parallelltrapetset $DEGF$ får sitt maximivärde. ($AD > \frac{1}{2}AB$.) (H. 36. 9. R)

365. En rak landsvägssträcka OA och en rak järnvägssträcka OB på horisontell mark skär varandra i O, så att vinkeln AOB är 60°. I samma ögonblick som främsta delen av ett tåg passerade O, befann sig en bil i A på landsvägen 700 m från O. Efter 1 min 10 sek passerades O av bilen, och tågets främsta del var då i B på 1400 m avstånd från O. Hur stort var det minsta avståndet mellan bilen och tågets främsta del? Bilen och tåget antages på de nämnda sträckorna röra sig utan uppehåll och med jämn hastighet. (Nov. 50. 3. a.k.)

366. I triangeln ABC är AB 15 cm, BC 13 cm och CA 7 cm samt P en rörlig punkt på sidan AB. På förlängningen av sidan AC åt C till avsättes sträckan $CQ = BP$. Bestäm ytan av triangeln APQ, när sträckan PQ är så liten som möjligt. Visa därefter, att det erhållna värdet är ett maximivärde för ytan av triangeln APQ. (Jan. 53. 5. a.k.)

367. Från A avgår kl. 9 en båt med hastigheten 1 mil i timmen mot B, som ligger 2 mil rakt öster om A. Kl. 10 avgår från A en annan båt med hastigheten 2 mil i timmen mot C, som ligger 2,5 mil från A och rakt norr om B. Vid vilken tidpunkt efter kl. 10 är båtarna varandra närmast, och hur stort är då deras avstånd? (Nov. 38. 7. a.k.)

368. I den likbenta triangeln ABC har de lika stora sidorna AB och AC en given längd, medan basen BC varierar. Den i triangeln inskrivna cirkeln tangerar sidan AB i punkten T. När basen BC har en viss längd, uppnår sträckan CT ett maximivärde. Hur stor del av CT ligger då utom cirkeln? (Nov. 49. 7. a.k.)

369. En likbent triangels omkrets är konstant och $= a$. Bestäm det minsta värde, som längden av medianen mot en av de lika stora sidorna kan anta. (Aug. 49. 3. a.k.)

370. I triangeln ABC är sidan BC 4 cm och medianen från A 6 cm. P är en godtycklig punkt på den nämnda medianen, och sträckan AP är x cm. Ange summan av kvadraterna på avstånden från P till de tre triangelhörnen som en funktion av x, och studera motsvarande funktionskurva. Bestäm särskilt det största och det minsta värde, som funktionen antar. (Jan. 55. 5. a.k.)

371. I en aritmetisk serie är summan av de 22 första termerna 8,8 och summan av de 36 första termerna 12. Hur många termer, från början räknat, skall medtagas, för att deras summa skall bli så stor som möjligt? (Mars 53. 1. a.k.)

372. I de båda serierna $10,\ 10x,\ 10x^2,\ \ldots$ och $0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ \ldots$ bestämmes x så, att skillnaden mellan termerna med ordningsnumret 11 i de båda serierna, tagna i angiven ordning, blir så liten som möjligt. Beräkna för detta x-värde förhållandet mellan summorna av de 9 första termerna i den aritmetiska och i den geometriska serien. (Jan. 47. 2. a.k.)

373. Följande aritmetiska serier är givna:

$$2,\ 6,\ 10,\ \ldots \quad \text{och}$$
$$85,\ 83,\ 81,\ \ldots$$

Man vill taga ett antal termer i vardera serien från början räknat, i båda serierna tillsammans 30 termer, så att summan av dessa 30 termer blir så liten som möjligt. Hur många termer skall då tagas från vardera serien? (H. 30. 1. R)

374. Ur de båda serierna $1,\ 8,\ 15,\ 22\ \ldots$ och $43,5;\ 41,5;\ 39,5;\ 37,5;\ \ldots$ skall man i ordning från seriernas början taga ett antal termer, så att summan av alla dessa termer, tillsammans 12 stycken, blir så liten som möjligt. Hur många termer bör tagas ur vardera serien, och hur stor blir den erhållna summan? (Aug. 52. 5. a.k.)

375. **(R)** AB är en diameter i en cirkel med radien r. Från en punkt P på cirkeln drages normalen till tangenten i B. Normalens fotpunkt är C. Sök maximum för summan av sträckorna AP och PC. (Mars 42. 6. a.k.)

376. **(R)** På kurvan $y = (x - a)^2$, där a är en positiv konstant, är en punkt P så belägen, att tangenten till kurvan i denna punkt och dess avskärningar av de positiva koordinataxlarna bildar en triangel med största möjliga yta. Normalen till kurvan i samma punkt går genom origo. Bestäm konstanten a. (Mars 44. 4. a.k.)

377. **(R)** AB är diameter i en cirkel med radien r, C är en punkt på förlängningen av AB åt B till. På cirkelns tangent i punkten A är en punkt D så belägen, att sträckan CD är lika med $6r$. Bestäm det största värde, som avståndet från cirkelns medelpunkt till linjen CD kan anta. (Jan. 52. 6. a.k.)

378. **(R)** Genom en godtyckligt vald punkt P på sidan AB i rektangeln $ABCD$ drages normalen mot DP. Denna skär antingen sidan BC eller sidan CD. Om skärningspunkten kallas R, avskäres i förra fallet en triangel BPR, i senare fallet en fyrhörning $BPRC$. Vilket villkor måste rektangelns sidor uppfylla, för att den nämnda avskurna figuren, oberoende av punkten P:s läge på AB, skall bli en triangel? Var på AB skall P vara belägen, för att den avskurna triangelns yta skall bli så stor som möjligt? (Mars 41. 8. a.k.)

379. **(R)** Genom origo drages en rät linje, som skär kurvan $y = 2x - x^2$ i ytterligare två punkter A och B. Visa, att linjen är normal till kurvan, då kvadraten på längden av sträckan AB är maximum eller minimum. (Mars 39. 6. a.k.)

f) ”variationsbeskrivningar”

380. Konstruera kurvan $y = x^3 - 4x^2 + 4x$. Origo O sammanbindes med en punkt P på kurvan, och från P fälles normalen PQ mot x-axeln. Undersök och åskådliggör i samma koordinatsystem, hur ytan av triangeln OPQ varierar, då P genomlöper kurvan. (Mars 43. 4. a.k.)

381. **(R)** Konstruera kurvan $3y = 9x - x^3$ i stora drag. Från en punkt P på den del av kurvan, som är belägen ovanför positiva x-axeln, fälles normalen PN mot x-axeln. Ena diagonalen i en romb sammanfaller med sträckan PN. Den andra diagonalens ändpunkt ligger på y-axeln. Ange rombens yta som funktion av abskissan för punkten P, undersök, hur denna yta varierar med läget för P, och konstruera den motsvarande funktionskurvan. (Nov. 51. 5. a.k.)

382. **(R)** Upprita kurvan $y = (x^2 - 1)^2$ i dess huvuddrag. En likbent triangel har spetsen i origo, basen parallell med x-axeln och basens ändpunkter på den nämnda kurvan. Undersök och åskådliggör med ett diagram, hur ytan av denna triangel varierar med längden av halva basen. Ange speciellt, om ytan antar några maximi- eller minimivärden. (Aug. 50. 5. a.k.)

383. **(R)** En triangel har ett hörn i punkten $(0;\ 6)$, ett i punkten $(6;\ 0)$ och det tredje på kurvan $3y = -x^3$. Undersök, med angivande av eventuella maxima och minima, hur triangelns yta varierar, då det rörliga hörnet beskriver kurvan. (Mars 40. 7. a.k.)

384. **(R)** I ett rätvinkligt koordinatsystem är en triangel OPQ så placerad, att hörnet O faller i origo, hörnet P på kurvan $y = \dfrac{x^2}{2}$ och hörnet Q på kurvan $y = 12x - x^2 - 30$. Sidan PQ är parallell med y-axeln. Undersök och åskådliggör med ett särskilt diagram, hur ytan av triangeln OPQ varierar, när P genomlöper den förstnämnda kurvan. (Jan. 50. 8. a.k.)

385. **(R)** En rätvinklig triangel OAB har den räta vinkelns spets i origo, hörnet A på den räta linjen $y = -2$ och hörnet B på kurvan $y = x^2 + 2x$. Undersök och åskådliggör med ett särskilt diagram, hur triangelns yta varierar med x-koordinaten för A, när A genomlöper linjen $y = -2$. Ange också ytans eventuella maximi- och minimivärden. (Aug. 51. 8. a.k.)

386. **(R)** Upprita kurvan $y = 24x - 22x^2 + 8x^3 - x^4$ i dess huvuddrag. I en punkt P på kurvan drages tangenten. Undersök, hur dennas avskärning på y-axeln varierar, när P rör sig längs kurvan, och åskådliggör detta i ett särskilt diagram. Ange speciellt, för vilka x-värden den nämnda avskärningen antar maximi- eller minimivärden. (Nov. 47. 8. a.k.)

387. **(R)** Kurvorna $4y = x^2 - 12x + 32$ och $2y = 16 - x^2$ uppritas i sina huvuddrag. De båda räta linjerna $x = a$ och $x = a + 2$, där a är en konstant, skär kurvorna i sammanlagt fyra punkter, vilka sammanbindes, så att ett parallelltrapets uppstår. Ytan av detta trapets kan uppfattas som en funktion av a, vilken funktions algebraiska uttryck blir olika i olika intervall för a. Bestäm dessa uttryck, samt undersök, hur ytan varierar, när a genomlöper alla reeella värden. (Mars 52. 8. a.k.)

388. **(R)** Ekvationerna för en triangels sidor är $x + 3 = 0$, $y + 4 = 0$ och $x + y = 6$. I denna triangel inskrives en triangel ABC, så att dess medianer går genom origo. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av triangeln ABC varierar, samt ange det största och minsta värdet av denna yta. (Nov. 45. 8. a.k.)

389. **(R)** Upprita kurvan $y = x^2(3 - x)$i dess huvuddrag. Två punkter på kurvan, A och B, har positiva koordinater, och deras sammanbindningslinje går genom origo. Projektionerna på x-axeln av A och B är A_1 och B_1. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av parallelltrapetset AA_1BB_1 varierar, då linjen AB vrider sig kring origo. (Aug. 44. 7. a.k.)

g) några avancerade uppgifter av olika slag

390. P är en punkt på kurvan $y = 0,1x^3$. Normalen till kurvan i punkten P bildar med koordinataxlarna en triangel, vars yta är T. Visa, att T närmar sig ett visst gränsvärde, då P längs kurvan rycker in mot origo. (Då P sammanfaller med origo, erhålles givetvis ingen triangel.) Beräkna ifrågavarande gränsvärde, och visa därefter, att triangelns yta alltid är större än det erhållna gränsvärdet. (Nov. 53. 7. a.k.)

391. **(R)** Från en punkt A_1 på kurvan $9y = x^3 - 9x^2$ drages en rät linje, som tangerar kurvan i en punkt A_2, skild från A_1. Från A_2 drages en rät linje, som tangerar kurvan i en punkt A_3, skild från A_2. Förfarandet upprepas, varvid erhålles punkterna A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n. Från A_{n-1} är alltså dragen en rät linje, som tangerar kurvan i A_n, som är skild från A_{n-1}. Visa, att punkten A_n obegänsat närmar sig en bestämd punkt på kurvan, då n obegränsat växer, och bestäm koordinaterna för denna punkt. (Man förutsätter, att A_1 ej råkat bli placerad just i denna punkt.) (Aug. 48. 8. a.k.)

392. **(R)** I en konvergent oändlig geometrisk serie med reella termer är första termen a och kvoten k. Man vill lösa uppgiften att med ett givet värde på a bestämma ett sådant värde på k, att seriens summa blir lika med kvadraten på k, och konstruerar för den skull den kurva, som svarar mot det erhållna sambandet mellan a och k. Undersök, för vilka värden på a den nyss nämnda uppgiften är möjlig, och ange särskilt, för vilka av dessa värden uppgiften har en eller flera lösningar. (Mars 47. 7. a.k.)

393. **(R)** $f(x)$ är en funktion med derivatan $f'(x) = x + 3$. De geometriska motsvarigheterna till funktionerna $y = f(x)$ och $y = f'(x)$ i samma rätvinkliga koordinatsystem skär varandra under rät vinkel i en av skärningspunkterna. Bestäm $f(x)$. (Mars 55. 5. a.k.)

394. **(R)** Funktionen $y = f(x)$ är bestämd på följande sätt. För $x > 0$ gäller $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + x$, och för $x < 0$ gäller $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - 3x^2$. När x närmar sig 0 genom positiva eller negativa värden, närmar sig y värdet 1 och $\dfrac{dy}{dx}$ värdet 0. Härled uttryck för $f(x)$ i de båda fallen, sök funktionens maximi- och minimivärden samt uppritа ett diagram över funktionen $y = f(x)$. (Med $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ menas derivatan av $\dfrac{dy}{dx}$ med avseende på x.) (Nov. 51. 8. a.k.)

395. **(R)** Ett godtyckligt polynom $f(x)$ av tredje graden har reella koefficienter. Bevisa, utan användning av motsvarande kurva, att om funktionen har ett maximum, så har den även ett minimum. (Jan. 55. 7. a.k.)

396. **(R)** Upprita kurvan $3y = x^2(6 - x^2)$ i dess huvuddrag. Undersök därefter, hur antalet tangenter till kurvan från en punkt P på y-axeln varierar, när P genomlöper nämnda axel. (Mars 55. 7. a.k.)

397. **(R)** Upprita kurvan $4y + x^4 - 8x^3 + 18x^2 = 0$ i dess huvuddrag. I en punkt A på kurvan med abskissan a drages kurvans tangent. Riktningskoefficienten (vinkelkoefficienten) för denna tangent betecknas med $k(a)$. För varje värde på a kan man draga en eller flera tangenter till kurvan med riktningskoefficienten $k(a)$. Ange, hur antalet dylika tangenter varierar, då punkten A beskriver kurvan. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man lämnar in en utredning även av de fall, då tangenter sammanfaller. (Jan. 55. 8. a.k.)

398. **(R)** I ekvationen $x^3 - x^2 - x + k = 0$ är k ett tal, som uppfyller villkoret $0 < k < 1$. Bevisa, att av ekvationens rötter en och endast en rot x_1 är sådan, att $0 < x_1 < 1$. (Mars 54. 7. a.k)

(R) VI. Trigonometriska funktioner

a) några problem, vilkas lösning förutsätter kännedom om trigonometriska funktioner

399. Vilka värden kan rötterna till ekvationen $16x^2 + 24x + \cos\alpha = 16 + 9\sin^2\alpha$ anta, där α är en godtycklig vinkel? (Nov. 53. 5. a.k)

400. Bevisa, att summan av den oändliga serien

$$\cos^2 v - \sin^2 v + \cos^4 v - \sin^4 v + \cos^6 v - \sin^6 v + \dots$$

är $\dfrac{4\cos 2v}{\sin^2 2v}$. (H. 10. R)

401. I en cirkel med 65 cm radie är en fyrhörning $ABCD$ inskriven. Sidorna AB, BC och CD är i ordning 66 cm, 78 cm och 50 cm. Visa utan att använda tabell, att cirkelbågen $ABCD$ är en halvcirkel. (Jan. 42. 5. a.k.)

402. I triangeln ABC är sidan AB 4 cm, sidan AC 5 cm och sidan BC 6 cm. Bevisa, att vinkeln A är exakt dubbelt så stor som vinkeln C. (Jan. 55. 3. a.k.)

