Examensuppgifter i

MATEMATIK

DEL 1

Urval för gymnasiets lägre ringar

Utgivna av

SIXTEN THÖRNQVIST

lektor

ANDRA UPPLAGAN
Andra tryckningen

Stockholm
NATUR OCH KULTUR

*

Printed in Sweden · Nerikes Allehanda Tryckeri
Örebro 1960

Innehåll

Förord

Föreliggande bok är den första av tre samlingar av matematiska examensuppgifter. Den omfattar realexamensuppgifter (r), studentuppgifter på latinlinjen (L), studentuppgifter på reallinjen före 1937 (R) samt studentuppgifter allmän kurs (a.k). De sistnämnda förekom första gången vårterminen 1937. (R) omedelbart efter uppgiftens nummer betyder, att uppgiften är avsedd att behandlas enbart på reallinjen.

Uppgifterna 1–133 är avsedda för R I^4 och A I^4, uppgifterna 134–250 för R II^4 och A II^4. Vad beträffar R I^3 och A I^3, kan man bland uppgifterna 1–100 välja ut ett mindre antal repetitionsexempel, medan uppgifterna 101–250 tillhör dessa ringars egentliga kurs.

Den andra samlingen upptar i stort sett uppgifter, som tillhör den för de sociala, biologiska och matematiska grenarna gemensamma kursen, medan den tredje samlingen innehåller för matematiska grenen speciellt avsedda uppgifter.

S. Thörnqvist

Förenkling av algebraiska uttryck

1. Förenkla så långt som möjligt

$$\left(\frac{3x+2y}{4}-2y\right) : \left(1\frac{5}{6}x-\frac{5y+3x}{3}\right)$$ (H. 30. r.)

2. Förenkla uttrycket

$$\left(\frac{n+1}{n-1}+\frac{n-1}{n+1}\right) : \left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

och beräkna dess värde, om $n = 2\frac{1}{3}$. (V. 13. r.)

3. Förenkla uttrycket

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right) : \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

och beräkna därpå dess värde för $a = 5\frac{1}{2};\ b = 3\frac{1}{3}$. (V. 32. r.)

4. Förenkla så mycket som möjligt uttrycket

$$\left\{\frac{\frac{1}{a}}{b}-\frac{\frac{1}{b}}{a}+\frac{1}{\frac{2b}{a}}+\frac{2}{\frac{a}{b}}\right\} : \frac{a^2+4b^2}{ab}.$$ (V. 38. r.)

5. Förenkla uttrycket

$$\left(1-\frac{y}{2x-y}\right)\left(\frac{x^2}{x-y}-x+y\right)$$

så långt som möjligt. (H. 39. r.)

6. Förenkla uttrycket

$$\frac{\frac{1}{9}a^2b^2-4c^2}{a^2b-6ac}$$

och beräkna dess värde för $a = 1\frac{1}{3};\ b = 4\frac{1}{2};\ c = -\frac{5}{6}$. (V. 36. r.)

7. Förenkla uttrycket

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) : \left(1-\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}\right)$$

och beräkna dess värde för $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2};\ b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. (H. 37. r.)

8. Förenkla så långt som möjligt uttrycket

$$\left(\frac{b^2}{a+b}+a-b\right) : \left(1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)$$

samt beräkna därpå dess värde för $a = 3\sqrt{2};\ b = \frac{1}{3}$. (V. 31. r.)

9. Hur stor är skillnaden mellan bråken

$$\frac{3a^2+5ab+2b^2}{2a^2+4ab+2b^2} \quad \text{och} \quad \frac{1,5a}{3a+3b}?$$ (V. 27. r.)

10. Förenkla så långt som möjligt skillnaden mellan bråken

$$\frac{18a^2+9ab-2b^2}{18a^2+24ab+8b^2} \quad \text{och} \quad \frac{4,5b}{9a+6b}.$$

Beräkna därefter skillnadens exakta värde och slutligen dess närmevärde, om $a=\sqrt{2}$ och $b=\sqrt{3}$. (H. 43. r.)

Ekvationer och ekvationssystem av första graden

a) ekvationer

11. Lös ekvationen

$$\frac{3x-2}{x+3}-\frac{1}{3x-9}=\frac{3(x-1)^2-46}{x^2-9}. \qquad \text{(V. 31. r.)}$$

12. Lös ekvationen

$$\frac{9}{12+8x}+\frac{7}{18-12x}-\frac{29-3x}{27-12x^2}=0. \qquad \text{(V. 53. r.)}$$

13. Lös ekvationen

$$\frac{1}{x-x^2}-\frac{2}{x+x^2}-\frac{x}{1-x^2}-\frac{1}{x}=0. \qquad \text{(H. 47. r.)}$$

14. Lös ekvationen

$$\frac{\frac{1}{x}-1\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}+1\frac{1}{2}}-\frac{1-x}{3x^2+2x}+1=0. \qquad \text{(V. 48. r.)}$$

15. Lös ekvationen

$$x+\frac{2x^2}{1\frac{1}{3}-2x}-\frac{\frac{5}{21}}{3\frac{1}{3}-5x}=0. \qquad \text{(H. 53. r.)}$$

16. Lös ekvationen

$$\frac{1}{0,6x+2}-\frac{1-0,1x}{0,09x^2-1}-\frac{0,5}{0,9x-3}=0. \qquad \text{(V. 54. r.)}$$

17. Lös ekvationen

$$(9+x^2):(9-x^2)+\frac{x+2}{3}:\left(1+\frac{x}{3}\right)-4:(3-x)=0. \qquad \text{(H. 42. r.)}$$

18. Lös ekvationen

$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{6x-1}{3x-3}. \qquad \text{(V. 44. r.)}$$

19. Lös ekvationen

$$\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2+x}\right):\frac{5}{x^2-1}-\frac{0,1}{x}=0,03. \qquad \text{(H. 21. r.)}$$

20. Lös ekvationen

$$\frac{(6,5-x) : 2-0,7}{(6x+1,5)(4x-1)}=\frac{4}{12x-3}-\frac{1}{2x+0,5}. \qquad \text{(H. 51. r.)}$$

21. Lös ekvationen

$$\left(\frac{2}{x}-3\right)\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2x}-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3}\right)=0. \qquad \text{(V. 45. r.)}$$

b) ekvationssystem

22. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x-1,1)^2-(y+0,1)^2=x(x-2)-y^2, \\ \dfrac{x+\dfrac{2}{3}}{0,2}-\dfrac{3-\dfrac{2y}{3}}{0,5}=20. \end{cases} \qquad \text{(H. 52. r.)}$$

23. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{0,6}-\dfrac{y-8x}{0,7}=4, \\ (3x+2y) : \frac{2}{3}-(y-5x) : \frac{5}{6}=7,5. \end{cases} \qquad \text{(V. 48. r.)}$$

24. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 9-\dfrac{12x-0,5y}{7}=\dfrac{\dfrac{x}{3}+1}{0,5}, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=x^2+y(y+1)-13. \end{cases} \qquad \text{(V. 41. r.)}$$

25. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}\left(2+\dfrac{6}{y}\right)=\dfrac{3}{y}\left(3-\dfrac{1}{x}\right), \\ \dfrac{1}{3}(x+6)-\dfrac{6}{5}(8-y)+3=0. \end{cases} \qquad \text{(V. 43. r.)}$$

26. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1\frac{2}{3}(4x-0,7)-3\frac{1}{6}(3y+0,8)=9,8, \\ \left(\dfrac{2}{y}+\dfrac{5}{x}\right) : \left(\dfrac{1}{5y}-\dfrac{1}{2x}\right)=20. \end{cases} \qquad \text{(H. 48. r.)}$$

27. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{y-\dfrac{3x}{4}}{0,5}+\dfrac{\dfrac{3x}{4}-y}{0,2}+\dfrac{3}{4}=0, \\ \dfrac{3}{4y-3x}-\dfrac{4}{4y+3x}=\dfrac{11}{16y^2-9x^2}. \end{cases} \qquad \text{(H. 50. r.)}$$

c) tillämpningar på ekvationssystem

28. Genom sammansmältning av ett antal tjugofemöringar och tioöringar har man åstadkommit en silverlegering, som är värd 6 kr och innehåller 48 % silver. Hur många mynt av vardera slaget har man tagit? En tjugofemöring väger 2,5 g och innehåller 60 % silver, en tioöring väger 1,5 g och innehåller 40 % silver. (H. 42. r.)

29. Vid busslinjen mellan M och H ligger två hållplatser på 350 m avstånd från varandra. En person bor 225 m från den ena hållplatsen och 275 m från den andra. Vill han från M med bussen hinna hem fortast möjligt, är det likgiltigt, vid vilken hållplats han stiger av. Reser han däremot från H, kan han komma hem en minut tidigare, om han stiger av vid den lämpligast belägna hållplatsen. Beräkna personens och bussens medelhastigheter. (V. 44. r.)

30. Två orter A och B ligger vid en landsväg 90 km från varandra. Från A utgick kl. 8 två bussar med samma hastighet, den ena i riktning mot B, den andra i motsatt riktning. Kl. 9 avgick en personbil från B i riktning mot A och fortsatte utan uppehåll förbi A. Personbilen, som körde exakt samma sträckor som respektive bussar, mötte den ena kl. 9.30 och upphann den andra kl. 15.30. Beräkna fordonens medelhastigheter. (V. 46. r.)

Geometriska problem

a) beräkning av vinklar och bågar

31. I vilken månghörning är vinkelsumman en sjundedel av en hundrahörnings? (H. 20. 4. L.)

32. Ett fartyg pejlar en fyr, dvs. bestämmer vinkeln mellan fartygets kursriktning och syftlinjen till fyren. Pejlingen anger en vinkel av 20°. Efter 45 minuters segling med oförändrad kurs och en hastighet av 10 knop pejlar man från fartyget samma fyr i en dubbelt så stor vinkel, alltså 40°. Huru många sjömil var avståndet till fyren vid andra pejlingen? 1 knop = 1 sjömil per timme. (V. 50. r)

33. I triangeln ABC är D och E de punkter, där bisektriserna till vinklarna A och B skär motstående sidor. Bestäm gradtalen för vinklarna A, B och C, då $\bigwedge CDA = 85°$ och $\bigwedge AEB = 100°$. (V. 33. r.)

34. I triangeln ABC drages bisektriserna till vinklarna A och B. De råkar varandra i punkten O. Vinkeln AOB är v. Bevisa, att vinkeln ACB är $2v - 180°$. (H. 31. r.)