403. Mellan vinklarna A, B och C i en triangel består följande relation:

$$\cot B = \frac{\sin A + \sin(C - B)}{\cos(C - B)}.$$

Bevisa, att triangeln är rätvinklig. (V. 25. 6. R)

404. En triangels vinklar är A, B och C. Visa, att om $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$ och $\cot\dfrac{C}{2}$ bildar en aritmetisk serie, så är $\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{C}{2} = 3$. (Aug. 41. 4. a.k.)

405. Beräkna förhållandet mellan sidorna i en likbent triangel, i vilken det kortaste avståndet mellan basens ena ändpunkt till den inskrivna cirkelns periferi är en fjärdedel av triangelns bas. (Jan. 45. 3. a.k.)

406. I ett likbent parallelltrapets är benen och den ena basen lika med 6 cm. Trapetset är inskrivet i en cirkel med radien 4 cm. Beräkna värdet av trapetsets yta, först exakt och sedan approximativt. (Mars 49. 4. a.k.)

407. Visa, att man kan bestämma ett siffervärde på a, så att likheten $\sin(60° - x) \cdot \sin(60° + x) = a \cdot \sin 3x$ gäller för alla vinklar x. (V. 25. 4. R)

408. Bevisa, att formeln

$$\left(1 - \frac{2\tan x}{\sin 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\tan x}{\tan 2x}\right)^2$$

gäller för varje värde på x, som inte är av formen $k \cdot 45°$, där k är ett positivt eller negativt heltal eller 0. (Mars 54. 4. a.k.)

409. En triangels vinklar är α, β, γ. De punkter, i vilka triangelns bisektriser råkar den kring triangeln omskrivna cirkelns periferi, förenas medelst räta linjer, varvid en ny triangel uppkommer. Visa, att förhållandet mellan ytan av den ursprungliga och ytan av den sålunda bildade triangeln är

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Jan. 39. 8. a.k.)

410. I en triangel inskrives en cirkel, och i denna cirkel inskrives en med den förra likformig triangel. Visa, att förhållandet mellan motsvarande sidor i den in- och omskrivna triangeln är

$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2},$$

där A, B och C är vinklarna i trianglarna. (Aug. 39. 7. a.k.)

411. Visa, att i varje triangel ABC är

$$a\sin A - b\sin B = c\sin(A-B),$$

om a, b och c är motstående sidor till resp.A, B och C. (V. 36. 9. R)

412. I en halvcirkel med medelpunkten O och diametern AB är en korda AC dragen. En cirkel med medelpunkten O' inskrives i figuren ABC, så att den tangerar kordan, diametern och bågen BC. Bevisa, att

$$\cot\frac{1}{2}CAB - \cot\frac{1}{2}O'OB = 1.$$

(Mars 48. 7. a.k.)

413. På sidorna i den rätvinkliga triangeln ABC uppritas utåt de likformiga, likbenta trianglarna AP_1B, BP_2C och CP_3A, vilkas toppvinklar P_1, P_2 och P_3 alla är 120°. Visa, att triangeln $P_1P_2P_3$ är liksidig. (Nov. 45. 7. a.k.)

414. Mätetalen för två sidor i en triangel är rötter till ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$. En cirkel tangerar dessa båda sidor och har sin medelpunkt på den tredje sidan. Bestäm maximivärdet av denna cirkels radie. (Aug. 46. 8. a.k.)

415. Två cirklar tangerar varandra utantill i punkten A. Man tar tvenne punkter B och C, en på vardera cirkelperiferin, och så att vinkeln BAC blir rät. Hur skall B och C väljas för att triangeln BAC skall få så stor yta som möjligt, och hur stor blir denna, om cirklarnas radier är R och r? (V. 31. 8. L)

b) enkla trigonometriska ekvationer

416. Lös ekvationen $\sin 5x - \sin 3x = \sin x$. (V. 08. 6. L)

417. För vilka spetsiga vinklar är $\sin 5x + \sin 3x = \cos 2x - \cos 6x$? (V. 04. 2. R)

418. Bestäm alla de vinklar x, som satisfierar ekvationen

$$\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x.$$ (H. 27. 3. R)

419. Lös ekvationen $\sin 3x = 2\sin x$. (H. 23. 3. R)

420. För vilka spetsiga eller trubbiga vinklar är $\sin 3x \cdot \sin x = \dfrac{1}{2}$? (H. 01. R)

421. Lös ekvationen

$$\cos(3x + 180°) + \sin(270° + x) = 0.$$ (Aug. 52. 1. a.k.)

422. Lös ekvationen $\sin x(\sin x - \cos x) = 0,16$. (V. 01. 4. R)

423. Lös ekvationen $2\sin^3 x = \cos x$. (Jan. 48. 3. a.k.)

424. Lös ekvationen $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (V. 21. 2. R)

425. Lös ekvationen $\sin x + 3\cos x = 2$. (Mars 51. 1. a.k.)

426. Lös ekvationen $2\sin 3x - 3\cos 3x = 1$. (Aug. 43. 4. a.k.)

427. Lös ekvationen $\cos x = 2(1 + \cos 2x)\sin x$. (V. 09. 1. R)

428. Lös ekvationen $\sin 3x + \sin 2x = 3\sin x$. (V. 19. 4. R)

429. Bestäm alla vinklar x, som satisfierar ekvationen

$$\sin 3x \cdot \sin 4x = \cos 4x \cdot \cos 5x.$$ (V. 31. 7. R)

430. Bestäm alla vinklar x, som satisfierar ekvationen

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{3}{5}(1 + \tan x).$$ (H. 36. 5. R)

431. Lös ekvationen $\sin x + \cos x = 2\cos 2x$. (Nov. 42. 2. a.k.)

432. Lös ekvationen $\sin x \sin 3x + \cos 2x = 1$. (Nov. 41. 1. a.k.)

433. För vilka värden på konstanten a har ekvationen

$$(a + 1 - 2a\tan x)\cos^2 x + 1 = 0$$

reella lösningar? (Nov. 48. 7. a.k.)

434. Lös ekvationen

$$\tan x - \tan^3 x + \tan^5 x - \tan^7 x + \cdots = \frac{1}{3}.$$ (V. 32. 3. R)

c) problem som löses med hjälp av trigonometriska ekvationer

435. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen $\cos x$, andra termen $\sin x$ och summan $-\sin x$. Bestäm de vinklar x för vilka detta gäller. (Mars 48. 1. a.k.)

436. L och M är två mot varandra vinkelräta linjer, som skär varandra i O. Från en punkt A på L drages en rät linje till B på M, så att vinkeln $OAB = v$; från B drages en linje till C på L, så att vinkeln $OBC = v$; från C drages en rät linje till D på M, så att vinkeln $OCD = v$ osv. i oändlighet. Bestäm vinkeln v, så att den brutna linjen $ABCD\ldots$ blir dubbelt så lång som OA. (Mars 37. 4. a.k.)

437. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 1 och kvoten $2\tan x$. Bestäm vinkeln x, så att seriens summa blir lika med $\cos(2x + 90°)$. (Nov. 52. 2. a.k.)

438. I en triangel ABC är förhållandet $AB : AC = 2 : 3$. Vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln B. Beräkna triangelns vinklar. (Mars 38. 3. a.k.)

439. I triangeln ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B och sidan c dubbelt så stor som sidan b. Beräkna triangelns vinklar. Bestäm triangelns vinklar. (Aug. 50. 1. a.k.)

440. Beräkna vinklarna och de lika stora sidorna i en likbent triangel, om basen är 10 cm och bisektrisen till en av basvinklarna 8 cm. (Aug. 49. 1. a.k.)

441. I två likbenta trianglar är benen lika stora och förhållandet mellan baserna $3 : 8$. Vinkeln vid spetsen är i den ena triangeln tre gånger så stor som i den andra. Beräkna trianglarnas vinklar. (Aug. 43. 1. a.k.)

442. Två kordor i en cirkel är 2 cm respektive 5 cm. De motsvarande bågarna förhåller sig som $1 : 3$. Beräkna längden av den först nämnda kordans mindre båge. (Jan. 49. 1. a.k.)

443. I en triangel är en vinkel $40°$ och den motstående sidan aritmetiskt medium till de båda övriga sidorna. Bestäm triangelns övriga vinklar. (Nov. 49. 5. a.k.)

444. I en triangel ABC förhåller sig höjderna från hörnen A och B som $4 : 3$ och yttervinklarna vid A och B som $3 : 2$. Beräkna triangelns vinklar. (Mars 48. 4. a.k.)

445. I en cirkel är inskrivet ett parallelltrapets, i vilket tre sidor är lika långa och var och en av dem dubbelt så lång som den fjärde sidan. Beräkna de medelpunktsvinklar som trapetsets sidor upptar, samt trapetsets yta, då cirkelns radie är 1,6 dm. (H. 33. 3. R)

446. I en konvergent oändlig geometrisk serie med reella termer är första termen $\sin x$ och fjärde termen $\dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4}$. seriens summa är 3. Bestäm det exakta värdet av seriens första term och av dess kvot. (Jan. 52. 5. a.k.)

447. I en rätvinklig triangel känner man längderna av hypotenusan $BC = 3$ m och det stycke $BD = 2$ m av vinkelns B:s bisektris, som ligger inom triangeln. Beräkna vinkeln B och kateterna. (V. 08. 4. R)

448. I en triangel är en sida 5 m, en annan 8 m och den mellanliggande vinkeln $= \alpha$. Om α vore $24°37'$ större skulle triangelns yta vara 4 m^2 större. Hur stor är vinkeln α? (H. 16. 7. R)

449. I triangeln ABC är M mittpunkten av BC. AB är dubbelt så lång som AC, och vinklen CAM är tre gånger så stor som vinkeln BAM. Beräkna vinkeln BAC. (Aug. 36. 2. R)

450. I triangeln ABC är sidan AB 6 cm och sidan AC 9 cm. Sidan BC är tre gånger så stor som den mot densamma dragna höjden. Beräkna vinkeln A. (Nov. 48. 6. a.k.)

451. I en halvcirkel är AB diametern samt AC och CD kordor, av vilka den senare är parallell med AB. Då vinkeln BAC varierar från $0°$ till $90°$, ändras förhållandet $AC : CD$. Bestäm vinkeln, då förhållandet är $= 2$. (Nov. 46. 6. a.k.)

452. Härled för $\cos 3v$ en formel, vari endast $\cos v$ ingår. Använd därefter denna formel för att lösa ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$, sedan x i denna utbytts mot $2y$. Ekvationens rötter skall anges var för sig i såväl exakt som approximativ form. (Mars 44. 7. a.k.)

VII. Stereometri

a) problem på polyedrar, där i allmänhet sträckor, ytor eller vinklar skall beräknas (inga volymsbestämningar)

453. Genom en diagonal till en kub med kantlängden a lägges ett plan, som halverar två av de kanter till kuben, som icke råkar diagonalen. Sök arean av den fyrsiding, som av diagonalplanet utskäres ur kuben. (H. 16. 6. L)

454. En kub har kantlinjen a. På en av kubens diagonaler AB (A och B är två hörn i kuben, som ej ligger i samma sidoyta) har man tagit en punkt P mellan A och B, så att AP är $1/3$ av diagonalens längd. På en av de från A utgående kantlinjerna i kuben har man tagit en annan punkt Q, så att $AQ = 2/3$ av kantlinjens längd. Beräkna avståndet PQ (uttryckt i a). (V. 28. 5. L)

455. $ABCD$ är basyta i en kub och E ett av kubens hörn så beläget, att AE är diagonal i kuben. Man kan då finna en punkt P på AE och en punkt Q på basytans diagonal BD, så att linjen PQ blir vinkelrät såväl mot AE som mot BD. Sök läget av P och Q. (Aug. 42. 5. a.k.)

456. I en rät fyrsidig pyramid, vilkens bottenyta är en kvadrat med sidan a och vilkens sidoytor är liksidiga trianglar, är en kub inskriven på det sätt, att en av kubens sidoytor ligger i pyramidens bottenyta och den motstående sidoytan har sina hörn på var sin av pyramidens kanter. Hur stor är kubens kant? (H. 15. 8. L)

457. I en regelbunden tresidig pyramid är varje baskant $= a$ och varje sidokant $= b$. Bestäm avstånden mellan mittpunkten av en baskant och mittpunkten av motstående sidokant. (Aug. 36. 4. R)

458. AB och CD är två kantlinjer i en regelbunden tetraeder, vilka inte råkas. Tetraederns kantlinje har längden a. På AB har man tagit punkten P så, att $AP = \frac{1}{3}a$ och på CD punkten Q så, att $CQ = \frac{2}{5}a$. Beräkna sträckan PQ. (H. 28. 6. R)

459. I en pyramid är basytan en liksidig triangel och de tre sidoytorna kongruenta likbenta trianglar. Beräkna sidovinklarna i pyramidens spets, ifall höjden och baskanten är av samma längd. (H. 20. 8. L)

460. En trekantig pyramid, som till bas har en liksidig triangel, har de tre sidokanterna av lika längd. Beräkna förhållandet mellan bottenytan och en av sidoytorna, då sidoplanen skär varandra under räta vinklar. (H. 12. 1. R)

461. En regelbunden pyramids hela yta är tre gånger så stor som basytan. Sök den vinkel, som bildas av en sidoyta med basytan. (H. 22. 4. L)

462. I en trekantig pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från toppen utgående kantlinjerna är inbördes lika långa. Pyramidens hela yta är fyra gånger så stor som basytan. Beräkna den vinkel, som sidoplanen bildar med basplanet. (V. 29. 4. L)

463. En (oregelbunden) pyramid delas av två med basen parallella plan i tre lika delar, av vilka den mellersta har samma totala begränsningsyta som de två övriga delarna tillsammans. Pyramidens höjd delas av planen i förhållandet

1 : 3 : 1. Hur stor del av den ursprungliga pyramidens totala begränsningsyta utgör dess basyta? (Jan. 51. 7. a.k.)

464. **(R)** Från en punkt O utgår tre begränsade räta linjer OA, OB och OC så, att de två och två med varandra bildar en rät vinkel. deras längder är i ordning 3, 4 och 5 dm. Beräkna vinkeln mellan planet ABC och planet OAB. (H. 27. 4. R)

465. I en fyrsidig pyramid med kvadratisk basyta är baskanterna 10 cm och sidokanterna 13 cm. Beräkna vinkeln mellan två varandra skärande sidoytor i pyramiden. (V. 28. 4. R)

466. Höjden i en regelbunden tresidig pyramid är hälften så stor som baskanten. Beräkna vinkeln mellan två sidoytor. (Nov. 41. 2. a.k.)

467. I en tetraeder $ABCD$ är sidoytorna ABC och ABD vinkelräta mot varandra. Vidare är $AB = 6$ cm, $AC = BC = 7$ cm och $AD = BD = 9$ cm. Bestäm vinkeln mellan sidoytorna ACD och BCD. (Aug. 44. 4. a.k.)

468. Från medelpunkten i en reguljär tetraeder drages räta linjer till två av tetraederns hörnpunkter. Sök vinkeln mellan dessa båda linjer. (H. 22. 6. R)

469. **(R)** I en regelbunden tresidig pyramid förhåller sig en sidokant till en baskant som 3 : 2. Bestäm vinkeln mellan en sidokant och basytan samt vinkeln mellan en baskant och en av sidoytorna. (Aug. 41. 7. a.k.)

470. **(R)** Sidovinklarna vid spetsen i en tresidig pyramid är alla räta. Bevisa, att kvadraten på basytan är lika med summan av kvadraterna på sidoytorna. (Jan. 47. 7. a.k.)

471. **(R)** En rätvinklig triangel ligger i ett plan P. De båda kateterna bildar vinklarna A och B med annat plan Q genom hypotenusan. Planen P och Q bildar med varandra vinkeln C. Visa, att

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B.$$ (Nov. 46. 8. a.k.)

472. En rak pyramid har till bas en kvadrat med sidan 70 dm. Medelst ett plan, som är parallellt med basen och på avståndet 10 dm från denna, bortskäres pyramidens topp, så att en stympad pyramid återstår. I denna har sidokanterna samma längd som sidan i den mindre basytan. Beräkna denna längd och vinkeln mellan ett sidoplan och ett av basplanen. (H. 28. 7. L)

473. **(R)** I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är vinkeln mellan två närliggande sidoytor 120°. Beräkna vinkeln mellan en sidoyta och basytan. (Jan. 40. 5. a.k.)

474. **(R)** En stång, som är 2 m lång, stöder med sin nedre ändpunkt mot den horisontella marken och bildar med denna en vinkel av 60°. Projektionen på marken av stångens övre ändpunkt ligger rakt norr om stångens nedre ändpunkt. Beräkna längden av stångens skugga på marken, om solen står i sydväst 20° över horisonten. (Nov. 55. 6. a.k.)

475. En rektangulär dörr $ABCD$, därAB är 90 cm och AD 216 cm, kan vridas kring AD. Om dörren öppnas 40°, hur stor vinkel har diagonalen AC vridits? (Nov. 45. 2. a.k.)

476. **(R)** En backe, som kan antas vara plan och vars längdriktning tänkes gå vinkelrätt mot skärningslinjen mellan backens plan och horisontalplanet, bildar 10° vinkel med sistnämnda plan. En person färdas uppför backen i en riktning, som bildar 50° vinkel med backens längdriktning. Hur stor vinkel bildar färdriktningen med horisontalplanet? (Mars 52. 5. a.k.)

477. **(R)** Ett plant rektangulärt visitkort ligger på ett horisontellt bord. Det vikes längs en diagonal på så sätt, att det uppvikta hörnet kommer rakt ovanför en punkt på kortets ena långsida. Vinkeln mellan kortets båda halvor är då 45°. Beräkna förhållandet mellan kortets sidor. (Nov. 54. 6. a.k.)

478. **(R)** Tre rektangulära kort med längden 9 cm och bredden 6 cm ställes på ett plant horisontellt underlag, så att en av de kortare sidorna i vartdera kortet ingår som en sida i en regelbunden sexhörning i det nämnda planet och de motstående sidorna bildar en liksidig triangel. Beräkna kortens lutningsvinkel mot planet. (Jan. 54. 5. a.k.)

479. **(R)** $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$ är två motstående sidoytor i en kub. A och A_1, B och B_1, osv. ligger på samma kantlinje. Genom AB och C_1D_1 lägges ett plan, genom BC och A_1D_1 ett annat. Beräkna vinkeln mellan dessa plan. (Aug. 46. 5. a.k.)

480. **(R)** I en regelbunden tetraeder $OABC$ är M mittpunkten på AB och N mittpunkten på AC. Beräkna den spetsiga vinkel, som bildas av riktningarna för linjerna OM och BN. (Jan. 44. 4. a.k.)

481. **(R)** O är spetsen i en regelbunden fyrsidig pyramid $OABCD$ i vilken alla kantlinjerna är lika. Beräkna vinkeln (α) mellan sidoplanet OAD och den räta linje, som går genom mittpunkterna på kantlinjerna BC och OC. (Aug. 39. 8. a.k.)

482. **(R)** Ett plan skär alla sidokanterna i en regelbunden fyrsidig pyramid och avskär av dessa i ordning sträckorna a, b, c och d, från pyramidens spets räknat. Bevisa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

(Nov. 48. 8. a.k.)

483. **(R)** I en kub är $ABCD$ och $A'B'C'D'$ två parallella sidoytor, vilkas hörn förenas av kantlinjerna AA', BB', CC' och DD'. Ett plan lägges genom hörnet C' och mittpunkterna på kantlinjerna AB och AD. Bestäm ytan av den del av planet, som faller inom kuben. (Aug. 47. 8. a.k.)

484. **(R)** Genom spetsen av en liksidig kon drages en rät linje l, som bildar 45° vinkel med konens axel. Beräkna vinkeln mellan de tangentplan till konen, som går genom l. (Mars 30. 8. a.k.)

b) problem på polyedrar, koner, cylindrar och sfärer (även volymsbestämningar)

485. Fyra hörn till en kub är så belägna, att två av dem, vilka som helst, icke tillhör samma kant. De fyra hörnen bildar hörnpunkterna till en regelbunden tetraeder. Sök dennas volym, ifall kubens kantlängd betecknas med a. (H. 23. 6. L)

486. I en sfär, vars radie är 12 m, inskrives en kub samt i denna åter en sfär. Hur stor blir den senare sfärens volym och yta? (V. 17. 5. L)

487. En kons toppvinkel är rät. Vad är förhållandet mellan volymerna av konen och den däri inskrivna kuben? (V. 03. 6. R)

488. I en rät cirkulär kon och en rät cirkulär cylinder är bottenradierna lika stora som radien i en sfär. Volymerna av de tre kropparna, tagna i nämnd ordning, förhåller sig som $1 : 3 : 4$. Hur förhåller sig kropparnas totala begränsningsytor? (Nov. 54. 1. a.k.)

489. En rät cirkulär kon, vars sida är lika med basytans diameter, och en rät cirkulär cylinder är omskrivna kring en sfär. Visa, att de tre kropparnas volymer förhåller sig till varandra som deras ytor. (V. 25. 3. R)

490. I en rät cirkulär kon, där bottenytans radie är 6 cm och höjden 8 cm, är ett klot inskrivet. Detta tangeras av ett plan, som är parallellt med konens bottenyta. Sök förhållandet mellan volymerna av den avskurna toppkonen, klotet och hela konen. (Aug. 41. 1. a.k.)

491. I en rät cirkulär kon är förhållandet mellan mantelytan och basytan $= 4$. Hur förhåller sig konens volym till volymen av det inskrivna klotet? (Jan. 37. 1. R)

492. En sfär är inskriven i en rät cirkulär kon, vars bottenyta är hälften så stor som dess mantelyta. Vad är förhållandet mellan konens och sfärens volymer? (V. 14. 6. L)

493. I en rät cirkulär kon, vars höjd är 5 dm, förhåller sig basytan till mantelytan som 3 till 8. Beräkna konens volym. (H. 29. 4. L)

494. **(R)** I en rät cirkulär kon lägges genom höjdens mittpunkt ett plan parallellt med basytan. I den härigenom uppkomna parallellt stympade konen kan man inskriva ett klot, som tangerar den stympade konens mantelyta och båda plana begränsningsytor. Bestäm konens toppvinkel. (Aug. 44. 5. a.k.)

495. En rät cirkulär kon är omskriven kring en sfär, vars diameter är lika med konens halva höjd. Bevisa, att konens hela yta är dubbelt så stor som sfärens yta. (H. 30. 3. L)

496. Toppvinkeln i en rät cirkulär kon är 60°. En rät cirkulär cylinder, vars basradie är $1/3$ av dess höjd, är placerad så, att den ena basytans medelpunkt sammanfaller med konens topp och den andra basytan ligger i konens basyta. Beräkna, hur stor del av konens volym som faller inom cylindern. (Aug. 54. 3. a.k.)

497. En regelbunden pyramid och en rätvinklig parallellepiped har båda kvadratisk basyta. Parallellepipedens ena basyta går genom pyramidens spets, och den andra ligger i pyramidens basyta. Parallellepipedens sidokanter skär pyramidens sidokanter mitt itu. Hur stor del av pyramidens volym ligger inuti parallellepipeden? (Mars 40. 2. a.k.)

498. Av tvenne koncentriska cirklar är den ena bottenyta i en rät cirkulär kon, den andra bottenyta i en rät cirkulär cylinder. Båda kropparna ligger på samma sida om det plan, som innehåller deras bottenytor, och deras höjder är lika stora. Om hälften av cylinderns volym ligger inom konen, hur stor del av konens mantelyta faller då inom cylindern? (H. 27. 7. L)

499. Två raka cirkulära cylindrar har lika stora volymer och lika stora totala ytor men olika basradier. I den ena cylindern är höjden och radien vardera 1 dm. Hur stora är de i den andra cylindern? (V. 30. 5. L)

500. En sfär är omskriven kring en rätvinklig parallellepiped, vars basyta är en kvadrat med sidan 15 cm och vars höjd är 7 cm. Kan man i samma sfär inskriva någon annan rätvinklig parallellepiped med kvadratisk basyta och med samma volym som den givna? Bestäm i så fall dess kanter. (Mars 47. 3. a.k.)

501. **(R)** Volymen av en rät cirkulär kon delas mitt itu av ett med basytan parallellt plan. I vilket förhållande delas konens mantelyta av samma plan? (V. 02. 1. R)

502. En rät cirkulär kons sida och bottendiameter är lika stora. Hur stor blir konens hela yta, ifall dess volym är 24 dm^3? (V. 15. 5. L)

503. I en regelbunden tresidig pyramid förhåller sig sidokanten till baskanten som $2 : 3$. Under vilken synvinkel ser man en sidokant från den omskrivna sfärens medelpunkt? (Jan. 55. 2. a.k.)

504. En pyramid har en kvadrat med sidan a till bottenyta och 4 liksidiga trianglar till sidoytor. Hur stor är den i pyramiden inskrivna sfärens volym? (H. 19. 8. L)

505. I en regelbunden fyrsidig pyramid är en sidoyta lika stor som basytan. Beräkna den kring pyramiden omskrivna sfärens radie, uttryckt i pyramidens baskant a. (Mars 52. 2. a.k.)

506. I en regelbunden tresidig pyramid är höjden mot basytan 2 cm och höjden mot en sidoyta 3 cm. Beräkna radien i den i pyramiden inskrivna sfären och vinkeln mellan de nämnda höjderna. (Nov. 49. 3. a.k.)

507. Ur en rätvinklig parallellepiped, vars kantlinjer är resp. 4, 5 och 7 cm, avskäres en trekantig pyramid genom ett plan, lagt genom tre av parallellepipedens hörn. Ange denna pyramids volym och dess fyra höjder. (Maj 36. 2. R)

508. På en vals med 30 cm diameter rullade en maskin upp jämntjockt papper, tills rullens diameter blivit 96 cm. En varvräknare visade, att antalet pappersvarv då uppgick till 4230. Hur många meters längd hade det pårullade papperet? (Nov. 50. 2. a.k.)

509. Från en kub, vars kant är a, bortskäres de åtta hörnen av åtta plan, av vilka vart och ett går genom mittpunkterna av de tre sidoytor av kuben, som sammanstöter i samma hörn. Hur stor är den återstående solida figurens yta? (H. 08. 3. R)

510. **(R)** En sfär med radien a tangerar tre mot varandra vinkelräta plan. Genom de tre tangeringspunkterna lägges en cirkel. Bestäm denna cirkels radie och avståndet mellan dess medelpunkt och sfärens. (Mars 49. 5. a.k.)

511. **(R)** En rät pyramid har till basyta en regelbunden sexhörning med sidan a, och dess volym är = volymen av en kub med kantlängden a. Beräkna sidoytornas toppvinklar. (V. 20. 8. L)

512. **(R)** Om en likbent triangel roterar kring höjden mot basen eller kring en av de lika sidorna, uppkommer två olika rotationskroppar. Bestäm triangelns toppvinkel, om förhållandet mellan volymerna av den förra och den senare rotationskroppen är $1 : 3$. (Nov. 37. 5. a.k.)

513. **(R)** I en pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från spetsen utgående kantlinjerna är lika långa. Det kring pyramiden omskrivna klotets radie är två tredjedelar av pyramidens höjd. Bestäm de vinklar, som baskanterna bildar med sidoytorna. (Aug. 37. 8. a.k.)

514. **(R)** Det begäres att lägga ett med basen parallellt plan till en regelbunden tetraeder så, att volymen delas i samma förhållande som den sammanlagda begränsningsytan. (V. 22. 8. L)

515. **(R)** En sfär är inskriven i en stympad reguljär fyrsidig pyramid, vars volym är tre gånger så stor som sfärens. Hur stor är den stympade pyramidens hela yta i förhållande till sfärens yta? (Mars 51. 4. a.k.)

516. **(R)** I en pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från toppen utgående kantlinjerna är lika långa. Det i pyramiden inskrivna klotets radie är en tredjedel av pyramidens höjd. Beräkna förhållandet mellan en kantlinje i basytan och en av de från toppen utgående kantlinjerna. (H. 26.6. R)

517. **(R)** En regelbunden tresidig pyramid står med basytan ABC på ett horisontellt underlag. Lodrätt över hörnet A är punkten P så belägen, att avståndet PA är $1\frac{1}{2}$ gånger så stort som pyramidens höjd. Det genom P och kantlinjen BC lagda planet skär pyramiden i två delar. Beräkna förhållandet mellan delarnas volymer. (Mars 54. 5. a.k.)

518. **(R)** En pyramid har till bas en rektangel $ABCD$. Dess spets O ligger rakt över basytans mittpunkt. Genom kantlinjen AB lägges ett plan, som går genom mittpunkten av kantlinjen OC. Detta plan delar pyramiden i två delar. Beräkna förhållandet mellan dessa delars volymer. (V. 32. 8. R)

519. **(R)** Sök volymen av den pyramid, som bortskäres från en regelbunden oktaeder med kantlinjen a genom ett plan, vilket innehåller en av oktaederns kanter och skär två andra mitt itu. (H. 23. 9. R)

520. **(R)** I en oregelbunden tetraeder lägges parallellt med två motstående kantlinjer ett plan, som delar en av de övriga kantlinjerna i förhållandet $1 : 2$. I vilket förhållande delas tetraederns volym av detta plan? (Aug. 50. 8. a.k.)

521. **(R)** En dubbelpyramid, bildad av två på samma basyta stående, men åt motsatta håll riktade tetraedrar, har var och en av alla nio kantlinjerna $= s$. Bestäm den inskrivna sfärens radie. (H. 20. 6. R)

522. **(R)** I en rät cirkulär kon med bottenradien r är inskriven en sfär, vars yta är $= {}^2/_3$ av konens mantelyta. Beräkna konens höjd. (H. 21. 6. R)

523. **(R)** En reguljär tetraeder med kantlinjen s delas mitt itu medelst ett plan genom en av kantlinjerna, varigenom uppkommer två oregelbundna tetraedrar. Hur stor är radien till den sfär, som kan omskrivas kring en av dem? (H. 15. 9. R)

524. **(R)** I en sfär med radien r inskrives en tetraeder, i vilken fem av kantlinjerna har längden $1,5r$ vardera. Beräkna den sjätte kantlinjens längd. (Jan. 50. 7. a.k.)

525. **(R)** Två klot med radierna R och r tangerar varandra utantill och är gemensamt inskrivna i en rät cirkulär kon. Beräkna denna kons volym. (V. 23. 8. L)

526. **(R)** I en regelbunden tresidig pyramid är den inskrivna sfärens diameter hälften så stor som baskanten. Bestäm vinkeln mellan en sidoyta och basytan samt vinkeln mellan två sidoytor. (Jan. 53. 7. a.k.)

527. **(R)** Ett klot skäres av tre mot varandra vinkelräta plan genom medelpunkten i åtta kongruenta delar, s.k. oktanter. I en av dessa inskrives ett klot, som sålunda tangerar såväl de plana ytorna som den sfäriska ytan. Beräkna förhållandet mellan den inskrivna sfärens yta och oktantens totala begränsningsyta. (Nov. 53. 3. a.k.)