35. I en cirkel är medelpunktsvinkeln $AOB = 81°40'$. Kordan AB utdrages genom B till C så att BC blir lika stor som cirkelns radie. C sammanbindes med medelpunkten O. Beräkna vinklarna i triangeln AOC. (V. 23. r.)

36. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Sidorna AB och DC råkar utdragna varandra och bildar därvid en vinkel på $26°42'$. Utdrages sidorna AD och BC, råkas även de och bildar en vinkel på $24°18'$. Beräkna härav fyrhörningens vinklar. (V. 52. r.)

37. Kring triangeln ABC, vars vinklar A, B och C förhåller sig till varandra som talen $17 : 18 : 19$, är en cirkel omskriven. Hur stora är de vinklar, som tangenten i A till denna cirkel bildar med sidan AB? (V. 16. r.)

38. ABC är en triangel, vars vinklar A, B och C förhåller sig till varandra som talen 5, 6 och 7. Kring triangeln omskrives en cirkel och på dennas perifieri tages mellan A och B en godtycklig punkt P, vilken sammanbindes med A och B . Hur många grader är vinkeln APB? (H. 17. r.)

39. A, B, C och D är fyra på varandra följande hörn i en regelbunden åttahörning. diagonalerna AC och AD drages. Hur stora är vinklarna i triangeln ACD? (H. 40. r.)

40. På en cirkels omkrets tages i ordning fem punkter, A, B, C, D och E så, att kordorna AB, BC och CD är $=$ cirkelns radie och att E delar bågen DA mitt itu. Bestäm vinklarna i den triangel, som har sina hörnpunkter i A, C och E. (H. 28. r.)

41. I en cirkelsektor AOB (O är cirkelns medelpunkt) är bågen lika lång som radien. Bågens ena ändpunkt B sammanbindes dels med A, dels med bågens mittpunkt C. Hur stor är vinkeln ABC? ($\pi = 3,14$.) (V. 32. r.)

42. Ett parallelltrapets $ABCD$, där AB är den större av de parallella sidorna samt AC och BD diagonalerna, är inskrivet i en cirkel. $\bigwedge ADB = 65^\circ$ och $\bigwedge CBD = 35^\circ$. Bestäm trapetsets vinklar. (H. 32. r.)

43. Framhjulen på en lastbil är 24 tum och bakhjulen 26 tum i diameter. Hur långt har bilen gått då ett framhjul rullat ett varv mer än ett bakhjul? 1 tum = 2,5 cm. $\pi = 3,14$. (H. 47. r.)

44. En nautisk mil är en minut av jordekvatorn. Hur många kilometer är den nautiska milen, om jordens radie är 637 mil? I en sjömilitär rapport upgavs, att 50 nautiska mil skulle vara ungefär 90 km. Hur mycket avviker denna uppgift från det riktiga värdet? Beräkna avvikelsen i procent av sistnämnda värde. (V. 46. r.)

b) några tillämpningar av Pythagoras' sats

45. En cirkel går genom ändpunkterna av en sida i en kvadrat och tangerar motstående sida i dess mittpunkt. Beräkna cirkelns radie, då kvadratens sida är 3,2 cm. (V. 24. r.)

46. Två cirklar med medelpunkterna A och B har vardera en radie av 5 cm. Avståndet AB är 12 cm. Parallellt med AB drages en gemensam tangent till cirklarna. Beräkna radien i den cirkel, som tangerar såväl cirklarna som denna tangent. (H. 30. r.)

47. I en likbent triangel är basen 26 cm och höjden mot en av de lika stora sidorna 24 cm. Beräkna triangelns yta. (V. 47. r.)

48. I en spetsvinklig likbent triangel är var och en av de lika stora sidorna 35 cm och den mot en av dem dragna höjden 28 cm. Beräkna basen i triangeln. (V. 26. r.)

49. Taket till ett kyrktorn har formen av en pyramid med kvadratisk basyta. Pyramidens höjd är 15 m och dess baskant 16 m. Vad kostar det att lägga plåttak på detta torn, om priset för material och arbete är 12,50 per m^2? (H. 46. r.)

50. I den spetsvinkliga triangeln ABC är sidan AB 7 cm, höjden mot sidan AB 6 cm och höjden mot sidan BC 5,6 cm. Beräkna höjden mot sidan AC. (H. 51. r.)

51. En parallellepipedisk låda med längden a dm, bredden b dm och höjden c dm ligger på ett vågrätt golv. En person förflyttar den genom att fyra gånger välta över den i tur och ordning kring var och en av kantlinjerna med längden a dm. Hur lång väg kommer därvid lådans symmetripunkt att tillryggalägga? (Aug. 48. 6. L)

c) likformighetslära

52. Ett åkerfält har formen av en triangel ABC, där $AB = 108$ m, $AC = 144$ m och $BC = 180$ m. Från en punkt D på AB, belägen 48 m från B, vill man tvärs över fältet sätta en gärdesgård DE parallell med BC. Hur lång blir gärdesgården? (V. 30. r.)

53. I en rätvinklig triangel, vars kateter är 15 cm och 20 cm, är en kvadrat inskriven, så att en av dess vinklar sammanfaller med triangelns räta vinkel och motstående hörn är beläget på hypotenusan. Hur stor är kvadratens sida? (V. 20. r.)

54. I en rätvinklig triangel, vars kateter är 6 cm och 8 cm, är en kvadrat inskriven med en sida utefter triangelns hypotenusa. Hur stor är kvadratens sida? (H. 23. r.)

55. En höjd i ett parallelltrapets med den mindre av de parallella sidorna $= a$ och den större $= b$ är delad i förhållandet $1 : 2$ från den större av de parallella sidorna räknat. Beräkna längden av parallelltransversalen genom delningspunkten. (Mars 51. 2. a.k.)

56. I en rätvinklig triangel är den mindre kateten 6 cm och den större 12 cm. Beräkna radien i den cirkel, som har sin medelpunkt på den större kateten och som tangerar både hypotenusan och den mindre kateten. (H. 37. r.)

57. I en likbent triangel är de lika stora sidorna 48 cm vardera samt basen 24 cm. En med basen parallell linje avskär ett parallelltrapets, där tre sidor är lika stora. Bestäm deras längder samt trapetsets yta. (V. 23. r.)

58. I en cirkel med radien 1 cm är dragen en diameter AB, som förlänges till C, så att BC är 1,6 cm. Tangenterna från C träffar den genom A dragna tangenten i D och E. Beräkna ytan av triangeln CDE. (V. 25. r.)

59. I en rätvinklig triangel är kateterna AB och BC 16 cm respektive 30 cm. Mittpunktsnormalen till hypotenusan råkar denna i D och kateten BC i E. Visa, att en cirkel kan omskrivas kring fyrhörningen $ABED$, och beräkna denna cirkels radie. (Nov. 46. 4. L.)

60. En cirkel är inskriven i en likbent triangel ABC, där $AB = AC = 20$ cm och $BC = 24$ cm. Hur stor är cirkelns radie? (H. 50. r.)

61. Basen i en likbent triangel är 15 cm och var och en av de lika stora sidorna 12,5 cm. I triangeln inskrives en cirkel, och parallellt med basen drages en transversal, som tangerar cirkeln. Beräkna längden av denna transversal. (V. 46. r.)

62. I en rätvinklig triangel ABC är hypotenusan $BC = 12$ cm. Från dennas mittpunkt D drages normalen DE mot hypotenusan. Punkten E ligger på kateten AC. Beräkna ytan av triangeln ABC, om sträckan DE är 2 cm. (V. 54. r.)

63. Två cirklar, vilkas radier är 6 cm och 2 cm, tangerar varandra innantill i punkten A. I den större cirkeln drages diametern AB och en korda BC, vilken tangerar den mindre cirkeln. Sök längden av denna korda. (V. 44. r.)

64. Två cirklar med radierna 2 cm och 5 cm tangerar en vinkels båda ben. Den mindre cirkelns medelpunkt ligger cm från vinkelspetsen. Ännu en linje, som tangerar båda cirklarna, drages. Hur långt från vinkelspetsen skär denna linje vinkelns bisektris? (V. 42. r.)

65. AB är diameter i en cirkel, och C är en punkt på perifierin, så belägen att kordan AC är 16 cm. Genom B drages en rät linje parallellt med AC. Den skär tangenten genom A i punkten D. BD är 25 cm. Beräkna kordan CB. (V. 43. r.)

66. I triangeln ABC är vinkeln $A = 90°$, sidan $AB = 72$ cm och sidan $AC = 96$ cm. Mittpunktsnormalen till BC skär AC i D och BA:s förlängning i E. En rät linje sammanbinder C med E. Beräkna ytan av triangeln CDE. (H. 41. r)

67. Ett likbent parallelltrapets är omskrivet kring en cirkel med radien 6 cm. Den längre av de parallella sidorna är 9 gånger så lång som den kortare. De båda punkter, i vilka cirkeln tangerar de båda lika långa, icke parallella sidorna, sammanbindes. Beräkna längden av denna sammanbindningslinje. (V. 50. r.)

68. I en likbent triangel ABC är basen AB 2 cm och vardera av de lika stora sidorna 3 cm. Hur stor är radien i den cirkel, som går genom hörnet C och tangerar sidan AB i hörnet B? (Aug. 53. 6. L.)

69. (**R**) Från en godtycklig punkt A_1 på sidan BC i en triangel ABC drages A_1B_1 parallellt med AB. Från B_1, som ligger på AC, drages B_1C_1 parallellt med BC. Från C_1, som ligger på AB, drages C_1A_2 parallellt med CA. På motsvarande sätt drages därefter A_2B_2, B_2C_2 och C_2A_3 parallellt med AB, BC respektive CA. Bevisa att A_1 och A_3 sammanfaller. Vad är villkoret för att A_1 och A_2 skall sammanfalla? (Aug. 44. 6. a.k.)

d) några uppgifter, där satsen om ytskalan i likformiga figurer kan tillämpas

70. Ett tomtområde har formen av ett parallelltrapets, i vilket de båda parallella sidorna går vinkelrätt mot en av de övriga. På en karta i skalan $1 : 4000$ är de parallella sidorna 1 cm och 2 cm och den större av de övriga sidorna 3 cm. Vad är tomtområdet värt efter ett pris av $2,25$ kr per m^2? (V. 40. r.)

71. I en rätvinklig triangel är kateterna 18 cm och 24 cm. Genom en punkt på hypotenusan, 5 cm från den ändpunkt av densamma, från vilken den mindre kateten utgår, är en transversal dragen parallellt med denna katet. Beräkna ytorna av de två delar, i vilka triangeln uppdelats av transversalen. (V. 34. r.)

72. Basen i en triangel är 7,8 cm och höjden mot denna bas 5,4 cm. Nämnda höjd delas, i tre delar, vilkas längder, från basen räknat förhåller sig sig som $1 : 2 : 3$. Genom delningslinjerna drages räta linjer parallellt med basen.Hur stor är ytan av den del av triangeln, som ligger mellan dessa transversaler? (H. 51. r.)

73. I en rätvinklig triangel med kateterna 2 cm och 14 cm drages en mot hypotenusan vinkelrät linje, som delar triangelns yta mitt itu. Kring den därvid bildade fyrhörningen kan en cirkel omskrivas. Beräkna denna cirkels radie. (H. 45. r.)

74. I en likbent triangel ABC är basen BC 5 cm. Från hörnet B drages en rät linje, vilken med sidan BC bildar en vinkel, som är lika stor som vinkeln A. Denna linje skär sidan AC i punkten D. Beräkna ytan av triangeln ABC, om denna är fyra gånger så stor som ytan av triangeln BCD. (H. 47. r.)

75. I triangeln ABC drages parallellt med AB en rät linje, som skär AC i D och BC i E. BE förhåller sig till EC som $3 : 7$, och ytan av triangeln DEC är 171,5 cm^2. Hur stora är ytorna trianglarna ADE och ABE var för sig? (V. 44. r.)

76. I triangeln ABC är sidan AB 6 cm och ytan 15 cm^2. Parallellt med den nämnda sidan drages en transversal A_1B_1; A_1 ligger på BC och B_1 på AC. Transversalen avskär en topptriangel, vars yta är $4/9$ av den ursprungliga triangelns yta. AA_1 och BB_1 skär varandra i P. Hur stor del av triangeln ABC utgör triangeln ABP? (Aug. 40. 7. L.)

77. (**R**) I triangeln ABC drages parallellt med BC en linje DE, som skär triangelns övriga sidor i D och E. Ytorna av trianglarna ADE och ABC förhåller sig till varandra som $2 : 3$. Beräkna förhållandet mellan ytorna av triangeln CDE och fyrhörningen $BCED$. (Aug. 41. 7. L.)

78. (**R**) ABC är en likbent triangel med basen $BC = 10$ cm. Från en punkt D på BC drages normalerna DE mot sidan AB och DF mot sidan AC. Härigenom blir triangeln ABC delad i två trianglar, BED och CFD, samt en fyrhörning $AEDF$. Dessa figurers ytor förhåller sig till varandra som $1 : 9 : 40$. Hur stor är triangeln ABC:s yta? (Aug. 38. 8. L.)

e) uppgifter, där lösningen bygger på halva kvadrater eller halva liksidiga trianglar

79. En vinkel i en triangel är 105°. Höjden från denna vinkels spets är 8 cm, och den delar vinkeln i förhållandet $3 : 4$. Beräkna triangelns omkrets. (H. 47. r.)

80. I en cirkelsektor ABC inskrives en cirkel, så att den tangerar sektorns båge BC och de båda radierna AB och AC. Den inskrivna cirkeln, vars radie är 2 cm, har sin medelpunkt i O; OA är 4 cm. Beräkna sektorns yta. $\pi = 3,14$. (V. 40. r.)

81. I en cirkel med radien 2 cm är inskriven en likbent triangel. Vinkeln mellan de båda lika sidorna är 45°. Beräkna triangelns yta. (V. 28. r.)

82. Från mittpunkten på bågen i en cirkelsektor med radien 12 cm och medelpunktsvinkeln 60° drages två räta linjer parallellt med sektorns radier. Beräkna ytan av den uppkomna fyrhörningen. (H. 40. r.)

83. Banorna för jorden (J) och planeten Venus (V) kan betraktas som cirklar med solen (S) som medelpunkt. Det kortaste avståndet mellan J och V är 42 millioner km, det längsta 258 millioner km. Hur stort är avståndet mellan J och V, då vinkeln JSV är 60°? (H. 44. r.)

84. Ett cirkelsegments båge upptar en medelpunktsvinkel av 120°, och dess höjd, dvs. avståndet från bågens mittpunkt till segmentets korda, är 5 cm. Beräkna ytan av segmentet. (H. 53. r.)

85. På periferin till en cirkel, vars radie är 2 cm, är punkterna A, B och C så belägna, att medelpunktsvinklarna till bågarna AB och BC är 150° respektive 90°. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av tangenterna till cirkeln i dessa punkter. (H. 42. r.)

86. I en cirkel med 8 dm radie är AB en diameter. Från A drages en rät linje, som bildar 30° vinkel med AB och träffar omkretsen i C. Normalen mot AB från C träffar AB i D. Beräkna ytan av den figur, som begränsas av de räta linjerna CD och DB samt bågen BC. $\pi = 3,14$. (V. 41. r.)

87. En radiomast hålles i lodrätt läge medelst tre lika långa staglinor av stål. Stagens fästpunkter på marken är placerade symmetriskt kring mastens fot och i samma plan som denna. Varje lina har en längd av 35 m och är fästad på masten 28 m över markytan. Beäkna avståndet mellan två staglinors fästpunkter på marken. (H. 50. r.)

88. I fyrhörningen $ABCD$ är vinklarna A, B och C respektive 60°, 150° och 90°. Sidan AB är 18 cm och sidan AD 32 cm. Beräkna fyrhörningens yta. (H. 34. r.)

89. Ett rakblad av viss modell har samma form som den del av en cirkels yta, som ligger mellan två lika långa parallella kordor. Rakbladets bredd är 22 mm, och diametern i den nyssnämnda cirkeln är 44 cm. Beräkna rakbladets yta, om ingen hänsyn tages till de hål, som finns för rakbladets fastsättande i rakapparaten. $\pi = 3,14$. (V. 49. r.)

90. I ett parallelltrapets är sidorna AB, BC och CD vardera 6 cm och den fjärde sidan AD 12 cm. Diagonalerna AC och BD skär varandra i O. Beräkna ytan av triangeln AOD. (V. 43. r.)

91. Ett aeroplan synes från A rakt i norr 45° över horisonten och samtidigt från B, som ligger 1,5 km norr om A, rakt i söder 30° över horisonten. Hur högt över jordytan befann sig då aeroplanet? (V. 15. r.)

92. Från en observationsplats såg man ett flygplan i rakt sydlig riktning 30° över horisonten. Från en annan observationsplats, belägen 1 km söder om den förra, iakttogs planet vid samma tillfälle likaledes i sydlig riktning men 60° över horisonten. Beräkna flygplanets höjd över marken, om denna förutsätts vara horisontell. (H. 46. r.)

93. Från en plats A utgår två rätliniga vägar, som bilda 60° vinkel med varandra. En gård P ligger inom denna vinkel mellan vägarna, 2 km från den ena och 5 km från den andra vägen. Beräkna längden av fågelvägen från P till A. (Jan. 50. 7. L.)

94. I en rätvinklig triangel ABC är hypotenusan AB 28 cm och en vinkel 30°. Kateterna AC och BC tages till diametrar för cirklar. Beräkna storleken av den yta, som ligger inom de båda cirklarna. $\pi = 3\frac{1}{7}$. (V. 42. r.)

95. En cirkelsektors medelpunktsvinkel är 90°. Bågens mittpunkt sammanbindes med mittpunkten på en av radierna. I vilket förhållande delas sektorns yta av denna sammanbindningslinje? (Jan. 37. 7. L.)

f) några bevis

96. I en rätvinklig triangel ABC delas hypotenusan AB i tre lika stora delar genom punkterna D och E. Beräkna summan av kvadraterna på CD och CE, och visa, att den är fem gånger så stor som kvadraten på DE. (Jan. 53. 5. L.)

97. Med en liksidig triangels sidor som diametrar uppritas cirklar. Av varje cirkel behålles endast den inom triangeln belägna delen. Man får då tre cirkelbågar, som begränsar en kroklinig figur. Visa, att dennas yta är större än ⅖ av den liksidiga triangelns yta. (Nov. 40. 6. L.)

98. Diagonalerna i en romb är a och b. Den i romben inskrivna kvadratens sida är k. Bevisa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}. \qquad \text{(Nov. 42. 5. L.)}$$

99. Bisektrisen till den räta vinkeln C i en rätvinklig triangel ABC skär hypotenusan i D. Från D drages normalen DE mot AC. Vidare är $DE = d$, $BC = a$, $AC = b$. Bevisa, att

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \qquad \text{(Aug. 40. 8. L.)}$$

100. I en rätvinklig triangel är kateterna a och b och höjden mot hypotenusan h. Bevisa formeln

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \qquad \text{(Mars 45. 6. L.)}$$

Ekvationer av andra graden

101. Har ekvationen $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{2x}$ någon reell rot? (V. 04. 4. L.)

102. Lös ekvationen $(0,2x + 0,3)^2 - (0,3x - 0,2)^2 = 0,0735$. (Jan. 49. 1. L.)

103. Lös ekvationen

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2} = \frac{3}{x}. \qquad \text{(Jan. 37. 4. L.)}$$

104. Lös ekvationen

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1,5} = \frac{1}{4x^2-9}. \qquad \text{(Aug. 43. 1. L.)}$$

105. Lös ekvationen $6x^2 - 2ax - 7bx + ab + 2b^2 = 0$. (Nov. 36. 1. L.)

106. Lös ekvationen

$$\frac{a^2 - 3ax - 10x^2}{a^2 + 2ax + x^2} = 6 - \frac{18a}{a+x},$$

där a är en konstant. (Nov. 51. 1. L.)

107. Ange det exakta värdet av kvoten mellan den större och den mindre roten till ekvationen $10x^2 - 136x + 1 = 0$, förenkla detsamma och beräkna därefter kvotens approximativa värde. (Jan. 50. 4. L.)

108. Lös ekvationen

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{b-a}{x^2-ab},$$

där a och b är två olika, från noll skilda konstanter. (Mars 53. 3. L.)

109. Angiv i så enkel form som möjligt rötterna till ekvationen

$$\frac{a^2}{x+2} - \frac{b^2}{x-2} + \frac{a^2-b^2}{x^3-4x} = 0. \qquad \text{(Nov. 39. 1. L.)}$$

110. I ekvationen $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+2a} = \frac{5}{6a}$ är konstanten a ett positivt helt tal. En av ekvationens rötter är $= 1$. Bestäm den andra roten. (Mars 50. 3. L.)

111. Bestäm de värden på konstanten a, för vilka ekvationen

$$\frac{x+a}{x-2a} - \frac{x-a}{x+2a} = 2$$

har en rot $x = 8$. Bestäm även ekvationens andra rot. (Aug. 51. 1. L.)