528. **(R)** En obegränsad rät cirkulär cylinder med radien r skäres av två plan, vilkas skärningslinje ligger helt utanför cylindern. Den mellan planen belägna delen av cylinderns axel har längden h. Sök mantelytan och volymen av den mellan planen belägna stympade cylindern, uttryckta i r och h. (Mars 45. 8. a.k.)

529. **(R)** I en tillräckligt stor, upptill öppen rät cirkulär kon med lodrät axel och 30° toppvinkel nedsänkes en kub, vars kantlinje är a. I ett fall hålles en av kubens sidoytor horisontellt, i ett annat fall placeras en av kubens rymddiagonaler utefter konens axel. Hur mycket lägre ligger kubens tyngdpunkt i det förra fallet än i det senare, om kuben i båda fallen nedsänkes så långt som möjligt? (Jan. 49. 8. a.k.)

530. **(R)** På ett horisontellt bord ligger fyra klot, vartdera med radien 8 cm, ordnade så, att deras medelpunkter bildar en kvadrat med sidan 16 cm. Ovanpå dessa lägges ett femte, som tangerar de fyra och vars radie är 25 cm. Hur högt över bordet ligger dess medelpunkt? (V. 35. 4. R)

531. **(R)** På ett horisontellt underlag ligger n st ($n > 2$) lika stora klot. De är ordnade i en ring, så att varje klot tangerar de två närmast belägna kloten och så att klotens tangeringspunkter med underlaget utgör hörn i en regelbunden månghörning. En rät cirkulär kon inpassas så, att dess spets berör underlaget och dess mantelyta tangerar samtliga klotytor. För vilket n-värde blir konens toppvinkel minst, och hur stor är i detta fall toppvinkeln? (Aug. 51. 7. a.k.)

532. **(R)** Tre lika stora klot är placerade på ett horisontellt bord, så att vartdera klotet tangerar de båda övriga. I rummet mellan kloten nedsänkes en rät cirkulär kon med spetsen nedåt och axeln vertikalt, till dess konen tangerar de tre kloten. För vilka värden på konens toppvinkel är detta möjligt? (Aug. 50. 6. a.k.)

533. **(R)** Tre klot, som ligger på ett horisontellt bord, tangerar varandra parvis utantill. Ett av kloten har hälften så stor radie som de båda andra. Ett plan lägges så, att det tangerar alla kloten. Beräkna vinkeln mellan detta plan och bordet. (Nov. 47. 5. a.k.)

534. **(R)** I en rät cirkulär cylinder med bottenradien 25 cm lägger man först två lika klot med radien 12 cm på bottnen, så att de tangerar såväl varandra som cylinderns botten- och mantelyta. Utan ändring av dessa klots lägen lägger man i cylindern ännu ett klot av samma storlek, som tangerar de båda förra och cylinderns mantelyta samt ligger så långt ned som möjligt. Då slutligen ett plant lock pålägges, visar sig detta tangera det översta klotet. Sök cylinderns höjd. (Nov. 39. 8. a.k.)

535. **(R)** Fyra klot är så belägna, att vart och ett tangerar de övriga utantill. Tre av kloten är lika stora, medan det fjärde klotets radie förhåller sig till de andras som 7 : 6. Beräkna förhållandet mellan radierna i de båda klot, som tangerar alla fyra kloten. (Mars 55. 6. a.k.)

c) några problem om storcirklar på jordytan

536. Los Angeles och Osaka ligger på ungefär samma geografiska bredd, 34,5° N. Longituderna för de båda städerna är 117,5° V respektive 134,5° O. Beräkna det kortaste avståndet mellan orterna a) utefter parallellcirkeln, b) utefter jordytan, dvs utefter storcirkeln genom orterna. Jorden betraktas som en sfär med omkretsen 4000 mil. (Jan. 41. 6. a.k.)

537. **(R)** Orten A ligger på ekvatorn, medan orten B har latituden u. Longitudskillnaden mellan orterna är v. Jorden betraktas som en sfär med medelpunkten O. Vinkeln AOB betecknas med x. Bevisa sambandet $\cos x = \cos u \cos v$ för det fall, att vinkeln v är spetsig. Använd därefter detta samband för att beräkna avståndet mellan A och B längs storcirkelbågen genom orterna, om $u = 59{,}4°$, $v = 35{,}4°$ och jordens radie är 637 mil. (Jan. 52. 7. a.k.)

538. **(R)** Två punkter på jordytan, A och B, ligger båda på 40° nordlig latitud. Deras longitudskillnad är 50°. Ett fartyg, som går från A till B, följer storcirkelbågen mellan punkterna. Bestäm latituden för den nordligaste punkt, som fartyget passerar under färden. (Aug. 53. 7. a.k.)

539. **(R)** Shetlandsöarna ligger på 60° nordlig latitud och 1° västlig longitud. Galapagosöarna ligger på ekvatorn och på 91° västlig longitud. Jorden antages vara en sfär med omkretsen 4000 mil. Hur stort är det kortaste avståndet längs jordytan mellan dessa ögrupper (dvs. avståndet längs den storcirkel, som går genom dem)? (Jan. 38. 8. a.k.)

540. **(R)** A, B C och D är fyra punkter på jordytan så belägna, att kortaste avståndet längs jordytan mellan två av punkterna blir detsamma, vilken av de fyra punkterna man än väljer. Punkten A har latituden 90°, punkten B longituden 0°. Bestäm latitud och longitud för punkterna C och D. Jorden antages vara en sfär. Kortatste avståndet längs jordytan är avståndet längs storcirkelbågen genom punkterna. (Mars 46. 8. a.k.)

d) stereometriska tillämpningar på oändliga serier

541. I en rät cirkulär kon, vars höjd är 3 gånger så stor som bottenytans radie, är en med denna likformig kon inskriven på det sätt, att denna andra kons spets ligger i medelpunkten för den förstas bottenyta. På samma sätt är i den andra konen en tredje med de förra likformig kon inskriven, i denna en fjärde osv. i oändlighet. Hur stor är summan av samtliga dessa koners volymer, om den första konens bottenradie är r? (V. 17. 3. R)

542. I en rät kon, vars toppvinkel är 60° och basdiameter 1 m, är en sfär inskriven; i denna åter en med den första likformig kon inskriven; i denna åter en sfär osv.

Hur stor är summan av alla dessa oändligt många sfärers kubikinnehåll? (H. 87. R)

543. I en sfär (radie $= r$) inskrives en kub, i denna en sfär, i vilken åter inskrives en kub osv. i oändlighet. Hur stor rymd skulle alla dessa sfärer tillsammans upptaga? (V. 80. R)

544. I en regelbunden fyrsidig pyramid, i vilken alla kantlinjer är a längdenheter, inskrives en kub, så att en av dess begränsningsytor ligger i pyramidens basyta och fyra av dess hörn på var sin av pyramidens sidokanter. I den därvid bildade toppyramiden inskrives på samma sätt en ny kub. Genom upprepning av detta förfaringssätt erhåller man slutligen en oändlig serie kuber. Beräkna förhållandet mellan dessa kubers sammanlagda volym och den ursprungliga pyramidens volym. Förhållandet skall anges dels exakt, dels approximativt med tre säkra decimaler. (Jan. 45. 2. a.k.)

e) några stereometriska maximi- och minimibestämningar, "variationsbeskrivningar"

545. Vilken bland alla cylindrar, som kan inskrivas i en sfär med radien r, har den största buktiga ytan? Hur stor är denna och hur stor cylinderns hela yta? (H. 87. R)

546. I en rät kon av trä är höjden tre gånger så stor som basytans radie $(= r)$. Man önskar av konen utskära en rät cylinder med största möjliga begränsningsyta. Sök cylinderns basdiameter och höjd. (V. 10. 3. R)

547. I en triangel är summan av bas och höjd 12 cm. Triangeln får rotera omkring basen, så att en dubbelkon uppkommer. Bestäm bas och höjd så, att dubbelkonens volym blir så stor som möjligt. (Jan. 38. 5. a.k.)

548. I en sfär inskrives en pyramid med kvadratisk basyta och största möjliga volym. Uttryck denna pyramids höjd och basyta i sfärens radie (r). (V. 12. 4. R)

549. I en halvsfär är en rät cirkulär kon med största möjliga volym inskriven, så att konens spets sammanfaller med sfärens medelpunkt. Hur stor är konens toppvinkel? (V. 14. 4. R)

550. Upprita kurvan $y = 5 - x^2$. En rektangel $ABCD$ har hörnen A och B på x-axeln samt hörnen C och D på den del av kurvan, som ligger ovanför x-axeln; punkten C är belägen i första kvadranten. Figuren får rotera kring x-axeln, varvid rektangeln alstrar en cylinder. Bestäm koordinaterna för hörnet C, så att cylinderns volym blir så stor som möjligt. (Aug. 53. 3. a.k.)

551. **(R)** Diametern i ett klot med radien r delas i förhållandet $3 : 5$. Genom delningspunkten lägges ett plan vinkelrätt mot diametern. I det större av de erhållna klotsegmenten inskrives en rät pyramid med kvadratisk basyta så, att pyramidens spets faller i medelpunkten av klotsegmentets plana yta. Bestäm avståndet från klotets medelpunkt till pyramidens basyta, då pyramidens volym är så stor som möjligt. (Aug. 38. 3. a.k.)

552. En pyramid är given. Pyramiden skäres av ett med basytan parallellt plan. Snittytan väljes till bottenyta i en annan pyramid, vars topp ligger i den ursprungliga pyramidens basyta. Hur skall planet läggas , för att den nya pyramiden skall få så stor volym som möjligt, och hur stor blir denna, uttryckt i den ursprungliga pyramidens volym? (H. 30. 3. R)

553. En likbent triangel med konstant omkrets roterar kring bisektrisen till vinkeln mellan de lika stora sidorna. Bestäm förhållandet mellan triangelns sidor, då den uppkomna rotationskonen har så stor volym som möjligt. (Aug. 39. 4. a.k.)

554. En rät pyramids basyta är en liksidig triangel. Pyramidens spets ligger i medelpunkten till en given sfär. Basytans hörn ligger på sfärens yta. Bestäm det största värde, som förhållandet mellan pyramidens och sfärens volymer kan anta. (Jan. 41. 5. a.k.)

555. **(R)** En kvadrat roterar kring en av sina diagonaler. I den därvid alstrade dubbelkonen inskrives en parallellt stympad rät cirkulär kon, vars basradier förhåller sig som $1 : 2$ och vars axel sammanfaller med dubbelkonens. Vilket är det största värde, som förhållandet mellan den stympade konens och dubbelkonens volymer kan anta? (Jan. 50. 6. a.k.)

556. I en given halvsfär inskrives en rät cirkulär cylinder, så att en av cylinderns generatriser faller utefter en diameter i halvsfärens plana yta och omkretsarna till cylinderns basytor tangerar den sfäriska ytan i var sin punkt. Beräkna förhållandet mellan cylinderns höjd och basdiameter, då dess volym är så stor som möjligt. (Mars 48. 3. a.k.)

557. Mantelytan i en rät cirkulär kon är π ytenheter. Bestäm basytan, då konens volym är så stor som möjligt. (Aug. 51. 4. a.k.)

558. Bestäm höjden i den räta cirkulära cylinder med största möjliga volym, vars hela yta är lika med ytan av en sfär med radien r. (V. 19. 5. R)

559. Räta linjen AT tangerar en cirkel med radien r i punkten A. CD är en med AT parallell korda i cirkeln. På vilket avstånd från AT skall CD dragas, för att den solida figur, som uppstår, då triangeln ACD roterar kring AT, skall få så stor volym som möjligt? (V. 25. 5. R)

560. I en tresidig pyramid är fem kantlinjer lika stora och av given längd. Den sjätte kantlinjen är variabel och skall väljas så, att sammanlagda arean av pyramidens begränsningsytor blir så stor som möjligt. Hur stor är då vinkeln mellan de båda sidoytor, vilkas skärningslinje står emot den variabla kantlinjen? (Aug. 45. 4. a.k.)

561. **(R)** I en halvcirkel har man inskrivit en rektangel $ABCD$, i vilken sidan AB faller utefter diametern. Mittpunkten E på halvcirkelns periferi sammanbindes med C och D. Figuren $ABCEDA$ får rotera kring normalen från E mot diametern. Bestäm förhållandet mellan rektangelns sidor, då volymen av den uppkomna rotationskroppen är så stor som möjligt. Förhållandet skall anges dels exakt i förenklad form, dels approximativt med tre decimaler. (Mars 45. 5. a.k.)

562. I en godtycklig tresidig pyramid $PABC$ med höjden h skär ett med basytan ABC parallellt plan L sidokanterna PA, PB och PC i punkterna D, E respektive F. Genom linjen DE lägges ett plan M parallellt med sidokanten PC. De båda planen L och M, pyramidens basplan och två av dess sidoplan avgränsar ett tresidigt prisma. Hur långt från P skall planet L läggas, för att detta prismas volym skall bli så stor som möjligt, och hur förhåller sig denna maximivolym till hela pyramidens volym? Bevis för att den avgränsade kroppen är ett prisma erfordras icke men betraktas som en förtjänst. (Aug. 49. 5. a.k.)

563. A och B är två punkter, vilkas avstånd är a. Med B som medelpunkt uppritas en cirkel med radien x. C är tangeringspunkten för den från A dragna tangenten. Beräkna x så, att den koniska yta, som AC beskriver vid figurens rotation kring AB blir så stor som möjligt. (Aug. 36. 6. a.k.)

564. **(R)** I en rät cirkulär kon, vars höjd och bottenradie är lika stora, inlägges ett regelbundet tresidigt prisma, så att en av sidoytorna ligger i konens bottenyta och de båda hörn, som icke hör till denna sidoyta, blir belägna på konens mantelyta. Bestäm förhållandet mellan baskanten och sidokanten i det största prisma, som uppfyller dessa villkor. (Aug. 40. 5. a.k.)

565. **(R)** Totala begränsningsytan av en rät cirkulär kon är dubbelt så stor som en given sfärs yta. Sök förhållandet mellan konens och sfärens volymer, när konens volym är så stor som möjligt. (Jan. 48. 6. a.k.)

566. **(R)** Totala ytan av en rät cirkulär kon är lika med ytan av en given sfär med radien r. Vilket är det största värde, som ytan av den i konen inskrivna sfären kan anta? (Aug. 55. 5. a.k.)

567. **(R)** I ett rätt prisma med kvadratisk basyta är summan av alla kantlinjerna 24 dm. Undersök, hur det kring prismat omskrivna klotets radie varierar, då basytans kantlinje varierar, och åskådliggör detta grafiskt. Ange också radiens eventuella maxima och minima. (Jan. 49. 6. a.k.)

568. **(R)** En rät cirkulär kon med största möjliga volym inskrives i ett klot. I ett mot konens axel vinkelrätt plan utskäres en cirkelring av klotytan och konens mantelyta. Undersök, hur förhållandet mellan cirkelringens och klotets yta varierar, då planet ändrar läge mellan konens spets och basyta. (Mars 44. 6. a.k.)

569. **(R)** Genom den radie, som är vinkelrät mot ett halvklots plana yta, lägges tre plan, så att halvklotet delas i sex lika delar. I en av dessa delar inskrives en rät cirkulär cylinder, så att dess mantelyta tangerar de båda plan, som innehåller den nämnda radien, medan dess ena basyta ligger i halvklotets plana yta och den andra basytans omkrets tangerar den sfäriska ytan. Bestäm förhållandet mellan volymerna av den inskrivna cylindern och ifrågavarande del av halvklotet, när cylinderns volym är så stor som möjligt. (Aug. 52. 6. a.k.)