112. Finns det något värde på konstanten a i ekvationen

$$x^2 - (2a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0,$$

för vilket ekvationen satisfieras av både $+2$ och -2? Vilket är i så fall detta a-värde? (Jan. 46. 3. L.)

113. I vilken månghörning överskjuter diagonalernas antal sidornas med 25? (H. 03. L.)

114. I en månghörning drages samtliga diagonaler. Summan av antalet sidor och diagonaler är 171. Hur många sidor har månghörningen? (Mars 51. 5. L.)

115. Uttrycket $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ antar samma värde för två värden på n, av vilka det ena är en enhet större än det andra. Vilka är dessa n-värden? (Jan. 55. 4. L.)

Tillämpningar av satsen om den rätvinkliga triangeln

116. Förenas två motstående hörn i en rektangel, blir den så uppkomna diagonalen 16,2 cm. Fälles normaler från de båda övriga hörnen mot diagonalen, delas denna i tre lika stora delar. Beräkna rektangelns sidor. (H. 35. r.)

117. Från ett hörn i en rektangel fälles normalen mot den ena diagonalen. Normalens längd är $2/5$ av diagonalens. Beräkna förhållandet mellan rektangelns sidor. (Jan. 49. 4. L.)

118. Från en punkt P utanför en cirkel är dragna tangenterna PA och PB till cirkeln. PA är 8 cm, och det kortaste avståndet från P till någon punkt på cirkelns omkrets är 4 cm. Beräkna ytan av triangeln PAB. (Jan. 40. 4. L.)

119. En punkt P utanför en cirkel ligger 18 cm från närmast belägna punkt på periferin. De från P till cirkeln dragna tangenterna PA och PB är vardera 24 cm. Beräkna längden av kordan AB. (V. 49. r.)

120. Man ville bestämma avståndet mellan två punkter, A och B, belägna på var sin sida om en flod. Man uppmätte då en sträcka AC, 90 m lång, vinkelrätt mot AB. På sammanbindningslinjen mellan C och B bestämde man sedan en punkt D, så att vinkeln CDA blev rät. Avståndet CD uppmättes och befanns vara 18 m. Hur stort var avståndet AB? (V. 48. r.)

121. I parallelltrapetset $ABCD$ är de parallella sidorna AB 8 cm och CD 4 cm. Vinkeln B är rät. Trapetsets diagonaler skär varandra under räta vinklar. Beräkna dess yta. (V. 53. r.)

122. I en cirkel med medelpunkten O och radien r inpassas en korda AB, vars längd är $4/3$ av den i cirkeln inskrivna kvadratens sida. Tangenterna till cirkeln i A och B råkas i T. Sammanbindningslinjen OT skär cirkeln i P och AB i Q. Beräkna längderna av TP och PQ, uttryckta i r. (Nov. 49. 4. L.)

Grafisk framställning

123. Undersök medelst grafisk metod, för vilka värden på x funktionen $15 - 4x - 4x^2$ är positiv. (Mars 40. 6. L.)

124. En fyrhörning har alla sina hörn belägna på kurvan $y = 3 + 5x - 2x^2$. Två av dem är därjämte belägna på x-axeln och de två övriga på linjen $y = 5$. Beräkna fyrhörningens yta. (Nov. 38. 5. L.)

125. Bestäm konstanterna a, b och c i funktionen $y = ax^2 + bx + c$, så att punkterna $(1;\ -1)$, $(0;\ -1)$ och $(-2;\ 0)$ kommer att ligga på den motsvarande kurvan. Konstruera därefter kurvan samt ange med tillhjälp av diagrammet eller på annat sätt funktionens minimivärde med två säkra decimaler. (Jan. 45. 8. L.)

126. Bestäm koefficienterna a, b och c i funktionen $y = a + bx + cx^2$ så att den mot funktionen svarande kurvan går dels genom den punkt, i vilken linjerna $y = x + 1$ och $3x + y - 9 = 0$ skär varandra, dels genom de punkter, i vilka dessa linjer skär x-axeln. Upprita därefter kurvan och bestäm, med hjälp av digrammet eller på annat sätt, koordinaterna för dess maximipunkt. (Mars 42. 7. L.)

127. När en kropp kastas rätt uppåt med en viss begynnelsehastighet, kommer dess höjd (y meter) över utgångsläget att vara en funktion av tiden (x sekunder) från rörelsens början. Denna funktion blir av formen

$$y = ax - bx^2,$$

där a och b är konstanter. Vid ett visst kast var kroppens höjd 35 m efter 1 sek och 60 m efter 2 sek. Beräkna härav a och b. Bestäm därefter medelst grafisk metod eller på annat sätt den största höjd, som kroppen når, innan den börjar falla. (Mars 46. 7. L.)

128. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = a + bx - x^2$, så att den motsvarande kurvan skär den räta linjen $6x + 4y = 21$ i två punkter, som ligger på var sin av koordinataxlarna. Konstruera sedan kurvan och angiv dess skärningspunkter med x-axeln. (Nov. 39. 5. L.)

129. I kvadraten $ABCD$ är sidan 4 cm. Punkterna E, F, G och H ligger på sidorna AB, BC, CD respektive DA. Vidare är $AE = CG = x$ cm och $BF = DH = 2x$ cm. Undersök, mellan vilka värden x kan variera. Uttryck därefter ytan av fyrhörningen $EFGH$ som funktion av x, och bestäm genom ett diagram eller på annat sätt det minsta värde, som denna yta kan anta. (Mars 54. 4. L.)

130. Basen BC i en triangel ABC är 8 cm, och höjden AD mot basen är 6 cm. På avståndet x från A drages en med BC parallell transversal EF. Ange ytan av triangeln DEF som en funktion av x, upprita motsvarande kurva och ange med tillhjälp av denna eller på annat sätt maximivärdet av denna yta. (Nov. 47. 5. L.)

131. $ABCD$ är en rektangel, där AB är 7 cm och BC 5 cm. På sidorna AB, BC, CD och DA avsättes $AE = BF = CG = DH = x$ cm. Bestäm ytan av fyrhörningen $EFGH$ som funktion av x, åskådliggör densamma i ett diagram och bestäm medelst diagrammet eller på annat sätt dess minsta värde. (Nov. 44. 5. L.)

132. I en spetsvinklig triangel med basen 8 cm och höjden 10 cm inskrives en rektangel, så att dess bas faller utefter triangelns bas. Rektangelns höjd betecknas med x, dess yta med y. Uttryck y som funktion av x, och undersök denna funktion grafiskt. Angiv med tillhjälp av diagrammet eller på annat sätt det största värde, som rektangelns yta kan antaga. (Jan. 41. 8. L.)

133. I en rätvinklig triangel ABC, i vilken kateterna är 20 cm och 15 cm, drages en med hypotenusan AB parallell transversal, som skär kateterna i D och E. Dessa punkter sammanbindes med hypotenusans mittpunkt M. Det vinkelräta avståndet från C till transversalen DE är x cm och ytan av triangeln DME y cm^2. Uttryck y som funktion av x. Bestäm medelst grafisk metod eller på annat sätt det största värde, som y kan antaga. (Nov. 41. 8. L).

Ekvationer och ekvationssystem av högre grad

a) ekvationer, där nämnare måste upplösas i faktorer

134. Lös ekvationen

$$\frac{2}{x^2 - x - 2} + \frac{2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{3}{x + 1} = 0. \qquad \text{(Jan. 43. 4. L.)}$$

135. Lös ekvationen

$$\frac{x - 2}{x + x^3} + \frac{2}{6 + x - x^2} - \frac{1}{3x - x^2} = 0. \qquad \text{(Aug. 52. 3. L.)}$$

136. Lös ekvationen

$$\frac{3}{x^2 - 2x - 3} + \frac{2}{x^2 - x - 2} + \frac{3,5}{x + 1} = 0. \qquad \text{(Nov. 44. 1. L.)}$$

b) ekvationssystem, där endera ekvationen lätt kan lösas med avseende på en obekant

137. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x(1 + y^2) = 6. \end{cases} \qquad \text{(H. 13. L.)}$$

138. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases} \qquad \text{(Aug. 49. 1. L.)}$$

139. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2y - 3x^2 - 1 = 0, \\ 3xy + 12x - 10y + 2 = 0 \end{cases}$$

har lösningen $x = 1$, $y = 2$. Bestäm de övriga lösningarna. (Mars 37. 2. a.k.)

c) ekvationssystem, där en ekvation sönderfaller i två

140. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(y-1) = y^2 - 1, \\ x + x^2y - xy^2 = 1. \end{cases}$$ (Nov. 41. 1. L.)

141. Lös ekvationssystemet $x^2 - y^2 = \dfrac{3xy}{2} = x + y$. (Nov. 52. 1. L.)

142. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$ (Mars 42. 1. L.)

143. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 + y = 0, \\ 5x - 3y - 2xy = 0. \end{cases}$$ (Aug. 47. 1. L.)

144. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0. \end{cases}$$ (Jan. 45. 3. L.)

145. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$ (Aug. 48. 1. L.)

146. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 - 4xy, \\ 6x - 9y = 14 - 9xy. \end{cases}$$ (Nov. 45. 3. L.)

d) ekvationssystem, i vilka ingår en homogen ekvation

147. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - xy = 12, \\ y^2 - 3xy - 4x^2 = 0. \end{cases}$$ (Nov. 35. 2. L.)

148. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$ (Aug. 42. 1. L.)

149. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = 2\frac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^2}{x} = 4\frac{2}{3}. \end{cases}$$ (Mars 48. 2. L.)

e) ekvationssystem, där en nybildad, enkel ekvation får ersätta en av de givna ekvationerna

150. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 6, \\ x^2 + y^2 + y = 7. \end{cases}$$

(Nov. 53. 1. L.)

151. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 = 10, \\ 2x^2 + x + 2y^2 + 2y = 19. \end{cases}$$

(Jan. 43. 1. L.)

152. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x+y} = 3, \\ y + \dfrac{2}{x+y} = 1. \end{cases}$$

(Mars 55. 1. L.)

153. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} - y = 0, \\ y - \dfrac{1}{y} - x = 0. \end{cases}$$

(Mars 46. 1. L.)

154. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(x - y) = 4(x + 6), \\ y(x + y) = 6(x + 6). \end{cases}$$

(Jan. 53. 1. L.)

155. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + xy = 3, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = 5. \end{cases}$$

(Nov. 46. 1. L.)

156. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - xy = 8, \\ y^2 + xy = 12. \end{cases}$$

(Aug. 50. 1. L.)

f) några system av olika typer

157. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

(Jan. 40. 1. L.)

158. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(x-y)=2, \\ 2x - \dfrac{3}{x-y} = x-y. \end{cases}$$ (Jan. 41. 1. L.)

159. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a(x-y), \\ x^2 + xy = by, \end{cases}$$

där a och b är konstanter. (Nov. 42. 1. L.)

160. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2(a^2 - xy) = b^2(b^2 + xy), \\ \frac{1}{2}(x+y) = a. \end{cases}$$ (Jan. 42. 1. L.)

161. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2) = 4, \\ (x-y)^2 + (x+y)^2 = 12. \end{cases}$$ (V. 31. 1. R.)

g) ekvationssystem med symmetriska ekvationer

162. (**R**) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 6; \end{cases}$$

och angiv svaret i så enkel form som möjligt. (Aug. 40. 1. L.)

163. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x^2 + y^2 + xy = 1,71. \end{cases}$$ (Nov. 49. 6. L.)

h) konstantbestämning i ekvationssystem

164. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x^2 - ay^2 = bxy, \\ bx + y = a; \end{cases}$$

satisfieras av $x = y = 1$. Bestäm konstanterna a och b, och lös därefter ekvationssystemet fullständigt. (Mars 54. 3. L.)

165. Bestäm de a-värden, för vilka de tre ekvationerna i ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay = 4, \\ 2x - 3y = 1, \\ (a-5)x + 15y = a; \end{cases}$$

satisfieras av samma värden på x och y, samt ange lösningarna i de olika fallen. (Jan. 54. 6. L.)

166. Bestäm storheten a, så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y = 2x + 6; \end{cases}$$

satisfieras av två värdesystem, i vilka det enas y-värde är dubbelt så stort som det andras. (Jan. 44. 6. L.)

i) samband mellan rötter och koefficienter i andragradsekvationen

167. Bestäm värdet på konstanten a i ekvationerna $4x^2+ax-3=0$ och $4x^2-16x+3a=0$, så att för vardera ekvationen summan av rötternas inverterade värden blir en och densamma. (Jan. 41. 1. a.k.)

168. Ekvationen $x^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$ har rötterna $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Bestäm konstanterna a och b. (Mars 44. 1. a.k.)

169. Bestäm konstanterna a och b i ekvationen

$$3ax^2 + (2a - 3b)x + 3a + 2b - 5 = 0,$$

så att ekvationens rötter blir $\frac{1}{3}$ och $-2\frac{1}{2}$. (Nov. 48. 2. L)

170. Bestäm konstanterna a och b i ekvationen

$$x^2 + ax + bx - a^3 - b^3 - 175 = 0,$$

så att ekvationen får rötterna 2 och 7. (Nov. 50. 3. L.)

j) högregradsekvationer

171. I en likbent triangel är basen 5 cm och omkretsen 18 cm. Finns det någon annan likbent triangel med samma omkrets och samma yta som den nämnda, och hur stor är i så fall basen i denna triangel? (Aug. 52. 2. a.k.)

172. Beträffande ekvationen $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$ vet man, att summan av två rötter är 3 och deras produkt 2. Lös ekvationen. (V. 10. 3. L.)

173. (**R**) Koefficienterna a, b och c i ekvationen $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, där $c \neq 0$ (c skilt från 0), har sådana värden, att två av ekvationens rötter sammanfaller med rötterna till ekvationen $x^2 + x + c = 0$. Bestäm b samt sambandet mellan a och c. Ange också, vilka värden a och c kan anta, om rötterna till den sistnämnda ekvationen skall vara reella. (Nov. 52. 6. a.k.)

Rötter, potenser, logaritmer

174. Beräkna värdet av uttrycket $2^y \cdot 2^z + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{y}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}$, där y och z är rötterna till ekvationen $2x^2 + 5x + 1 = 0$. (Aug. 40. 1. a.k.)

175. Förenkla uttrycket $\left(\sqrt{p}\right)^{a-\frac{1}{b}} \cdot \left(\sqrt{p}\right)^{b-\frac{1}{a}}$. Beräkna därefter dess exakta värde, om a och b är rötterna till ekvationen $5x^2-24x+30 = 0$ och $p = \sqrt[3]{5}$. (Nov. 47. 1. a.k.)

176. (**R**) Lös ekvationen $10^{-0,4x} = 10^{-0,4a} + 10^{-0,4b}$ för $a = 5,41$ och $b = 6,19$. (Jan. 37. 6. R.)

177. (**R**) Beräkna värdet av 7^x, där $x = \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$ samt a och b rötterna till ekvationen $7t^2 + 7t + 1 = 0$. (H. 35. 2. R.)

178. (**R**) I ekvationen $\frac{x^3}{3} + \frac{ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 0$ kan de reella konstanterna a och b väljas så, att ekvationens rötter blir a och b. Bestäm värdena på a och b, och ange ekvationen för dessa värden. Kontrollera slutligen resultatet genom att lösa ekvationen. (Aug. 51. 5. a.k.)

Geometriska uppgifter

a) några enkla uppgifter, i almänhet tillämpningar av Pythagoras' sats

179. I en rätvinklig triangel är ytan 139 cm^2 mindre än kvadraten på hypotenusan. Summan av kateterna är 17 cm. Beräkna triangelns sidor. (Mars 51. 4. L.)

180. En cirkelsektor och en kvadrat har lika stora omkretsar och lika stora ytor. Hur stor är cirkelsektorns medelpunktsvinkel? (Mars 44. 1. .L.)

181. I en triangel är basen 13,5 cm och höjden 12 cm. En rektangel inskrives i triangeln på så sätt, att två av hörnen ligger på basen och ett på vardera av de övriga sidorna. Rektangelns yta är 36 cm^2. Beräkna rektangelns sidor. (Jan. 38. 4. L.)

182. Visa, att i en godtycklig rätvinklig triangel summan av kvadraterna på de tre sidorna medianer är 50% större än kvadraten på hypotenusan. (Mars 54. 8. L.)

183. Ytan av en romb är 25% av ytan av en kvadrat med lika stor sida som romben. Beräkna det exakta värdet av förhållandet mellan den kortare och den längre diagonalen i romben. (Mars 53. 2. L.)

184. I en likbent triangel med ytan 4 m^2 är summan av basen och höjden lika med summan av de båda lika stora sidorna. Beräkna höjden och sidorna. (Aug. 43. 2. L.)

185. En punkt P på sidan AB i kvadraten $ABCD$ förenas med hörnen C och D. Beräkna förhållandet $PA : PB$, om förhållandet $PC : PD = 5 : 7$. (Jan. 47. 3. L.)

186. (**R**) En cirkel går genom hörnen A och B i en liksidig triangel ABC och tangerar sidorna AC och BC. Bevisa, att denna cirkel även går genom höjdernas skärningspunkt i triangeln. (Mars 43. 1. L.)

187. (**R**) P är en punkt på hypotenusan BC i den rätvinkliga triangeln ABC. Beräkna förhållandet mellan triangelns sidor, då

$$PB : PA : PC = 1 : 2 : 3 \qquad \text{(Jan. 41. 7. L.)}$$

188. I en kvadrat $ABCD$ drages diagonalen AC och cirkelbågen BD med medelpunkten A. En godtycklig rät linje drages parallellt med AD. Den skär sidorna AB och CD i E och H, diagonalen AC i F och cirkelbågen BD i G. Med E som medelpunkt uppritas tre cirklar, som går genom H, G och F respektive. Visa, att ytan av den cirkelring, som bildas av de båda förstnämnda cirkellinjerna, är lika stor som ytan av den sist nämnda cirkeln. (Jan. 48. 3. L.)

b) tillämpningar av Herons formel samt formlerna för inskrivna och omskrivna cirklarnas radier

189. De två parallella sidorna i ett parallelltrapets är resp. 2 och 8 m långa, de andra 5 och 7 m. Hur stor är ytan? (Sept. 99. L.)

190. I fyrhörningen $ABCD$ är sidorna AB och AD vardera 12 cm, sidorna CB och CD vardera 5 cm samt diagonalen AC 13 cm. Hur lång är diagonalen BD? (H. 53. r.)

191. Sidorna i en triangel är 2, 3 och 4 cm. Sök förhållandet mellan radierna i den omskrivna och den inskrivna cirkeln. (Nov. 48. 1. L.)

192. I en triangel är två sidor 9 cm och 15 cm och mellanliggande vinkel 120°. Hur stor är radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln? (Mars 52. 1. L.)

193. I triangeln ABC är sidan AB 50% längre än sidan AC och denna 20% kortare än sidan BC. Sök förhållandet mellan radierna i den inskrivna och den omskrivna cirkeln. (Aug. 51. 2. L.)

194. I en rätvinklig triangel delas hypotenusan av tangeringspunkten för den inskrivna cirkeln i delarna 5 cm och 12 cm. Beräkna avståndet mellan medelpunkterna till triangelns in- och omskrivna cirklar. (H. 36. 5. L.)

195. I en triangel är sidorna 13, 20 och 21 dm. Beräkna avståndet från medianernas skärningspunkt till sidorna. (V. 36. 6. L.)

196. I en rätvinklig triangel förhåller sig kateterna som $1 : 3$. Den inskrivna cirkelns radie är 1 cm. Beräkna triangelns yta. (Nov. 41. 2. L)

197. I triangeln ABC är $AB = 1{,}4$ dm, $BC = 3$ dm och $CA = 4$ dm. Diametern BD drages i den kring triangeln omskrivna cirkeln. Beräkna förhållandet mellan omkretsen av denna cirkel och omkretsen av den cirkel, som kan inskrivas i triangeln ACD. (Nov. 49. 2. L.)

198. Ytan av kvadraten $ABCD$ är 72 cm^2. På sidan AD är en punkt E så belägen, att $AE : ED = 2 : 1$. Beräkna radien i den cirkel, som går genom punkterna E och C samt mittpunkten på sidan AB. (Jan. 53. 3. L.)

199. Triangeln ABC med $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm och $BC = 21$ cm är inskriven i en cirkel. Diametern AD drages, och punkten D sammanbindes med B och C. Beräkna sidorna i triangeln BCD. (Aug. 47. 5. L.)

200. Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar sidan AC i punkten D. Sträckan AD är 1,5 cm, triangelns omkrets 6 cm och sidan AB 0,5 cm längre än sidan AC. Bestäm triangelns sidor. (Jan. 50. 3. L.)

201. I en likbent triangel är basen och höjden mot basen lika stora. Den omskrivna cirkelns radie är R. Beräkna den inskrivna cirkelns radie, uttryckt i R. (Jan. 40. 2. L.)