570. **(R)** En rät cirkulär kon är så beskaffad, att volymen av den största räta cirkulära cylinder, som kan inskrivas i konen och har gemensam axel med denna, har samma volym som den i konen inskrivna sfären. Bestäm konens toppvinkel. (Jan. 55. 6. a.k.)

571. **(R)** En kropp består av en rät cirkulär cylinder och ett halvklot, vars plana begränsningsyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Den sammansatta kroppens totala begränsningsyta är $5\pi a^2$, där a är en konstant. Undersök, och åskådliggör grafiskt, hur den sammansatta kroppens volym varierar, då halvklotets radie ändras. Ange särskilt det värde på radien, för vilket volymen blir så stor som möjligt. (Jan. 45. 8. a.k.)

572. **(R)** I ett likbent parallelltrapets har höjden h och en av de parallella sidorna a konstanta längder. Den andra av de parallella sidorna varierar; dess längd betecknas med x. Trapetsets diagonaler drages, varigenom två likbenta trianglar erhålles. Figuren får rotera kring sin symmetriaxel, varvid de båda nämnda likbenta trianglarna alstrar två koner. Bestäm dessa koners sammanlagda volym som funktion av x. Undersök, hur den erhållna funktionen varierar för olika x-värden, och ange speciellt, om den antar några maximi- eller minimivärden. – Det erfordras icke, men betraktas som en förtjänst, om utredning även lämnas för hur den erhållna funktionen kan tolkas för negativa x-värden, dvs. vilken den kropp är, vars volym anges genom funktionen. (Nov. 50. 7. a.k.)

573. **(R)** Ett klot skäres av ett plan. I det ena av de båda klotsegmenten inskrives räta cylindrar, så att den ena basytan ligger i det skärande planet och omkretsen av den andra på klotytan. Hur förhåller sig de delar, i vilka den mot planet vinkelräta diametern delas av planet, om höjden i den av dessa cylindrar, som har den största volymen, är $\frac{3}{4}$ av klotets radie? (Nov. 52. 7. a.k.)

574. **(R)** En rät cirkulär cylinders basradie är r och höjd h. Genom axelns mittpunkt drages en linje parallellt med cylinderns basytor, och genom denna lägges ett plan, som skär basytorna längs kordorna AB och CD. Vilket är det största värde, som ytan av fyrhörningen $ABCD$ kan anta? (Jan. 44. 7. a.k.)

575. **(R)** A och B är ändpunkterna av en rymddiagonal i en regelbunden oktaeder med kantlinjen a; C, D, E och F är i ordning de övriga hörnen i oktaedern. Bestäm avståndet från en punkt P på kantlinjen BC till kantlinjen AD som funktion av sträckan BP:s längd. Utred därefter, hur nämnda avstånd varierar, när P rör sig från B till C, samt åskådliggör detta schematiskt i ett diagram. Ange särskilt eventuella maxima och minima. (Mars 49. 8. a.k.)

576. **(R)** Genom en punkt P på kantlinjen AB i en regelbunden oktaeder lägges ett plan parallellt med två motstående sidoytor. Oktaederns övriga sidoytor avgränsar av planet en sexhörning. Beräkna, var P skall vara belägen på AB, för att sexhörningens yta skall bli så stor som möjligt. (Nov. 41. 8. a.k.)

Uppgifter på biologisk och social gren mars 1957 – mars 1961

Mars 1957

Biologisk gren

1. En rät cirkulär kon, en rät cirkulär cylinder och en sfär har lika stora begränsningsytor. Konens och cylinderns bottenytor har lika stor radie som sfären. Bestäm, hur de tre kropparnas volymer förhåller sig till varandra, och ange resultatet exakt och i så enkel form som möjligt.
2. Den längre av de parallella sidorna i ett parallelltrapets ligger längs x-axeln. Ekvationerna för två av de övriga sidorna är $2x - y = 0$ och $3x + y - 8 = 0$. Bestäm ekvationen för den mindre av de parallella sidorna så, att trapetsets yta blir 4 ytenheter.
3. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av termernas kvadrater dubbelt så stor som seriens summa. Vilka värden kan seriens första term anta?
4. En vinkel i en romb delas i förhållandet $1 : 2$ av en rät linje, som delar en av rombens sidor innantill i förhållandet $1 : 2$. Bestäm rombens vinklar.
5. Kurvan $y = ax^3 - ax^2 + bx + 3$ har en minimipunkt i punkten $(-1;\ 0)$. Bestäm konstanterna a och b, upprita kurvan och beräkna ytan av det ändliga område, som begränsas av kurvan och x-axeln.
6. På kurvan $2y = 11 - 2x^2$ är en punkt P så belägen, att normalen till kurvan i P§ skär de positiva koordinataxlarna. Bestäm normalens ekvation, då ytan av den triangel, som normalen bildar med de positiva koordinataxlarna, är så stor som möjligt. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att de värden anges, som abskissan för punkten P kan anta.
7. I en pyramid är basytan en kvadrat $ABCD$ med sidan 2 cm; O är pyramidens spets. Sidoytan OAB är vinkelrät mot basytan, och sidokanterna OA och OB är lika långa. Pyramidens höjd är 3 cm. Genom en punkt P på pyramidens höjd lägges ett plan, som går genom baskanten CD. Ytan av snittfiguren mellan detta plan och pyramiden är en funktion av sträckan OP. Ange denna funktion, undersök den med avseende på maximi- och minimivärden samt beskriv, hur snittytan varierar, då punkten P genomlöper pyramidens höjd.
8. En funktion $f(x)$ och dess derivata är båda kontinuerliga i intervallet $0 \leq x \leq 10$. I intervallet $0 \leq x \leq 4$ är funktionen definierad som ett polynom av första graden och i intervallet $4 \leq x \leq 10$ som ett polynom av andra graden. Vidare är $f(0) = 4$, $f(2) = 5$ och $f(10) = 0$. Bestäm funktionen och upprita den motsvarande funktionskurvan. Ange särskilt funktionens största värde.

Social gren

1. I en cirkel med 5 cm radie är en triangel inskriven, i vilken en vinkel är 12,75° och en av de närliggande sidorna 4,72 cm. Hur stor är triangelns största sida?

2. = B 1.
3. = B 2.
4. = B 3.
5. Ett lån på 100 000 kronor, som löper med 3 % ränta på ränta, amorteras under 20 år genom lika stora annuiteter, erlagda vid årets slut. Hur mycket av den vid slutet av det tionde året erlagda annuiteten utgör kapitalavbetalning och hur mycket utgör ränta för det senaste året?
6. = B 5.
7. = B 6.
8. En funktion är i intervallet $0 \leq x \leq 6$ definierad som ett polynom av andra graden. Vidare är $f(0) = 6$, $f(6) = 0$ samt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{1}{2}.$$

Bestäm funktionen, och upprita den motsvarande funktionskurvan. Ange särskilt funktionens största värde.

Augusti 1957

Biologisk gren

1. I skärningspunkterna mellan kurvan $y = 2 - x^2$ och den räta linjen $x + y = 0$ drages normalerna till kurvan. Bestäm först de vinklar, som dessa bildar med x-axeln. Beräkna sedan med stöd härav den spetsiga vinkeln mellan normalerna.
2. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 3 och summan av termerna med udda ordningsnummer 5 enheter större än seriens andra term. Bestäm seriens kvot.
3. Konstruera kurvan $4y = 4x^2 - x^3$. Genom origo drages den tangent till kurvan, som inte sammanfaller med x-axeln. Bestäm ytan av den slutna figur, som begränsas av tangenten och kurvan.
4. En regelbunden tresidig pyramid är inskriven i en sfär på sådant sätt, att basytans hörn ligger på en storcirkel i sfären. Bestäm vinkeln mellan två sidoytor i pyramiden.
5. I fyrhörningen $ABCD$ är sidorna AB och DC parallella. Sidan AD är 4 cm, sidan BC 6 cm och vinkeln A tre gånger så stor som vinkeln C. Bestäm fyrhörningens vinklar.
6. P är en rörlig punkt på kurvan $2y = x^2$, Q är en fast punkt på y-axeln. Mätetalet för sträckan PQ betraktas som funktion av x-koordinaten för punkten P. För vilka lägen av punkten Q har denna funktion något ändligt maximum?
7. Funktionen $y = f(x)$ antages ha derivata för $x = a$. Denna derivata $f'(a)$ kan definieras på följande sätt:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Enligt den allmänna teorin för gränsvärden innebär detta, att hur litet det positiva talet ε än väljes, så kan man finna ett positivt tal δ, så beskaffat att

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| < \varepsilon, \quad \text{om } |h| < \delta.$$

Om ε väljes $= 10^{-6}$, vilket är då det största värde, som δ kan anta i det fall, då $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ och $a = 1$?

8. I en regelbunden oktaeder med kantlinjen a är P och Q två motstående hörn. En pyramid har sin spets i P, och dess basyta är den snittyta, som ett normalplan till sträckan PQ utskär av oktaedern. Undersök, hur pyramidens volym varierar, då normalplanets skärningspunkt med sträckan PQ rör sig från P till Q, och åskådliggör detta grafiskt. Ange särskilt det största värde, som volymen kan anta.

Social gren

1. Med den ena kateten i en rätvinklig triangel som diameter uppritas en cirkel. Beräkna triangelns minsta vinkel i det fall, då $1/9$ av hypotenusan ligger utanför cirkeln.

2. = B 1.

3. = B 2.

4. = B 3.

5. = B 4.

6. En droskägare köpte en bil för 12 000 kr. Skatter, försäkringsavgifter och reparationskostnader uppgick varje år till sammanlagt 1500 kr. Bilen användes i trafik under fem år, varefter den såldes för 2000 kr. Hur stort belopp av den årliga inkomsten av bilen kan beräknas ha åtgått för att täcka samtliga nämnda kostnader för bilen under femårsperioden? Alla inkomster och utgifter tänkes förlagda till varje särskilt års slut, och ränta på ränta beräknas efter 4 %.

7. = B 6.

8. = B 7.

November 1957

Biologisk gren

1. I triangeln ABC ligger hörnet A i punkten $(1;\ 2)$ och hörnen B och C på den räta linjen $x + y + 1 = 0$. Vinkeln B är 45° och triangelns yta 5 ytenheter. Bestäm koordinaterna för hörnen B och C i de båda fall, som kan förekomma.

2. Bestäm konstanterna a, b, c och d i funktionen $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, så att motsvarande kurva går genom origo och har maximipunkten $(-1;\ 1)$ och så att tangenten till kurvan i origo går genom nämnda maximipunkt. Uppita därefter kurvan.

3. I fyrhörningen $ABCD$ är sidorna AB och BC vardera 8 cm, CD 6 cm och DA 10 cm. Vinkeln A är 60°. Beräkna fyrhörningens övriga vinklar.

4. I en geometrisk serie med positiva termer är kvoten 2. Produkten av de två första termerna är 8 och produkten av samtliga termer 2^{55}. Bestäm antalet termer i serien.

5. I ett halvklot med radien 6 cm inskrives en rät cirkulär cylinder med ena basytan i halvklotets plana yta. I det sfäriska segmentet, som cylinderns andra basyta avskär av halvklotet, inskrives en rät cirkulär kon, vars basyta sammanfaller med segmentets plana yta och vars spets ligger på den sfäriska kalotten. Bestäm cylinderns höjd så, att den sammanlagda volymen av cylindern och konen blir så stor som möjligt.

6. Den inre begränsningsytan av en bägare är en rotationsyta. Den uppkommer, när den del av kurvan $y = \frac{1}{4}x^2$, som bestämmes av villkoret $0 \leq x \leq 5$, roterar kring y-axeln. Koordinatsystemet är rätvinkligt, och längdenheten är 1 cm på var och en av koordinataxlarna. Bestäm bägarens volym.

7. Vid en atombombsexplosion bildas radioaktivt splitter, som utsänder radioaktiv strålning under lång tid efter explosionen. Denna strålnings intensitet brukar mätas i enheten "röntgen per timme" r/tim. Vid ett experiment fann man på ett visst avstånd från försöksstationen följande sammanhörande värden av tiden x tim efter explosionsögonblicket och intensiteten y r/tim:

x	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	5,0	10,0	50
y	251	36,3	15,8	2,29	1,00	0,145	0,063	0,009

Inpricka dessa värden i ett diagram med ${}^{10}\log x$ som abskissa och ${}^{10}\log y$ som ordinata, och upprita en kurva, som så nära som möjligt ansluter sig till de erhållna punkterna. Bestäm med hjälp härav ${}^{10}\log y$ som funktion av ${}^{10}\log x$. Ange slutligen i explicit form y som funktion av x.

8. I rektangeln $ABCD$ är sidorna AB 6 cm och BC 8 cm. I rektangeln inskrives en rätvinklig triangel EFG med den räta vinkelns spets F på sidan BC, kateten FG parallell med rektangelns diagonal BD samt hörnet E på sidan AB eller på sidan AD. Uttryck den rätvinkliga triangelns yta som funktion av sträckan BF, och åskådliggör denna funktion grafiskt. Ange speciellt det största värde, som ytan kan anta.

Social gren

1. Ett landområde, vars areal är 8424 m^2, avbildas på en lantmäterikarta som en fyrsiding $ABCD$. Sidorna i denna är i ordning $AB = 75$ mm, $BC = 60$ mm, $CD = 42$ mm och $DA = 39$ mm. Diagonalen AC är 45 mm. I vilken längdskala är kartan ritad?

2. = B1.

3. = B2.

4. En person erhöll vid årsskiftet 1947–48 av en annan person ett amorteringslån på 20 000 kr, löpande med $3\frac{1}{2}$ % ränta på ränta. Lånet skulle amorteras genom 20 lika stora annuiteter, verkställda vid årsskiftena, första gången 1948–49. Hur stor var skulden vid årsskiftet 1956–57, sedan den avtalade inbetalningen gjorts?

5. = B 4.

6. = B 5.

7. = B 6.

8. = B 7.

Januari 1958

Biologisk gren

1. I den konvergent oändlig geometrisk serie är kvoten inverterade värdet av första termen. Seriens summa är lika med -2. Bestäm första termen.

2. Av hörnen i romben $OABC$ ligger O i origo, A på y-axeln och B i punkten $(-3;\ 9)$. Bestäm koordinaterna för hörnen A och C, samt beräkna rombens yta.

3. I en regelbunden fyrsidig pyramid bildar en sidoyta 60° vinkel med basytan. Bestäm förhållandet mellan radien i den kring pyramiden omskrivna sfären och pyramidens höjd.

4. Bestäm konstanterna a, b och c, så att den räta linjen $y = ax$ blir normal till kurvan $y = x^3 + bx + c$ i punkten $(-2;\ \frac{2}{9})$. Konstruera därefter kurvan.

5. I en kvadrat $ABCD$ utdrages sidorna AB, BC, CD och DA till punkterna B', C', D' respektive A', så att förlängningarna blir lika stora. Visa, att dessa punkter utgör hörn i en kvadrat. Om dennas yta är dubbelt så stor som den ursprungliga kvadratens, hur stor vinkel bildar då sidan $A'B'$ med förlängningen av sidan AB?

6. Ett visst radioaktivt preparat sönderfaller, och dess vikt avtar med tiden. Om ett stycke av preparatet vid början av en tidsperiod på t minuter väger a mg, kan dess vikt, y mg, vid slutet av nämnda period beräknas enligt formeln $y = a \cdot e^{-kt}$, där k är en positiv konstant. Ett stycke av detta preparat vägde vid ett tillfälle 56,7 mg och 4 tim 56 min senare 40,5 mg. Beräkna preparatets halveringstid, dvs den tid det tar, för att vikten av ett stycke av preparatet skall minskas till hälften.

7. En rektangel $OABC$ har hörnet O i origo och hörnen A och C i punkterna $(4a;\ 0)$ respektive $(0;\ 5b)$, där a och b är positiva konstanter. En punkt P är belägen på sammanbindningslinjen mellan punkterna D $(0;\ 2b)$ och E $(4a;\ 4b)$. Den med y-axeln parallella linjen genom punkten P skär sidorna OA och BC i punkterna F respektive G. Uttryck summan av ytorna av parallelltrapetsen $OFPD$ och $BGPE$ som funktion av abskissan för punkten P. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur denna funktion varierar, när punkten P rör sig från D till E.

8. Funktionen $f(x)$ definieras på följande sätt:

$$f(x) = x^2 + 9x, \quad \text{då } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b, \quad \text{då } x > 0$$

Bestäm konstanterna a och b, så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x = 0$ och så att kurvan $y = f(x)$ får en bestämd tangent, då x-koordinaten är 0. Konstruera därefter kurvan $y = f(x)$, och beräkna ytan av det slutna område, som begränsas av kurvan och positiva x-axeln.

Social gren

1. En triangel, vars vinklar förhåller sig som $2 : 3 : 4$ är inskriven i en cirkel. Hur många procent av cirkelns yta ligger utanför triangeln?

2. = B 1.

3. = B 2.

4. En byggmästare hade vid årsskiftet 1957–58 två spekulanter på en villa. Den ene erbjöd 40 000 kr kontant genast och 1000 kr vid slutet av vart och ett av åren 1958 t.o.m. 1977. Den andre erbjöd 20 000 kr kontant omedelbart och 4000 kr vid slutet av vart och ett av åren 1958 t.o.m. 1967. Vilket anbud var ekonomiskt fördelaktigast för byggmästaren, om han räknade med fast penningvärde och 5 % ränta på ränta?

5. = B 3.

6. = B 4.

7. = B 6.

8. = B 7.

Mars 1958

Biologisk gren

1. En triangels hörn är belägna i punkterna $(0;\ 0)$, $(3;\ 6)$ och $(9;\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka triangelns yta delas av kurvan $y = x^2 - 4x + 5$.

2. Den räta linjen $y = 4x + 7$ är tangent till kurvan $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i den punkt, vars x-koordinat är -2. Den räta linjen $y = x + 1$ är normal till kurvan i den punkt, där denna skär y-axeln. Bestäm konstanterna a, b, c och d. Undersök därefter kurvan med avseende på maximi- och minimipunkter, samt konstruera den i dess huvuddrag.

3. Hörnen i två parallella begränsningsytor $ABCD$ och $A'B'C'D'$ i en kub är så betecknade, att AA', BB', CC' och DD' är kanter i kuben. Bestäm förhållandet mellan volymerna av tetraedrarna $AB'CD$ och $AB'CD'$.

4. Funktionerna ”sinus hyperbolicus för x” ($\sinh x$) och ”cosinus hyperbolicus för x” ($\cosh x$) definieras på följande sätt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Bevisa formlerna

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x;$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

5. Den räta linje, som i en likbent triangel drages genom basens ena ändpunkt och medelpunkten för den kring triangeln omskrivna cirkeln, delar en av de lika sidorna i förhållandet $2 : 3$ från spetsen räknat. Beräkna triangelns vinklar.
6. Basradien i en rät cirkulär cylinder är 1 längdenhet, medan cylinderns höjd varierar. En sfär tangerar cylinderns båda plana ytor i dessas mittpunkter och skjuter icke utanför cylindern. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur volymen av den del av cylindern, som ligger utanför sfären, varierar, då sfärens radie ändras. Ange särskilt det största värde, som den nämnda volymen kan anta.
7. I en oändlig geometrisk serie är termerna funktioner av en variabel x. Summan av första och tredje termen är 7, och summan av andra och fjärde termen är $2x^2 - 20x + 25$. Undersök, för vilka värden på x serien är konvergent.
8. Funktionen $a(x + b)(x + a + b)$ är negativ för alla reella värden på x, utom då $20 \leq x \leq 30$. Bestäm konstanterna a och b, och ange, vilka värden funktionen kan anta.

Social gren

1. En punkt B på ena vinkelbenet av en 30° vinkel BAC tages till medelpunkt för en cirkel med 10 cm radie. Cirkeln skär det andra vinkelbenet i punkterna C och D. Ytorna av trianglarna ABC och ABD förhåller sig som $1 : 2$. Beräkna längden av sträckan AB.
2. = B 1.
3. = B 2.
4. Funktionerna ”sinus hyperbolicus för x” ($\sinh x$) och ”cosinus hyperbolicus för x” ($\cosh x$) definieras på följande sätt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Bevisa, att $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2$ har ett av x oberoende värde och bestäm detta.

5. En person, som hade sina pengar placerade mot 5 % ränta, frigjorde i början av år 1948 120 000 kr och köpte för denna summa en egendom. Under åren 1948 t.o.m. 1957 gav egendomen ingen nettoavkastning utan erfordrade i stället en årlig nettoutgift av 4000 kr för underhåll och förbättringar. Denna utgift tänkes utgå vid slutet av vart och ett av dessa år. Vid början av år 1958 sålde personen egendomen för 160 000 kr. Hur stor vinst eller förlust kan han därvid sägas ha gjort vid tidpunkten för försäljningen? Ingen hänsyn tages till penningvärdets försämring.

6. = B 3.

7. = B 6.

8. = B 7.

Augusti 1958

Biologisk gren

1. Undersök kurvan $y = x^4 - 2x^2 + 1$ med avseende på maximi- och minimipunkter, samt konstruera den i dess huvuddrag. Beräkna därefter ytan av det ändliga område, som begränsas av x-axeln och kurvan.

2. En fyrsidig pyramids basyta är en rektangel. Beräkna förhållandet mellan två närliggande sidor i rektangeln, då pyramidens sidoytor i ordning bildar vinklarna 40°, 50°, 40° och 50° med basytan.

3. Bestäm den positiva konstanten a så, att kurvan $y = 2x^3 + ax^2$ tangerar den räta linjen $2x + y = 0$. Uppritа därefter kurvan med angivande av eventuella maxima och minimipunkter.

4. En likbent triangel med given omkrets får rotera kring basen. Hur stor skall triangelns toppvinkel vara, för att den uppkomna rotationskroppens volym skall bli så stor som möjligt?

5. I triangeln ABC är sidan BC 6 cm och sidan AB dubbelt så stor som sidan AC. Undersök, mellan vilka gränser sidan AC kan variera. Bestäm därefter denna sidas längd, då triangelns yta är så stor som möjligt.

6. P är en punkt i första och Q en punkt i tredje kvadranten i ett rätvinkligt koordinatsystem. Från P och Q fälles normalerna mot koordinataxlarna, varvid två rektanglar med gemensamt hörn i origo uppkommer. Den räta linjen PQ skär koordinataxlarna i punkterna A och B. Bevisa, att om de nämnda rektanglarna har lika stora ytor, så är sträckan AP = sträckan BQ.

7. På kurvan $y = a^x$, där $a > 0$, tages en följd av punkter $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, vilkas abskissor utgör termer i en aritmetisk serie. Bevisa, att ordinatorna för punkterna $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ utgör termer i en geometrisk serie och riktningskoefficienterna för kordorna $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ termer i en annan geometrisk serie.

8. En kurva har i ett rätvinkligt koordinatsystem ekvationen $2x^2 - 2y - 7 = 0$. Undersök, hur antalet normaler till kurvan från en punkt P på x-axeln varierar, när P genomlöper nämnda axel.

Social gren

1. I ena ändpunkten A av diametern AB i en cirkel med medelpunkten O och radien 1 m drages tangenten till cirkeln. En radie, som bildar 30° vinkel med OA, utdrages, tills den skär den nyss nämnda tangenten i punkten C. På tangenten avsättes en sträcka $CD = 3$ m, varvid punkterna C och D ligger på var sin sida om punkten A. Visa, att längden av sammanbindningslinjen BD är approximativt lika med längden av cirkelbågen AB.

2. = B 1.
3. = B 2.
4. En likbent triangel med omkretsen 8 cm får rotera kring basen. Bestäm triangelns sidor så, att den uppkomna rotationskroppens volym blir så stor som möjligt.
5. = B 3.
6. En person utlånade vid ett årsskifte en viss summa mot inteckning i en fastighet, dvs. en del av fastigheten ställdes som säkerhet för lånet. Enär fastigheten var besvärad av flera inteckningar med förtursrätt före den nämnda inteckningen, var utlåningen förbunden med en viss risk, varför låntagaren betingade sig 7, 5 % ränta, medan han eljest inte kunde placera sina pengar mot mer än 5 % ränta. Inbetalningen skulle ske vid årsskiftena, första gången ett år efter utlåningen. Vid årsskiftet 25 år efter utlåningen inträffade det, sedan räntan i vanlig ordning betalats, att inteckningen blev värdelös, enär då låntagaren inställde betalningarna och fastigheten måste säljas till ett sådant pris, att långivaren inte erhöll något av försäljningssumman. Kan långivaren anses vara kompenserad för den av betalningsinställelsen förorsakade förlusten av det utlånade kapitalet genom den uppburna relativt höga räntan?
7. = B 6.
8. = B 7.

November 1958

Biologisk gren

1. Bestäm förhållandet mellan den buktiga och den plana begränsningsytan i en rät cirkulär kon med konstant sida, så att skillnaden mellan de nämnda ytorna blir så stor som möjligt.
2. Två konvergenta oändliga geografiska serier har samma första term. Den ena seriens kvot är lika med det inverterade värdet av första termen. Den andra seriens kvot är dubbelt så stor som den förra seriens, och dess summa är två enheter större än den förra seriens summa. Bestäm den sist nämnda summan i exakt och så enkel form som möjligt.
3. Radioaktiva ämnen sönderfaller som bekant på så sätt, att av en viss mängd m av ämnet återstår efter tiden t en mängd $me^{-\lambda t}$, där λ är en viss konstant. För ett visst sådant ämne har man funnit, att 10 % återstår efter 50 dygn. Hur länge dröjer det ytterligare, innan endast 5 % återstår av den ursprungliga mängden m?
4. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Vinkeln B är 3 gånger så stor som vinkeln A, och diagonalerna AC och BD förhåller sig som $3 : 4$. Bestäm fyrhörningens vinklar.
5. En hel rationell funktion $y = f(x)$ av tredje graden har nollställena $x = -2$, $x = 0$ och $x = 2$. Den motsvarande funktionskurvan och x-axeln innesluter en del av koordinatplanet i första kvadranten med ytan 8 ytenheter. Bestäm $f(x)$, och upprita funktionskurvan.

6. Bestäm konstanterna a, b och c så, att funktionen $y = ax^2 + bx + c$ för alla värden på x satisfierar ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 10x^2 - 3x.$$

Med $\frac{d^2y}{dx^2}$ menas derivatan av $\frac{dy}{dx}$ med avseende på x.

7. På kurvan $y = x^2$ väljes två punkter A och B så, att triangeln AOB blir rätvinklig i origo O. Sidorna AO och BO utdrages över O, och deras skärningspunkter med den räta linjen $y = -1$ betecknas med P respektive Q. Bevisa, att trianglarna AOB och POQ har lika stora ytor.

8. I en pyramid $ABCDE$ är basytan en kvadrat $ABCD$ med ytan 18 ytenheter. Sidokanten AE är vinkelrät mot basytan och har längden 12 längdenheter. Genom en punkt P på diagonalen AC i basytan lägges ett plan vinkelrätt mot AC. Mätetalet för snittytan är en funktion av mätetalet för sträckan AP. Ange denna funktion, undersök densamma och åskådliggör den grafiskt. Särskild uppmärksamhet skall ägnas funktionens definitionsområde.

Social gren

1. I triangeln ABC är sidan AB 18 cm, sidan BC 8 cm och sidan AC dubbelt så stor som den mot AB dragna medianen. Beräkna vinkeln B.
2. = B 1.
3. = B 2.
4. = B 3.
5. En person har erhållit en livränta på 1200 kr, vilket belopp skall utbetalas till honom vid början av vart och ett av 25 på varandra följande år. Han önskar nu i stället uppbära 3500 kr vid första årets början och ett visst belopp vid början av vart och ett av de närmast följande 15 åren. Hur stort blir detta belopp, om ränta beräknas efter $4\frac{1}{2}$ %?
6. = B 5.
7. = B 6.
8. = B 7.

Januari 1959

Biologisk gren

1. En rät cirkulär kon, en sfär och en rät cirkulär cylinder är placerade på ett horisontellt underlag. Planet genom cylinderns övre basyta tangerar sfären och går genom konens spets. Volymerna av konen, sfären och cylindern förhåller sig som 1 : 2 : 3. Hur förhåller sig de tre kropparnas begränsningsytor?

2. Kurvan $y = ax - x^2$, där a är en positiv konstant, skär x-axeln i punkterna A och O, där O är origo. Tangenten till kurvan i förstnämnda punkt skär y-axeln i punkten B. Bevisa, att kurvbågen OA delar ytan av triangeln OBA i två delar, vilkas förhållande är oberoende av konstanten a, och beräkna detta förhållande.
3. Ena diagonalen i en kvadrat har ändpunkterna (0; 0) och (2; 4). Bestäm sidornas ekvationer.
4. I en regelbunden fyrsidig pyramid är vinkeln mellan en sidoyta och basytan 45°. Beräkna vinkeln mellan två angränsande sidoytor.
5. Stockholms invånarantal utgjorde 526 000 vid början av år 1935 och 794 000 vid början av år 1957. Om man antar, att invånarantalet växer exponentiellt med tiden, vid början av vilket år skulle invånarantalet första gången uppgå till minst 1 000 000?
6. I en rätvinklig triangel är en av medianerna medelproportional till de båda andra. Beräkna triangelns vinklar.
7. Bestäm ett polynom $f(x)$ av andra graden, så att $f(0) = 9$, $f(2) = 1$ och så att $f(x) = 0$ för ett enda värde i intervallet $0 < x < 2$.
8. Ange villkoret för att kurvorna $y = x^2$ och $y = a + bx - x^2$, där a och b är konstanter, skall skära varandra i två punkter. Punkterna betecknas med A och C, kurvornas maximi- och minimipunkter med B och D. Bevisa, att fyrhörningen $ABCD$ är en parallellogram.

Social gren

1. En rät cirkulär kon, en sfär och en rät cirkulär cylinder är placerade på ett horisontellt underlag. Planet genom cylinderns övre basyta tangerar sfären och går genom konens spets. Volymerna av konen, sfären och cylindern förhåller sig som 1 : 2 : 3. Bestäm konens och cylinderns radier, uttryckta i sfärens radie.
2. Höjden mot basen i en likbent triangel är 4 gånger så stor som den i triangeln inskrivna cirkelns radie. Beräkna triangelns vinklar.
3. = B 2.
4. = B 3.
5. = B 4.
6. = B 5.
7. En person hade vid vart och ett av sex på varandra följande årsskiften insatt 1000 kr på kapitalräkning i en bank. Ränta beräknades efter $4\frac{1}{2}$ % och lades till kapitalet vid slutet av varje halvår. Hur stort var vid tidpunkten för den sista insättningen värdet av den totala ränteinkomst, som personen haft av sina sålunda placerade pengar?
8. = B 7.