202. Kring en cirkel med 2,5 cm radie är en fyrhörning $ABCD$ omskriven. AB är 4 cm och CD 7 cm. Beräkna fyrhörningens yta. (Jan. 45. 5. L.)

203. I en triangel ABC är $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm och $CA = 5$ cm. En cirkel tangerar sidorna AB och BC och har sin medelpunkt på sidan CA. Beräkna cirkelns radie. (Mars 40. 7. L.)

204. I en rätvinklig triangel är den omskrivna cirkelns radie 13 cm och den inskrivnas 4 cm. Beräkna triangelns sidor. (Aug. 43. 6. L.)

205. I en rätvinklig likbent triangel är avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter 1 m. Beräkna triangelns yta. (V. 13. L.)

206. Sidorna i ett triangulärt fält är 130 m, 130 m och 240 m. En person står på lika avstånd från de tre sidorna. Hur långt skall han gå för att komma lika långt från de tre hörnen? (V. 22. 3. L.)

207. I en triangel ABC är sidorna $AB = 39$ cm, $AC = 42$ cm och $BC = 45$ cm. Genom medelpunkten till den i triangeln inskrivna cirkeln drages en transversal parallellt med sidan AC. Beräkna sidorna i den av transversalen avskurna topptriangeln. (Aug. 52. 4. L.)

208. I en triangel med sidorna 5 cm, 8 cm och 9 cm uppritas den inskrivna cirkeln. I denna inskrives en triangel, vars sidor är parallella med den givna triangelns sidor. Beräkna sidornas längder i en inskrivna triangeln. (Mars 50. 4. L.)

209. I en triangel är två sidor 7 cm och 9 cm. Den i triangeln inskrivna cirkelns radie är $1/3$ av höjden mot den tredje sidan. Visa, att den omskrivna cirkelns radie är $0,7$ av samma höjd. (Aug. 55. 4. L.)

210. (**R**) Beräkna ytan av den triangel, vars sidor utgöras av höjderna i en triangel med sidorna 4 cm, 6 cm och 8 cm. (Jan. 51. 5. L.)

211. (**R**) I en triangel är en sida aritmetiskt medium till de båda andra. Den inskrivna cirkelns radie förhåller sig till den omskrivnas som $2 : 5$. Bevisa, att triangeln är rätvinklig. (Aug. 44. 8. L.)

212. (**R**) I en triangel är den omskrivna cirkelns radie $= R$, den inskrivna cirkelns radie $= r$ och avståndet mellan de nämnda cirklarnas medelpunkter $= d$. Mellan storheterna R, r och d gäller då sambandet

$$R^2 - d^2 = 2Rr \quad \text{(en sats av Euler)}.$$

Bevisa denna sats för det fall, att triangeln är rätvinklig. (Mars 44. 8. a.k.)

c) tillämpningar av diagonalsatsen för parallellogrammer, bisektrissatsen, kordasatsen

213. I en triangel ABC är sidan AB 5 dm, sidan BC 7 dm och vinkeln A 60°. Bestäm längden av medianen från hörnet B. (Nov. 51. 2. L.)

214. Bisektrisen till den räta vinkeln i en rätvinklig triangel delar hypotenusan i delarna 5 cm och 10 cm. Beräkna bisektrisens längd. (Nov. 39. 3. L.)

215. $ABCD$ är en kvadrat med sidan a längdenheter. På sidan BC är en punkt E så belägen, att $BE : EC = 1 : 3$. Bisektrisen till vinkeln ADE råkar AB i F. Bestäm längden av AF. (Jan. 45. 1. L.)

216. I en rätvinklig triangel är kateterna 28 cm och 21 cm. Genom den punkt, där bisektrisen till den räta vinkeln skär hypotenusan, drages en rät linje, som delar triangeln i två lika delar. Hur lång är den del av nämnda räta linje, som faller inom triangeln? (Jan. 48. 4. L.)

217. En halvcirkel med radien 2 cm har sin medelpunkt O på sidan AB i triangeln ABC och tangerar de båda övriga sidorna. AO är 2,9 cm och BO är 2,5 cm. Beräkna triangelns sidor. (V. 36. 8. L.)

218. Om i en cirkel en korda av 2 dm längd utdrages 16 cm och den så erhållna ändpunkten ligger 3 dm från cirkelns medelpunkt, hur stort är då kordans avstånd från medelpunkten, och hur stor är cirkelns radie? (H. 20. r.)

219. En cirkel, som går genom hörnpunkterna A och D i kvadraten $ABCD$, tangerar sidan BC i E och skär sidan AB i F. Beräkna ytan av triangeln DEF, då kvadratens sida är 12 dm. (Jan. 37. 6. L.)

220. Sök förhållandet mellan sidorna i en rektangel, då en och samma cirkel tangerar tre av dem och skär den fjärde i tre lika delar. (V. 19. 2. L.)

221. En likbent triangel ABC är inskriven i en cirkel. Basen BC är 6 cm och sidorna AB och AC vardera 9 cm. Normalen BD mot AC utdrages, tills den skär cirkelns periferi i E, varefter E sammanbindes med C. Beräkna ytan av triangeln CDE. (H. 46. r.)

222. Två kordor, AB och DE, i en cirkel skär varandra i C under rät vinkel. AC är 2 cm, BC 3 cm och CD 1 cm. Hur stor är cirkelns radie? (Mars 40. 4. L.)

223. I en cirkel är dragna två mot varandra vinkelräta radier. En korda är dragen så, att den av de båda radierna delas i tre lika stora delar. I vilket förhållande delas radierna av kordan? (Aug. 37. 2. L.)

224. I en cirkel med radien 5 cm är en fyrhörning inskriven, vars diagonaler skär varandra under rät vinkel. Den ena diagonalen delas av den andra i delarna 2 cm och 4 cm. Beräkna den andra diagonalens längd. (Aug. 44. 6. L.)

225. Kateterna i en rätvinklig triangel är 7 cm och 24 cm. En cirkel uppritas med medianen mot hypotenusan som diameter. Beräkna längden av den korda, som cirkeln avskär av hypotenusan. (Aug. 52. 5. L.)

226. I en rätvinklig triangel är ena kateten 14 cm. En cirkel med medelpunkten på denna katet går genom den räta vinkelns spets och delar hypotenusan i tre lika stora delar. Beräkna cirkelns radie. (Jan. 53. 4. L.)

227. I triangeln ABC är sidan $AB = 8$ cm och sidan $AC = 12$ cm. Medianen AD till sidan BC utdrages, varvid den skär den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln i E. Beräkna längden av sidan BC, då AE är 26 cm. (Nov. 41. 4. L.)

228. I triangeln ABC är AB 21 cm, BC 17 cm och AC 10 cm. En cirkel har sin medelpunkt på sidan AB och går genom A och C. Bestäm läget av de punkter, där cirkeln skär AB och BC. (Aug. 46. 5. L.)

229. I triangeln ABC är vinkeln C rät. En cirkel går genom hörnet B och mittpunkten på sidan BC samt tangerar sidan AC i dess mittpunkt. Cirkeln skär vidare hypotenusan AB i en punkt D. I vilket förhållande delas sidan AB av punkten D? (Aug. 50. 5. L.)

230. En likbent triangel är inskriven i en cirkel. Den diameter, som är parallell med triangelns bas, delar var och en av de lika stora sidorna i förhållandet $1 : 3$. Hur stor del av cirkelns yta upptages av triangeln? (Mars 49. 2. L.)

231. Kring triangeln ABC, i vilken $AB = 8$ cm, $BC = 26$ cm och $AC = 30$ cm, är en cirkel omskriven. Beräkna längden av den korda, som delar sidorna BC och AC mitt itu. (H. 32. 7. L.)

232. I triangeln ABC är AB 27 cm, BC 21 cm och CA 12 cm. Den i triangeln inskrivna cirkeln tangerar sidan AB i punkten E. Linjen CE skär cirkeln i D. Beräkna längden av CE och förhållandet mellan CD och DE. (Mars 54. 7. L.)

233. Höjden i en triangel delas av den i triangeln inskrivna cirkelns periferi i tre delar, som i ordning från spetsen räknat är 9 cm, 16 cm och 2 cm. Beräkna triangelns sidor. (Jan. 52. 7. L.)

234. (**R**) I en triangel delar den inskrivna cirkelns periferi en av triangelns medianer i delar, som i ordning är 4 cm, 12 cm och 4 cm. Beräkna triangelns yta. (Aug. 45. 8. L.)

235. (**R**) I en triangel ABC är $AB : AC = 5 : 3$. I den kring triangeln omskrivna cirkeln drages en korda parallellt med BC. Hälften av kordan ligger inom triangeln. Vilket är förhållandet mellan de delar av kordan, som ligger utanför triangeln? (Aug. 41. 8. L.)

236. (**R**) I en cirkel, vars diameter är d, drages två mot varandra vinkelräta kordor, vilkas längder är a och b. De skär varandra i en punkt P inom cirkeln. Visa, att längden x av den korda, vars mittpunkt är P, kan beräknas ur formeln

$$x^2 + d^2 = a^2 + b^2.$$ (Nov. 45. 6. L.)

d) problem, rörande regelbundna månghörningar

237. Visa, att förhållandet mellan ytan av en regelbunden sexhörning och ytan av en regelbunden åttahörning, vilka båda är inskrivna i samma cirkel är $\sqrt{27} : \sqrt{32}$. (V. 01. R.)

238. Av en regelbunden sexhörning med sidan a bortskäres hörnen, så att återstoden blir en regelbunden tolvhörning. Visa, att dennas sida är $a(2\sqrt{3}-3)$. (Mars 39. 3. L.)

239. En kvadrat och en reguljär åttahörning är inskrivna i samma cirkel. Vilket är förhållandet mellan deras ytor och vilket mellan deras omkretsar? (H. 96. L.)

240. Hörnen i en kvadrat bortskäres, så att en regelbunden åttahörning erhålles. Vartannat hörn i denna utgör hörn i en ny kvadrat. Bestäm det exakta värdet av förhållandet mellan ytorna av denna kvadrat och den ursprungliga. (Mars 50. 7. L.)

241. (**R**) Visa, att förhållandet mellan ytorna av den i en cirkel inskrivna och den kring samma cirkel omskrivna reguljära åttahörningen är $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$. (V. 06. 2. L.)

e) några svårare problem av olika slag

242. (**R**) I ett segment av en cirkel, vars radie är 3 cm, är två cirklar, båda med radien 1 cm, inskrivna, så att vardera tangerar segmentets båge och korda och dessutom den andra cirkeln. Två olika fall är möjliga; i det ena är segmentet mindre, i det andra större än en halvcirkel. Hir stora är i dessa båda fall segmentets höjd och korda? (Nov. 44. 7. L.)

243. (**R**) Diametern AB i en cirkel med radien 8 cm är sida i en kvadrat $ABCD$. Från hörnen C och D drages tangenterna till cirkeln. Dessa skär varandra i punkten E. Beräkna ytan av triangeln CDE. (Nov. 51. 5. L.)

244. I en rätvinklig triangel är den mindre kateten a. Höjden mot hypotenusan och en med höjden parallell transversal drages. Den del av triangeln, som ligger mellan höjden och transversalen, är hälften av triangelns yta, och de båda övriga delarna av triangeln är lika stora. Beräkna längden av den inom triangeln belägna delen av transversalen. (Nov. 40. 7. L.)

245. (**R**) En fyrhörning, vars diagonaler skär varandra under räta vinklar, är inskriven i en cirkel. Beräkna summan av kvadraterna på två motstående sidor, och visa, att den är lika med kvadraten på cirkelns diameter. (Mars 53. 7. L.)

246. (**R**) Från en punkt D på sidan AB i triangeln ABC drages en transversal, som råkar sidan AC i punkten E. Ytan av triangeln ADE utgör $1/8$ av ytan av fyrhörningen $BCED$. I denna fyrhörning kan en cirkel inskrivas, och kring densamma kan en cirkel omskrivas. Bestäm sambandet mellan sidorna i triangeln ABC. (Aug. 51. 8. L.)

247. (**R**) I triangeln ABC är D mittpunkten på sidan AB och E mittpunkten på sidan AC. Punkten F delar sidan AC så, att $AF : FC = 2 : 1$. Förlängningarna av sträckorna BF och DE skär varandra i punkten P. Beräkna förhållandet mellan ytorna av trianglarna EFP och ABC. (Jan. 52. 4. L.)

248. (**R**) I en likbent triangel ABC är basen AB 36 cm. De räta linjerna AD och BE skär varandra under rät vinkel i F. Vidare skär de triangelns sidor i D och E, så att DE blir parallell med AB. Slutligen är $AF = FC$. Beräkna längden av DE. (Jan. 43. 8. L.)

249. (**R**) I en liksidig triangel ABC är O höjdernas skärningspunkt. Punkten D delar sidan BC i förhållandet $1 : 4$ från B räknat. Sammanbindningslinjen DO skär sidan AC i punkten E. I vilket förhållande delar sträckan DE sidan AC respektive ytan av triangeln ABC? (Jan. 51. 8. L.)

250. (**R**) En rätvinklig triangels hypotenusa är a cm och höjden mot denna h cm. Genom triangelns hörn drages tangenterna till den kring triangeln omskrivna cirkeln. Visa, att ytan av det parallelltrapets, som begränsas av dessa tre tangenter och hypotenusan, är $\frac{a^3}{4h}$. (Jan. 50. 8. L.)

Svar och anvisningar

1. $\dfrac{9}{10}$.

2. $\dfrac{2(n^2+1)}{(n+1)^2} = 1,16$.

3. $\dfrac{a+b}{a-b} = 4\tfrac{1}{13}$.

4. $\dfrac{1}{2}$.

5. $2y$.

6. $\dfrac{ab+6c}{9a} = \tfrac{1}{12}$.

7. $\dfrac{(a+b)^2}{ab} = 6$.

8. $\dfrac{a(a+b)}{4b} = \tfrac{3}{4}(18+\sqrt{2}) \approx 14,56$.

9. 1.

10. $\dfrac{3a-2b}{3a+2b} = 5-\sqrt{24} \approx 0,101$.

11. $x = 9$.

12. $x = \tfrac{1}{2}$.

13. $x = \tfrac{2}{3}$.

14. $x = \tfrac{1}{5}$.

15. $x = \tfrac{1}{14}$.

16. $x = 8\tfrac{1}{3}$.

17. $x = 1$.

18. $x = \tfrac{4}{5}$.

19. $x = 10$.

20. $x = 0,7$.

21. $x = \tfrac{1}{2}$.

22. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 0,2 \\ y = 3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

28. 12 st. tjugofemöringar;
30 st. tioöringar.

29. Personens hast. = 100 m/min;
bussens hast. = 700 m/min.

30. Bussarna körde 40 km/tim;
personbilen körde 60 km/tim.

31. 16-hörningen.

32. 7,5 sjömil.

33. $A = 50°$; $B = 60°$; $C = 70°$.

35. $A = 49°10'$, $O = 106°15'$, $C = 24°35'$.

36. $A = 64°30'$, $B = 91°12'$, $C = 115°30'$, $D = 88°48'$.

37. 63,33°; 116,67°.

38. 110°.

39. $A = 22{,}5°$; $C = 112{,}5°$; $D = 45°$.

40. $A = 75°$; $C = 45°$; $E = 60°$.

41. 14,3°.

42. $A = B = 75°$; $C = D = 105°$.

43. 24,5 m.

44. 1,852 km; 2,6 km; 2, 8 %.

45. 2 cm.

46. 1,8 cm.

47. 405,6 cm^2.

48. $\sqrt{980} \approx 31{,}3$ cm.

49. 6800 kr.

50. $6\frac{6}{13} \approx 6{,}46$ cm.

51. $\pi\sqrt{b^2 + c^2}$ dm.

52. 100 m.

53. $8\frac{4}{7} \approx 8{,}57$ cm.

54. $3\frac{9}{37} \approx 3{,}24$ cm.

55. $\dfrac{a + 2b}{3}$.

56. $\sqrt{45} - 3 \approx 3{,}71$ cm.

57. 24 cm resp. $108\sqrt{15} \approx 418{,}3\,\text{cm}^2$ eller 16 cm resp. $10\sqrt{960} \approx 309{,}8\,\text{cm}^2$.

58. $5{,}4\,\text{cm}^2$.

59. $9\frac{19}{30} \approx 9{,}63$ cm.

60. 6 cm.

61. 3,75 cm.

62. $21{,}6\,\text{cm}^2$.

63. $0,6\sqrt{384} \approx 11{,}76$ cm.

64. 10 cm.

65. 12 cm.

66. $1050\,\text{cm}^2$.

67. 7,2 cm.

68. $\dfrac{\sqrt{162}}{8} \approx 1{,}59$ cm.

69. A_1 skall vara mittpunkt på BC.

70. $10800\sqrt{2} \approx 15\,270$ kr.

71. $66\,\text{cm}^2$ och $150\,\text{cm}^2$.

72. $9{,}36\,\text{cm}^2$.

73. $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ cm.

74. $\dfrac{5\sqrt{375}}{4} \approx 24{,}2\,\text{cm}^2$.

75. $ADE = 73{,}5\,\text{cm}^2$; $ABE = 105\,\text{cm}^2$.

76. $\frac{1}{5}$. – Längden av AB och ytan av ABC överflödiga.

77. $(\sqrt{6} - 2) : 1$.

78. $2,5\sqrt{525} \approx 57{,}28$ cm.

79. $24 + \sqrt{128} + \sqrt{192} \approx 49{,}17$ cm.

80. $6\pi \approx 18{,}84\,\text{cm}^2$.

81. $\sqrt{8} + 2 \approx 4{,}828\,\text{cm}^2$

82. $2\sqrt{432} \approx 41{,}57\,\text{cm}^2$.

83. $6\sqrt{499} \approx 134$ millioner km.

84. $\dfrac{100\pi}{3} - 5\sqrt{75} \approx 61{,}42\,\text{cm}^2$.

85. $\sqrt{192} + 12 \approx 25{,}86\,\text{cm}^2$.

86. $\dfrac{32\pi}{3} - \sqrt{192} \approx 19{,}63\,\text{dm}^2$.

87. $21\sqrt{3} \approx 36{,}4$ m.

88. $\dfrac{463\sqrt{3}}{2} \approx 401\,\text{cm}^2$.

89. $\dfrac{484\pi}{3} + 242\sqrt{3} \approx 926\,\text{mm}^2$.

90. $\sqrt{432} \approx 20{,}78\,\text{cm}^2$.

91. $750(\sqrt{3} - 1) \approx 549\,\text{m}$.

92. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{km} \approx 549\,\text{m}$.

93. $\sqrt{52} \approx 7{,}21\,\text{km}$.

94. $\dfrac{245\pi}{6} - 49\sqrt{3} \approx 43{,}5\,\text{cm}^2$.

95. $\dfrac{\pi - \sqrt{2}}{\pi + \sqrt{2}} \approx 0,379$.

97. Figurens yta $= \left(\dfrac{100\pi\sqrt{3}}{6} - 50\right)$ %, dvs. approx. 40, 7 % av triangelns yta.

101. Nej.

102. $x_1 = 4,7$; $x_2 = 0,1$.

103. $x_1 = 1\frac{1}{5}$; $x_2 = -3\frac{1}{3}$.

104. $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{449}}{8}$.

105. $x_1 = \dfrac{a + 2b}{3}$; $x_2 = \dfrac{b}{2}$.

106. $x_1 = a$; $x_2 = -\dfrac{13a}{16}$.

107. $\dfrac{9238 + 136\sqrt{4614}}{10} \approx 1847$.

108. $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$; – Sätt vänstra ledet på en nämnare; dividera sedan med $a - b$.

109. $x_1 = \dfrac{a+b}{a-b}$; $x_2 = \dfrac{a-b}{a+b}$.

110. $a = 1$; den andra roten är $x = -1,6$.

111. Antingen är $a = 2$ och den andra roten $x = -2$ eller också är $a = -8$ och den andra roten $x = -32$.

112. $a = 1$.

113. 10-hörningen.

114. 19.

115. 2 och 3 eller -1 och 0.

116. $5,4\sqrt{6} \approx 13{,}22\,\text{cm}$ och $5,4\sqrt{3} \approx 9{,}35\,\text{cm}$.

117. 1 : 2.

118. 30,72 cm^2.

119. 13,44 cm.

120. $30\sqrt{216} \approx 441$ m.

121. $2\sqrt{288} \approx 33{,}94\,\text{cm}^2$.

122. $TP = 2r$; $PQ = \frac{2}{3}r$.

123. $-2,5 < x < 1,5$.

124. 12.5 y.e.

125. $a = \frac{1}{6}$; $b = -\frac{1}{6}$; $c = -1$; $x = 0,5$ ger y min ≈ -1.04.

126. $a = 3$; $b = 2$; $c = -1$; max.-punkt (1; 4).

127. $a = 40$; $b = 5$. Högsta höjden, 80 m, uppnås efter 4 sek.