Mars 1959

Biologisk gren

1. Funktionen $x^3 + 4x^2 - 3x + a$ har ett maximum, som har värdet 6. Bestäm konstanten a.
2. Det ovanför x-axeln belägna segmentet av parabeln $y = 1 - x^2$ roterar kring x-axeln. Bestäm volymen av den därvid uppkomna kroppen.
3. En konvergent oändlig geometrisk series summa är 2. Bestäm seriens tredje term som funktion av kvoten x, och åskådliggör denna funktion grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter. Funktionens definitionsområde måste beaktas.
4. I en regelbunden tresidig pyramid är vinklen mellan en sidokant och basytan och vinkeln mellan en sidoyta och basytan komplementvinklar. Beräkna vinkeln mellan två sidoytor.
5. I fyrhörningen $ABCD$ är sidorna AB, BC, CD och DA respektive 6 cm, 9 cm, 4 cm och 3 cm. Vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln C. Beräkna fyrhörningens yta i de båda fall, som är möjliga. – Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att det exakta värdet av ytan anges.
6. Upprita kurvorna $y = e^{-x}$ och $y =^{e} \log x$ i samma koordinatsystem, och bestäm med ledning av diagrammet approximativt lösningen till ekvationen $e^{-x} =^{e} \log x$. Bestäm därefter medelst ett förstorat diagram eller på annat sätt, lösningen med två säkra decimaler.
7. Ett regelbundet tresidigt prisma är inskrivet i en viss sfär. Det största värde, som prismats volym kan anta, är 1 dm^3. Beräkna sfärens radie.
8. En funktion $f(x)$ är ett polynom av tredje graden. Vidare är $f(-1) = 16$ ett maximum, $f(0) = 11$ samt

   $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(1 + \Delta x) - f'(1)}{\Delta x} = 0.$$

   Bestäm funktionen, och upprita den motsvarande kurvan i dess huvuddrag.

Social gren

1. I tre lika stora cirklar är radien 1 längdenhet. I den första inskrives en liksidig triangel, i den andra en kvadrat och i den tredje en regelbunden sexhörning. Hur förhåller sig ytorna av triangeln, kvadraten och sexhörningen till varandra? Svaret skall anges i såväl exakt som approximativ form.
2. = B 1.
3. = B 2.
4. = B 3.
5. En person A antas under 45 år ha en årlig inkomst av 10 000 kr. En annan person B antas under de fem första av de nämnda åren helt skna inkomst men under de snerae 40 åren ha en större årlig inkomst än A. Hur stor skall

denna B:s inkomst vara, för att de båda personerna skall kunna anses vara likställda i inkomsthänseeende under den nämnda 45-årsperioden? den årliga inkomsten tänkes inflyta på en gång vid årets slut, och ränta på ränta beräknas efter $4\frac{1}{2}$ %.

6. = B 4.

7. = B 5.

8. En funktion $f(x)$ är ett polynom av tredje graden. vidare är $f(0) = 4$ ett maximum, $f(-1) = 0$ samt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = -3.$$

Bestäm funktionen, och upprita den motsvarande kurvan i dess huvuddrag.

Augusti 1959

Biologisk gren

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie bildar första, tredje och fjärde termerna en aritmetisk serie. Bestäm den geometriska seriens kvot.

2. Beräkna ytan av det ändliga område i xy-planet, som begränsas av kurvan $y = 3x^2 - x^3$ och tangenten till kurvan i dennas maximipunkt.

3. En triangel ABC har hörnet A i punkten $(5;\ -2)$. Ekvationerna för medianerna från hörnen B och C är $x = 2$ respektive $y = 2$. Ange ekvationerna för triangelns sidor.

4. I triangeln ABC delar höjden från hörnet A sidan BC innantill i förhållandet $1 : 4$ och vinkeln A i förhållandet $1 : 2$. Bestäm vinkeln A.

5. Lös ekvationen $2^{1{,}507} + 3^{1{,}507} = 4^x$.

6. I en regelbunden tetraeder $OABC$ delar punkten D kantlinjen AB i förhållandet $1 : 2$. Bestäm vinkeln mellan linjen OD och planet ABC.

7. En kropp är sammansatt av en rät cirkulär cylinder och en rät cirkulär kon, vars bottenyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Konens sida och cylinderns höjd är båda 1 cm. Bestäm konens höjd, så att den sammansatta kroppens volym blir så stor som möjligt, och beräkna konens toppvinkel i detta fall.

8. I triangeln ABC träffar höjden från hörnet A sidan BC i punkten H. Sträckorna AH, BH och CH är 6 cm, 12 cm respektive 6 cm. Två med höjden AH parallella transversaler, som båda skär sidan BC, har ett inbördes avstånd av 6 cm. Uttryck ytan av den del av triangeln ABC, som ligger mellan transversalerna, som funktion av avståndet från hörnet B till den närmaste transversalen. Undersök denna funktion och åskådliggör den grafiskt. Definitionsområdet måste beaktas.

Social gren

1. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är den längre av de parallella sidorna AB 5 cm och de lika stora sidorna BC och AD vardera 3 cm. Diagonalen AC bildar rät vinkel med sidan BC. Beräkna sidan CD.
2. = B 1.
3. = B 2.
4. En person insatte under ett år vid varje månads slut 100 kr i en bank, där räntan beräknades efter 3, 5 % och lades till kapitalet vid årets slut. Hur mycket skulle han vid självdeklarationen i februari följande år för detta bankkontos vidkommande uppta som ränteinkomst per den 31.12 och som värde av de innestående medlen vid årets utgång? Ingen uttagning eller annan insättning än de nämnda gjordes under året på ifrågavarande konto. Öretalen medtages inte i deklarationen.
5. = B 3.
6. = B 5.
7. = B 6.
8. En kropp är sammansatt av en rät cirkulär cylinder och en rät cirkulär kon, vars bottenyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Konens sida och cylinderns höjd är båda 1 cm.Bestäm den sammansatta kroppens volym som funktion av konens höjd, och undersök, hur volymen varierar, då konens höjd ändras. Ange särskilt, när volymen antar sitt största värde, och beräkna konens toppvinkel i detta fall.

November 1959

Biologisk gren

1. Upprita kurvan $y = 4x - x^2$ i dess huvuddrag. Beräkna därefter ytan av den ändliga del av koordinatplanet, som ligger mellan kurvan och tangenterna till kurvan i dennas skärningspunkter med x-axeln.
2. En regelbunden tetraeder och en kub har lika stora volymer. Beräkna förhållandet mellan tetraederns och kubens totala begränsningsytor. Förhållandet skall anges i exakt och så långt som möjligt förenklad form.
3. I funktionen $y = e^{kx}$, där k är ett reellt tal, sättes $x = 1, 2, 3, \ldots$ Visa, att de erhållna funktionsvärdena bildar en oändlig geometrisk serie. För vilka värden på k är denna serie konvergent? Bestäm slutligen k så, att seriens summa blir $\frac{1}{3}$.
4. Kateterna i en rätvinklig triangel är lika stora som sidan respektive diagonalen i en kvadrat. Beräkna vinkeln mellan medianen till hypotenusan och medianen till den längre av kateterna.
5. I en aritmetisk serie med ett udda antal termer är första termen 10. Summan av termerna med udda ordningsnummer är 16 och summan av termerna med jämna ordningsnummer är 12. Vilken är serien?

6. Kurvan $y = ax^2$, där $a > 0$, är uppritad i ett rätvinkligt koordinatsystem. Origo betecknas med O, och P är en godtycklig punkt på kurvan. Normalen från P mot y-axeln råkar denna i punkten Q. Normalen i P mot sammanbindningslinjen OP skär y-axeln i punkten R. Visa, att kurvans normal i punkten P är median i triangeln PQR.

7. I det ovan x-axeln belägna segmentet av parabeln $y = 3 - x^2$ inskrives en rektangel med en sida utefter x-axeln. Undersök och åskådliggör grafiskt med angivande av eventuella maxima och minima, hur längden av rektangelns diagonal varierar som funktion av x-koordinaten för rektangelns hörn på positiva x-axeln.

8. En funktion $y = f(x)$ är i intervallet $x \leq 2$ definierad genom ekvationen $y = 6 - 2x - x^2$, i intervallet $2 < x < 3$ genom ekvationen $y = ax + b$ och i intervallet $x \geq 3$ genom ekvationen $y = x^2 + cx + d$. Bestäm konstanterna a, b, c och d så, att $f(x)$ för $x = 2$ och $x = 3$ blir kontinuerlig och får derivata. Upprita slutligen den mot funktionen svarande kurvan.

Social gren

1. Den ena sidan i en parallellogram är dubbelt så stor som den andra, och diagonalerna är 9 cm och 13 cm. Beräkna parallellogrammens vinklar.

2. = B 1.

3. = B 2.

4. En stipendiefond uppgick vid början av år 1959 till 20 000 kr. Den är placerad mot 4 % ränta. Av räntan skall vid slutet av varje år fr.o.m. 1959 75 % utdelas som stipendium, medan återstoden lägges till kapitalet. Inga förvaltningskostnader beräknas. Hur stort blir det stipendiebelopp, som skall utdelas vid slutet av år 1969, om man antar, att räntesatsen (räntefoten) förblir oförändrad.

5. = B 3.

6. = B 5.

7. = B 6.

8. En funktion $y = f(x)$ är i intervallet $x \leq 1$ definierad genom ekvationen $y = 6 - 2x - x^2$ och i intervallet $x > 1$ genom $y = x^2 + ax + b$. Bestäm konstanterna a och b så, att $f(x)$ för $x = 1$ blir kontinuerlig och får derivata. Upprita slutligen den mot funktionen svarande kurvan.

Januari 1960

Biologisk gren

1. Beräkna ytan av det område, som i första kvadranten begränsas av kurvan $y = 3x + x^2 - 2x^3$ och x-axeln.

2. Mellan variablerna x och y finns ett samband av formen $y = a \cdot e^{kx}$, där a och k är konstanter. För $x = 1$ och $x = 2$ har man funnit de motsvarande värdena på y vara 8, 208 respektive 0, 647. Bestäm konstanterna a och k.

3. I en likbent triangel med toppvinkeln $2v$ inskrives en cirkel. Parallellt med basen drages en tangent till cirkeln. Bestäm förhållandet mellan den avskurna topptriangelns och den ursprungliga triangelns ytor. Beräkna därefter ett närmevärde på detta förhållande, om v är $20°$.
4. Attraktionskraften mellan två himlakroppar är enligt Newtons gravitationslag omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan kropparna. Om avståndet mellan kropparna ökas med 10 %, med hur många procent minskas då attraktionskraften?
5. Sammanbindningslinjen mellan punkterna A (6; 12) och B (−6; −6) bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel. Bestäm en punkt C på y-axeln, så att sammanbindningslinjen AC tillsammans med koordinataxlarna bildar en triangel med lika stor yta som den förra.
6. I vilka punkter skär kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ varandra? Upprita också de båda kurvorna i deras huvuddrag.
7. Punkterna (−2; −1) och (1; 2) i ett rätvinkligt koordinatsystem samt en punkt P på kurvan $y = x^3 - x$ utgör hörn i en triangel. Undersök, hur ytan av denna triangel varierar, när P beskriver den angivna kurvan. Eventuella maxima och minima skall anges.
8. En rät cirkulär cylinder med basdiametern 2 cm och höjden 1 cm är inskriven i en rät cirkulär kon på sådant sätt, att cylinderns ena basyta ligger på konens basyta och omkretsen av dess andra basyta ligger på konens mantelyta. För vilka värden på konens basradie är förhållandet mellan konens och cylinderns volymer större än 4, 5?

Social gren

1. Sex tal bildar en geometrisk serie. Summan av de båda yttersta termerna är 33 och produkten av de båda mellersta 32. Vilka är talen?
2. = B 1.
3. = B 2.
4. I en likbent triangel med toppvinkeln 40° inskrives en cirkel. Parallellt med basen drages en tangent till cirkeln. Därigenom avskäres en topptriangel. Bestäm förhållandet mellan dennas och den ursprungliga triangelns ytor, och ange detsamma i såväl exakt som approximativ form.
5. En fader ämnar bekosta sin dotters studier närmast efter studentexamen genom att vid början av vart och ett av studieåren till henne utbetala ett visst belopp. Hon har att välja mellan en treårig utbildning, som är förlagd till åren 1960–62 med en årlig kostnad av 4800 kr, och en femårig utbildning under åren 1961–65 med en årlig kostnad av 3000 kr. Vilket alternativ medför den minsta kostnaden för fadern, om han bestrider utgifterna för dotterns studier med medel, som han har placerade till en räntesats (räntefot) av 3, 5 %?
6. Attraktionskraften y mellan två himlakroppar beror av dessas inbördes avstånd x på så sätt, att $y = \frac{c}{x^2}$, där c är en konstant. Om avståndet mellan

kropparna ökas med 10 %, med hur många procent minskas då attraktionskraften?

7. = B 5.

8. Punkterna $(-2; -1)$ och $(1; 2)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem samt en punkt P på kurvan $y = 2x - x^2$ utgör hörn i en triangel. Undersök, hur ytan av denna triangel varierar, när P beskriver den angivna kurvan. Eventuella maxima och minima skall anges.

Mars 1960

Biologisk gren

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan $-\frac{2}{3}$ och summan av de två första termernas inverterade värden 1. Bestäm seriens kvot.

2. Kurvan $y = a + bx + cx^2$, där a, b och c är konstanter, går genom punkten $(-1; -1)$ och tangerar i origo den räta linjen $y = 2x$. Bestäm a, b och c. Beräkna därefter ytan av det ändliga område, som begränsas av kurvan och de räta linjerna $y = 0$ och $y = 3$.

3. Den totala ytan av en regelbunden tresidig pyramid är 7 gånger så stor som basytan. Beräkna vinkeln mellan en sidokant och basytan.

4. I ett likbent parallelltrapets är omkretsen 16 cm och var och en av de spetsiga vinklarna 45°. Beräkna trapetsets sidor, när dess yta är så stor som möjligt.

5. I triangeln ABC drages höjden CH. Vinkeln BAC är hälften så stor som vinkeln HBC. Vidare är $AC : CB = 7 : 3$. Beräkna vinkeln B i vart och ett av de båda fall, som är möjliga.

6. Sveriges folkmängd utgjorde vid mitten av åren 1908, 1928 och 1948 approximativt 5,40 miljoner, 6,10 miljoner respektive 6,89 miljoner. Visa, att de anförda folkmängdsuppgifterna är förenliga med antagandet, att folkmängden sedan 1908 har vuxit exponentiellt med tiden. Om man förutsätter, att tillväxten även i fortsättningen sker efter samma lag, vilket år kan folkmängden beräknas första gången överstiga 8 miljoner?

7. En funktion $y = f(x)$ är i intervallet $x \leq 0$ definierad genom ekvationen $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ och i intervallet $x > 0$ genom ekvationen $y = dx^2 + ex + f$. Koefficienterna a, b, c, d, e och f är konstanter. Funktionen är överallt deriverbar. Vidare är $f(-1) = 3$ ett maximum och $f(3) = -3\frac{1}{2}$ ett minimum. Bestäm de angivna koefficienterna, och upprita den mot funktionen svarande kurvan.

8. Basradien i en massiv rät cirkulär cylinder är 1 dm och höjden h dm. Genom cylindern borras ett hål i form av en rät cirkulär cylinder med samma axel som den förra. Ange den så erhållna kroppens totala yta som funktion av hålets radie. Undersök denna funktion för olika värden på h med angivande av eventuella maxima och minima. Åskådliggör slutligen, hur funktionen varierar, geom att i olika koordinatsystem upprita exempel på motsvarande kurva i de huvudfall, som erhållits vid undersökningen.

Social gren

1. = B 1.
2. I en likbent triangel är basen 10 cm och var och en av de lika stora sidorna 13 cm. Med basen som diameter uppritas en cirkel. Bestäm ytan av vart och ett av de tre cirkelsegment, som ligger utanför triangeln.
3. = B 2.
4. Den totala ytan av en regelbunden tresidig pyramid är 7 gånger så stor som basytan. Beräkna vinkeln mellan en sidoyta och basytan.
5. = B 4.
6. Ett lån på 5000 kr skall återbetalas inom 15 år. Vid slutet av varje år, med början samma år som lånet upptagits, betalas dels den under året upplupna räntan efter 4 %, dels som amortering ett belopp, som vid varje tillfälle är fyra gånger så stort som samtidigt erlagda räntan. Hur mycket återstår att betala vid det femtonde årets slut utöver de nyss angivna beloppen?
7. = B 6.
8. Basradien och höjden i en massiv rät cirkulär cylinder är vardera 1 dm. Genom cylindern borras ett hål i form av en rät cirkulär cylinder med samma axel som den förra. Ange den så erhållna kroppens totala yta som funktion av hålets radie. Åskådliggör funktionen grafiskt med angivande av eventuella maxima och minima.

Augusti 1960

Biologisk gren

1. Bestäm konstanterna a och b i ekvationen $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ så, att motsvarande kurva får en minimipunkt i punkten $(1;\ 1)$.
2. De räta linjerna $x + 2y = 10$ och $x + 2y = a$, där a är en positiv konstant, begränsar tillsammans med koordinataxlarna ett parallelltrapets med ytan 24 ytenheter. Bestäm värdet på a.
3. Den del av kurvan $y = 9 - x^2$, som ligger ovanför x-axeln, begränsar tillsammans med nämnda axel en yta. Beräkna volymen av den kropp, som alstras, när denna yta roterar kring y-axeln.
4. Den första, sjätte och fjortonde termen i en aritmetisk serie med olika termer bildar i nämnd ordning de tre första termerna i en geometrisk serie. Bestäm dennas kvot. Beräkna approximativt förhållandet mellan den tionde termen i den geometriska och den tionde termen i den aritmetiska serien.
5. I en regelbunden fyrsidig pyramid är alla kantlinjer a cm. Beräkna radien i den i pyramiden inskrivna sfären.
6. I triangeln ABC är sidan AB 8 cm och sidan AC 5 cm. Medianen från hörnet A bildar $30°$ vinkel med sidan AB. Beräkna längden av sidan BC.
7. Ett halvklot och en rät cirkulär cylinder med höjden 6 cm har lika stora buktiga ytor. Halvklotets volym är större än cylinderns. Uttryck skillnaden mellan

halvklotets och cylinderns volymer som funktion av halvklotets radie. Ange denna funktions definitionsområde, undersök densamma med avseende på maxima och minima, och åskådliggör den slutligen grafiskt.

8. Lös x ur ekvationen $y = e^x + e^{-x}$, och bestäm med hjälp av resultatet det minsta värde, som y kan anta. Upprita slutligen den mot ekvationen svarande kurvan i dess huvuddrag.

Social gren

1. = B 1.

2. I en likbent triangel är basen 6 cm och den inskrivna cirkelns radie 1 cm. Beräkna triangelns yta.

3. Lös ekvationen

$$\frac{3-4x}{3} = 1 - x - (1-x)^2 + (1-x)^3 - (1-x)^4 + \dots \text{ i oändlighet.}$$

4. = B 2.

5. = B 3.

6. En person erhöll vid början av ett år ett lån på 10 000 kr mot 5 % ränta. Lånet skulle amorteras under 10 år med lika stora annuiteter vid slutet av varje år med början samma år lånet erhölls. Från och med det sjätte året tillämpades en räntesats (räntefot) av 6 %. Hur mycket måste på grund härav de återstående annuiteterna ökas, för att lånet skulle bli till fullo gäldat på föreskriven tid?

7. = B 5.

8. = B 7.

November 1960

Biologisk gren

1. $F(x)$ är en hel rationell funktion av tredje graden, så bekaffad, att $F(0) = F'(0) = 2$ och $F(2) = F'(2) = 0$. Bestäm $F(x)$, och upprita kurvan $y = F(x)$ i dess huvuddrag.

2. Av det kol, som ingår i en levande organism, utgöres en viss, konstant bråkdel av den radioaktiva kolisotopen C^{14}. Från och med den tidpunkt, då organismen dör, avtar mängden av C^{14} enligt lagen för radioaktivt sönderfall, $m_t = m_0 e^{-\lambda t}$, där m_0 är den mängd C^{14}, som fanns vid den tidpunkt, då organismen dog, och m_t är den mängd, som finns kvar t år efter den nämnda tidpunkten. Genom mätning av koncentrationen kvarvarande C^{14} kan man beräkna storheten t. En dylik mätning visade, att mängden C^{14} i ett preparat utgjorde 32 % av vad den skulle ha varit, om organismen hade levat. För hur många år sedan dog organismen? Halveringstiden för C^{14} är 5600 år, dvs efter denna tid är endast hälften kvar av den ursprungliga mängden.

3. Bestäm konstanten a så, att kurvorna $y = ax^2 + 2,5$ och $y = x^2$ skär varandra under räta vinklar. Beräkna därefter ytan av det ändliga område, som begränsas av de båda kurvorna.

4. Punkterna P och Q på kurvan $y = x^3$ har x-koordinaterna 1 respektive $1 + \Delta x$. Riktningskoefficienterna för sekanten PQ och tangenten i P är k_1 respektive k_2. Vilket är det största möjliga värdet på $|k_1 - k_2|$, om $|\Delta x| \leq 0,01$?

5. I en konvergent oändlig geometrisk serie är kvoten k och första termen $(1-k^2)^2$. Bestäm seriens summa som funktion av kvoten. Ange definitionsområdet och eventuella maxima och minima för denna funktion, samt åskådliggör den slutligen i ett diagram.

6. I en regelbunden fyrsidig pyramid är sidokanten dubbelt så stor som baskanten. Ett av basytans hörn sammanbindes med mittpunkten på den motstående sidokanten. Visa, att den vinkel, som sammanbindningslinjen bildar med basytan, är exakt lika stor som vinkeln mellan två motstående sidokanter.

7. Ett parallelltrapets $ABCD$, där AB är den större av de parallella sidorna, har hörnet A i punkten $(9;\ 2)$ och hörnet B i punkten $(3;\ 5)$. Hörnet C ligger på y-axeln och hörnet D på x-axeln. Undersök, inom vilket område på y-axeln punkten C kan ligga, och bestäm ekvationen för sidan CD, när trapetsets yta är så stor som möjligt.

8. En rät cirkulär kon har lika stor begränsningsyta som en given sfär. Bestäm förhållandet mellan konens och sfärens volymer, när konens volym är så stor som möjligt.

Social gren

1. Ett kapital på 10 000 kr växer med ränta på ränta under 20 år. Om räntesatsen (räntefoten) är 3 % under de 10 första åren och 4 % under de följande 10 åren, till vilket belopp uppgår behållningen vid tjugoårsperiodens slut? Hur stort hade beloppet blivit, om räntesatsen i stället hela tiden varit 3, 5 %?

2. = B 1.

3. = B 2.

4. = B 3.

5. I en regelbunden fyrsidig pyramid är sidokanten dubbelt så stor som baskanten. Ett av basytans hörn sammanbindes med mittpunkten på den motstående sidokanten. Beräkna dels den vinkel, som sammanbindningslinjen bildar med basytan, dels vinkeln mellan två motstående sidokanter.

6. = B 4.

7. = B 5.

8. = B 7.

Januari 1961

Biologisk gren

1. Åskådliggör funktionerna $y = \frac{1}{2}x^2$ och $y = \frac{1}{3}x^3$ i ett rätvinkligt koordinatsystem, där enheten på vardera axeln är 5 cm. Kurvorna begränsar ett ändligt område i första kvadranten. Beräkna ytan av detta område.

2. För vilka värden på x i intervallet $0° < x < 360°$ bildar $\sin x$, $\frac{1}{2}\sin 2x$ och $\frac{1}{4}\sin 4x$ de tre första termerna i en konvergent oändlig geometrisk serie? Beräkna även seriens summa för ifrågavarande x-värden.
3. Vid mitten av åren 1930, 1940 och 1950 utgjorde befolkningen i Sveriges tätorter approximativt 48, 0 %, 57, 0 % respektive 67, 6 % av den totala befolkningen. Visa, att tätorternas andel av den totala befolkningen under åren 1930–1950 kan antagas ha ökat exponentiellt med tiden. När skulle denna andel var 75 %, om ökningen även efter 1950 sker efter samma lag som tidigare?
4. I ett halvklot med radien R inskrives en rät cirkulär cylinder, så att en generatris ligger i halvklotets plana begränsningsyta och går genom dennas medelpunkt, medan den diametralt motsatta generatrisen har sina ändpunkter på halvklotets buktiga begränsningsyta. Bestäm den största volym, som cylindern kan få.
5. För vilka reella a-värden har ekvationen $x^2 + ax + a^2 - a = 0$ reella rötter? Bestäm också det värde på a, för vilket rötternas skillnad är så stor som möjligt.
6. Bestäm y som funktion av x, då man vet, att $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - 8x$ och att y har ett minimivärde $= -4,5$. Undersök därefter funktionen med avseende på nollställen, maxima och minima, samt upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.
7. för de båda funktionerna $y = F(x)$ och $y = f(x)$ känner man de värdepar, somframgår av följande tabeller

x	2	5	10
$F(x)$	$53,4$	$55,5$	59

x	0	1	4	5
$f(x)$	$6,3$	$10,5$	$13,5$	$11,3$

   Visa först, att i ett rätvinkligt koordinatsystem de tre värdeparen för $F(x)$ svarar mot tre punkter i rät linje och att de fyra värdeparen för $f(x)$ svarar mot fyra punkter på en parabel, vars ekvation är av formen $y = ax^2 + bx + c$. Bestäm därefter de båda funktionerna $F(x)$ och $f(x)$, så att deras geometriska motsvarigheter blir den nämnda räta linjen respektive parabeln.Bestäm slutligen det x-värde för vilket skillnaden $F(x) - f(x)$ blir så liten som möjligt.
8. En kropp begränsas av två cirkulära cylindriska ytor med gemensam axel samt av två plan vinkelräta mot denna axel. Den större av de cylindriska ytorna har basradien 6 cm, och kroppens totala begränsningsyta är 90π cm^2. Hur stor är basradien i den mindre cylindriska ytan, om kroppens volym är så stor som möjligt.

Social gren

1. På diagonalen AC i rektangeln $ABCD$ är punkten E så belägen, att $AB : AE : EC = 4 : 2 : 3$. Beräkna vinkeln EBA.
2. = B 1.

3. En person hade upptagit ett lån, som han skulle avbetala med en annuitet av 1000 kr den 31 december under ett antal på varandra följande år, sista gången 1966. Han avled under år 1959. Hans arvingar betalade skulden genom att erlägga ett engångsbelopp den 31 december 1959. Hur stort var detta belopp, om ränta beräknas efter 4 %?

4. = B 3.

5. = B 4.

6. = B 5.

7. = B 6.

8. = B 7.

Mars 1961

Biologisk gren

1. Den mot funktionen $y = 1 - x^4$ svarande kurvan skär x-axeln i punkterna A och B. Kurvans tangenter i dessa punkter skär varandra i punkten C. I vilket förhållande delar kurvbågen AB ytan av triangeln ABC?

2. Funktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, där a, b, c och d är konstanter, har ett maximum för $x = \frac{4}{3}$ och ett minimum för $x = 2$. Vidare är $f(0) = -4$ och $f(1) = 0$. Bestäm $f(x)$, och uppritа kurvan $y = f(x)$ i dess huvuddrag.

3. De båda plattorna i en kondensator med kapacitansen C farad är förenade med ett motstånd med resistansen R ohm. Om spänningen mellan kondensatorplattorna i ett visst ögonblick är U_0 volt och t sekunder senare U_t volt, gäller sambandet $U_t = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. Vid experiment med en kondensator, för vilken $C = 10^{-5}$, har man funnit $U_0 = 20$ och $U_1 = 1$. Beräkna R.

4. I ett koordinatsystem är A en godtycklig punkt på den räta linjen $2x - y + 12 = 0$. Punkten A sammanbindes med punkten B $(8;\ 4)$. Punkten C är mittpunkten på sträckan AB. Bevisa, att punkten C, oberoende av läget för A, alltid ligger på en och samma räta linje, och bestäm denna linjes ekvation.

5. En av vinklarna i en triangel delas i tre lika stora delar av höjden och medianen från vinkelns spets. Bevisa, att triangeln är rätvinklig.

6. Termerna i en konvergent oändlig geometrisk serie är t_1, t_2, t_3, ..., där $t_1 \neq 0$. Bevisa, att de oändliga serierna $t_1^2, t_2^2, t_3^2, \ldots$, och $(t_1 - t_2)^2, (t_3 - t_4)^2, (t_5 - t_6)^2, \ldots$, likaledes är geometriska och konvergenta serier. Bestäm slutligen den först nämnda seriens kvot, så att den andra seriens summa blir 5 gånger så stor som den tredjes.

7. $ABCD$ är en regelbunden tetraeder med kantlinjen a cm. En punkt E på kantlinjen AB sammanbindes med hörnen C och D. Ange ytan av triangeln CDE som funktion av sträckan AE, och representera denna funktion grafiskt. Ange speciellt ytans minsta värde.

8. I en hel rationell funktion $f(x)$ av tredje graden är koefficienten för högstagradstermen 1. Vidare är $f(0) = 1$ och $f'(1) = 0$. Kurvan $y = f(x)$ tangerar den räta linjen $y - 1 = 0$. Det finns tre olika funktioner $f(x)$ som uppfyller dessa villkor. Bestäm dessa funktioner, beräkna deras maximi- och minimivärden, och uppria de motsvarande kurvorna i ett och samma koordinatsystem.

Social gren

1. En av de kortare diagonalerna i en regelbunden 7-hörning är 5 cm. Hur stor är en av de längre diagonalerna?
2. = B 1.
3. En person, som tänker sälja en tomt vid slutet av år 1961, har fått anbud från två spekulanter. Den ene erbjuder sig betala 5000 kr vid köpet och 4000 kr vid slutet av år 1963. Den andre erbjuder sig att vid slutet av varje år fr.o.m. 1961 t.o.m. 1966 betala 1600 kr. Vilket anbud är fördelaktigast, om ränta på ränta beräknas efter 4 % och hänsyn tages endast till anbudens penningvärde?
4. = B 2.
5. I Wales talas ännu det keltiska språket kymriska. Vid folkräkningarna 1901, 1921 och 1951 utgjorde de enbart kymrisktalande personerna 15, 1 %, 6, 3 % respektive 1, 7 % av den totala befolkningen. Visa, att nämnda procenttal kan antas ha ändrats exponentiellt med tiden under perioden 1901–1951. Om man vidare antar, att ändringen skulle ske enligt samma lag även efter 1951, vilket år skulle de enbart kymrisktalande ha nedgått till 0, 05 % av befolkningen?
6. I ett koordinatsystem är A en godtycklig punkt på den räta linjen $2x - y + 12 = 0$. Punkten A sammanbindes med punkten $B\ (8;\ 4)$. Punkten C är mittpunkten på sträckan AB. Bevisa, att punkten C, oberoende av läget för A, alltid ligger på den räta linjen $y = 2x$.
7. = B 6.
8. = B 7.