128. $a = 5\frac{1}{4}$; $b = 2$; skärningspunkter $(3\frac{1}{2};\ 0)$ och $(-1\frac{1}{2};\ 0)$.

129. Ytan $= 4x^2 - 12x + 16$, där $0 \leq x \leq 2$; min.-värdet $= 7\,\text{cm}^2$.

130. Ytan $= \frac{2}{3}(6x - x^2)$; max.-värdet $= 6\,\text{cm}^2$.

131. Ytan $= 2x^2 - 12x + 35$; min.-värdet $= 17\,\text{cm}^2$.

132. Ytan $= \frac{4}{5}(10x - x^2)$; max.-värdet $= 20\,\text{cm}^2$.

133. Ytan $= \frac{25}{24}(12x - x^2)$; max.-värdet $= 37{,}5\,\text{cm}^2$.

134. $x_1 = 1$; $x_2 = 2\frac{2}{3}$.

135. $x_1 = 2$; $x_2 = -7$.

136. $x_1 = 1$; $x_2 = 2\frac{4}{7}$.

137. $\begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{5} \\ y_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 3 - \sqrt{5} \\ y_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

138. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2. \end{cases}$

139. $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 6\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{2}{3}. \end{cases}$

140. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = -2. \end{cases}$

141. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ y_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x_4 = 0 \\ y_3 = y_4 = 0. \end{cases}$

142. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = 1. \end{cases}$

143. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{15}}{2} \\ y_3 = \dfrac{5-\sqrt{15}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = \dfrac{-3-\sqrt{15}}{2} \\ y_4 = \dfrac{5+\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

144. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2} \\ y_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$

145. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

146. $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ y_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \frac{11}{3} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x_4 = -\frac{1}{3} \\ y_3 = y_4 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

147. $\begin{cases} x_1 = \sqrt{6} \\ y_1 = -\sqrt{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{6} \\ y_1 = \sqrt{6} \end{cases}$

148. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -1 \end{cases}$

149. $\begin{cases} x_1 = \frac{21}{13} \\ y_1 = \frac{7}{13} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

150. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -2,5 \\ y_2 = -1,5 \end{cases}$

151. $\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 2,6 \\ y_2 = 0,8 \end{cases}$

152. $\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ y_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

153. $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

154. $\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = -9 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = 6 \end{cases}$

155. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = 2 \end{cases}$

156. $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = \sqrt{2} \\ y_3 = -3\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = -\sqrt{2} \\ y_4 = 3\sqrt{2} \end{cases}$

157. $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

158. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

159. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \frac{b}{2} \\ y_2 = \frac{b}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = \frac{ab}{a+b} \\ y_2 = \frac{a^2}{a+b} \end{cases}$

160. $\begin{cases} x_1 = a+b \\ y_1 = a-b \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = a-b \\ y_2 = a+b \end{cases}$

161. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = \sqrt{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = \sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = -\sqrt{2} \end{cases}$

(de båda första rotparen är dubbellösningar)

162. $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}-1 \\ y_1 = -\sqrt{2}-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}-1 \\ y_2 = \sqrt{2}-1 \end{cases}$

163. $\begin{cases} x_1 = 0,6 \\ y_1 = -1,5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -1,5 \\ y_2 = 0,6 \end{cases}$

164. $a = 1,5; b = 0,5;$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -1,8 \\ y_2 = 2,4 \end{cases}$

165. $a = 9$ ger $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$; $a = -5$ ger $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

166. $a = 7,4$

167. $a = \pm 4$

168. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_3 = -2 \\ b_3 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} a_4 = -1 \\ b_4 = -2 \end{cases}$

169. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

170. $\begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \end{cases}$ eller $\begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \end{cases}$

171. Det finns en sådan triangel; dess bas $= -2 + \sqrt{24} \approx 6{,}899$ cm.

172. $x_1 = 2; x_2 = 1; x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

173. $b = 1; a - c = 1; a \leq 1,25; c \leq 0,25$

174. $32 + \dfrac{\sqrt{2}}{8} \approx 32,18$

175. $\sqrt[3]{25}$

176. $x = 4,979$

177. $77,6(2)$

178. $a = -3$, $b = 0$ ger ekvationen $x^2 + 3x = 0$; $a = -\sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ ger ekvationen $x^2 + x\sqrt[3]{9} + 3 - \sqrt[3]{9} = 0$

179. 5 cm, 12 cm, 13 cm

180. 114,59°

181. Basen = 4,5 cm och höjden = 8 cm eller basen = 9 cm och höjden = 4 cm

183. $4 - \sqrt{15}$

184. Höjden = $\frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}309$ m; basen = $2\sqrt{3} \approx 3{,}464$ m; de lika sidorna = $\frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}887$ m

185. $24 + \sqrt{649} \approx 49,475$

187. $AB : BC : CA = \sqrt{6} : 4 : \sqrt{10}$ – Drag parallelltransversaler genom P; beteckna sidorna $4a$, $4b$, $4c$

189. $10\sqrt{6} \approx 24{,}49$ m^2

190. $9\frac{3}{13} \approx 9{,}23$ cm

191. $16 : 5$

192. $\sqrt{147} \approx 12{,}12$ cm

193. $7 : 16$

194. $\frac{\sqrt{85}}{2} \approx 4{,}610$ cm

195. $6\frac{6}{13} \approx 6{,}46$ dm; 4,2 dm; 4 dm

196. $\frac{13 + \sqrt{160}}{3} \approx 8{,}550$ cm^2

197. $25 : 12$

198. 5 cm. – Vid användningen av formeln $R = \frac{abc}{4T}$ kan T beräknas som rektangeln minskad med tre trianglar.

199. $BD = 18{,}75$ cm; $CD = 12{,}75$ cm

200. $AB = 2{,}5$ cm; $BC = 1{,}5$ cm; $CA = 2$ cm

201. $\frac{2R}{5}(\sqrt{5} - 1)$

202. 27,5 cm^2. – $DA + BC = AB + CD = 11$. Ytan = $\frac{r}{2}(AB + BC + CD + DA)$

203. $\frac{\sqrt{63}}{4} \approx 1{,}984$ cm

204. 10 cm; 24 cm; 26 cm

205. $3 + \sqrt{8} \approx 5{,}828$ m^2

206. 143 m

207. 26 cm; 28 cm; 30 cm

208. 2 cm; 3,2 cm; 3,6 cm. – Beteckna sidorna i den sökta triangeln med $5k$, $8k$ och $9k$

209. Den tredje sidan beräknas till 8 cm

210. $\frac{15\sqrt{455}}{64} \approx 5{,}00$ cm^2

211. Beteckna sidorna med a; $a + x$; $a - x$. Man finner att $a = 4x$; triangeln är egyptisk

213. $\sqrt{21} \approx 4{,}583$ dm

214. $\sqrt{40} \approx 6{,}325$ cm

215. $\frac{a}{2}$

216. $\frac{\sqrt{865}}{2} \approx 14{,}71$ cm

217. $AB = 5{,}4$ cm; $BC = 3{,}75$ cm; $CA = 4{,}35$ cm

218. Avst. $= \sqrt{224} \approx 14{,}97$ cm; radien $= 18$ cm

219. 45 dm^2

220. $\frac{3 + \sqrt{8}}{6} \approx 0{,}9714$

221. $\frac{\sqrt{98}}{4} \approx 2{,}475$ cm

222. $\sqrt{12{,}5} \approx 3{,}536$ cm

223. $(\sqrt{5} - 1) : 1$

224. $\sqrt{96} \approx 9{,}798$ cm

225. 10,54 cm

226. 5 cm

227. $\sqrt{352} \approx 18{,}76$ cm

228. $4\frac{1}{3}$ cm och $5\frac{6}{17}$ cm från B.

229. $1 : 5$

230. $\frac{\sqrt{128}}{9\pi} \approx 40{,}1\%$

231. $10\sqrt{10} \approx 31{,}62$ cm. – Kordans inuti triangeln belägna del är 4 cm

232. $1 : 8$. – Beräkna höjden från C och därefter CE, som blir 9 cm

233. $27\frac{6}{7}$ cm, $42\frac{6}{7}$ cm och 45 cm

234. $10\sqrt{756} \approx 275{,}0$ cm^2

235. $\frac{\sqrt{481} - 16}{25} \approx 0{,}2373$

236. Drag från medelpunkten O normaler mot kordorna och beräkna $(PO)^2$ uttryckt i d, a och b. Man finner, att $(PO)^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$; vidare är $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - (PO)^2$.

239. $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$ resp. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}9238$

240. $2 - \sqrt{2}$

242. I ena fallet är höjden $4+\sqrt{3} \approx 5{,}732$ cm och kordan $\sqrt{20-\sqrt{192}} \approx 2{,}47(9)$ cm; i andra fallet är höjden $4-\sqrt{3} \approx 2{,}268$ cm och kordan $= \sqrt{20+\sqrt{192}} \approx 5{,}81(8)$ cm

243. 48 cm^2

244. $\frac{a}{2}$

245. Om avståndet från medelpunkten till diagonalerna är x resp. y, samt radien r, blir den sökta summan $\left(\sqrt{r^2-x^2}+y\right)^2+\left(\sqrt{r^2-x^2}-y\right)^2+\left(\sqrt{r^2-y^2}+x\right)^2+\left(\sqrt{r^2-y^2}-x\right)^2$, som kan förenklas till $4r^2$

246. $AB + AC = 2 \cdot BC$. – $\triangle AED$ kan visas vara likformig med $\triangle ABC$, varvid ytskalan är $1 : 9$ och längdskalan $1 : 3$. Satsen om motstående sidor i en tangentfyrhörning ger lösningen.

247. $\frac{1}{12}$. – $\triangle PEF \sim \triangle BCF$ med längdskalan $1 : 2$

248. $36(\sqrt{2}-1) \approx 14{,}91$ cm

249. $AE : EC = 3 : 4$; ytan delas i förhållandet $19 : 16$. – Drag höjden AF samt en linje genom A parallellt med BC; den skär förlängningen av DE i G. $\triangle AOG \sim \triangle DOF$ med längdskalan $2 : 1$. Sätter man så $BC = 10a$, blir $DF = 3a$, $AG = 6a$, $AE : EC = AG : DC = 6a : 8a = 3 : 4$

250. Låt diametern vara AB, den givna triangeln APB, trapetset $ABCD$. Då är trapetsets yta $= 2 \cdot \triangle OCD$, där O är cirkelns medelpunkt. $\triangle OCD \sim \triangle APB$, varav $CD : a = \frac{a}{2} : h$.