

Gamla tentor givna av Tryggve Nagell

För betyget Med Beröm Godkänd [2 betyg] (Originalen handskrivna)

September 1945

Problem givna 10/9. Skrivtid: 0930–1500

- 1) Bevisa algebrans fundamentalsats.
- 2) Vad representerar ekvationen

$$(1 + a - a^2)x^2 + (1 + a + a^2)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2xz + 2(-1 + a + a^2)yz = a$$

för olika värden på parametern a ? Beräkna volymen, när ytan är en ellipsoid.

- 3) Basen till en likbent triangel OBC har sina ändpunkter i origo O och i den fasta punkten $B(a, 0)$, $a > 0$. Höjden från O mot sidan BC skär denna i punkten D och normalen från D mot sidan OC skär denna i punkten P . Bestäm den geometriska orten för punkten P , när toppunkten C varierar medan basen ligger fast. Rita upp kurvan på millimeterpapperet för $a = 6$. Beräkna den yta, som inneslutes av kurvan.

Problem givna 11/9.

- 1) Framställ teorin för plana kurvors krökning.
- 2) Hur många reella rötter har ekvationen $n^n + x - 1 = 0$ där n är ett naturligt tal? Visa, att den endast har en positiv rot ρ_n . Konvergerar eller divergerar serien $\sum_1^{\infty} \frac{1 - \rho_n}{\log(1 + n)}$?
- 3) Integrera differentialekvationen

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 3 \sin x - \cos x.$$

Oktober 1945

Problem givna 9/10. Skrivtid: 0930–1500

- 1 Om Taylors formel för funktioner av en variabel.
- 2 Beräkna ytan och volymen av den rotationskropp, som uppstår, när kurvan $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$, $a > 0$, $b > 0$, roterar kring x -axeln.
- 3 Bestäm koefficienten c_n i potensserien

$$\log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

För vilka värden på x konvergerar serien?

Problem givna 10/10.

- 1 Om cirkelsnitt till andragradsytor.
- 2 Lös differentialekvationen $y^{(4)} + 7y'' + 18y' + 10y = 22 \cos x - 14 \sin x$.
- 3 Hur många positiva och hur många negativa rötter har ekvationen

$$x^5 + ax^2 - (2a + 5)x + a + 5 = 0$$

där a är ett reellt tal ≥ -10 .

December 1945

Problem givna 1/12. Skrivtid: 0930–1500

- 1) Om integraler av typen $\int F(x, y) dx$, där F är en rationell funktion av x och y , och där $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Konstruera numeriska exempel, som illustrera teorins olika fall.
- 2) Hur många reella rötter har ekvationen $x^5 + x^3 - k^2x + k^3 = 0$, där k är ett reellt tal? För vilka värden på k har ekvationen en dubbelrot?
- 3) Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2}$$

Problem givna 3/12.

- 1) Bestäm minsta avståndet mellan två räta linjer L och L_1 i rummet.
- 2) Vad representerar ekvationen $axy + axz - yz = a + x^2$ för olika värden på den reella parametern a ?
- 3) Bestäm maximi-, minimi- och inflexionspunkterna till kurvan $x^4 + a^2y^2 = 2a^2xy$, $a > 0$. Bestäm tangenterna i origo och eventuella inflexionstangenter. Rita upp kurvan på millimeterpapperet för $a = 4$.
Beräkna arean av den yta, som inneslutes av kurvan. Beräkna volymen av den rotationskropp, som uppstår, när kurvan roterar 360° om x -axeln.

Januari 1946

- 1) Om definitionen av dubbelintegraler.
- 2) Hur många reella rötter har ekvationen

$$x^7 + 7ax^4 + (28a - 7)x + 6 - 3a = 0$$

för olika värden på den reella parametern a ? När äro rötterna positiva, noll eller negativa? När har ekvationen multipla rötter?

- 3) Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{x=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n \log(1+x)}{k^2 + n^2 x^2}?$$

- 1) Bestäm eventuella maximi-, minimi- och singulära punkter till kurvorna $y^2 = x^3 - Ax - B$, där A och B äro reella tal. I vilka typer kan kurvorna indelas efter utseendet, när A och B varierar? Rita upp på millimeterpapperet ett exempel på varje kurvtyp.
- 2) Bestäm värdet av integralen $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a + bx^2 + cx^4)^2}$, där a , c och $4ac - b^2$ äro positiva.
- 3) Bestäm den största triangel, som kan inskrivas i en given ellips, när triangeln har ett hörn i en toppunkt.

Mars 1946

Problem givna 8/3. Skrivtid: 0930–1500

- 1) Om fjärdegradsekvationens lösning.
- 2) Ett linjestycke AB av längden a rör sig med sina ändpunkter på koordinataxlarna. Normalen från origo O till AB skär AB i punkten P . Bestäm den geometriska orten för P .
Rita upp kurvan på millimeterpapperet för $a = 8$.
Bestäm kurvans maximi-, minimi- och inflexionspunkter och även dess singulära punkter.
Beräkna den yta, som inneslutes av kurvan.
Beräkna volymen av den rotationskropp, som uppstår, när kurvan roterar 360° om x -axeln.
- 3) Integrera differentialekvationen $x^2 y'' + xy' - y = x^m$.

Problem givna 9/3.

- 1) Om konvergens och divergens av oändliga serier med positiva termer.
- 2) Bevisa följande sats: När två av en liksidig hyperbels skärningspunkter med en cirkel är diametrala på hyperbeln, så är även de två andra diametrala på cirkeln.
- 3a) Sök ekvationen för den cylinderyta, vars generatriser äro tangenter till ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, och ha riktningscosinerna α , β och γ .
- 3b) Sök den geometriska orten för projektionerna av ellipsoidens centrum på dess tangentplan.

Maj 1946

Problem givna 10/5. Skrivtid: 0930–1500

- 1) Om oändliga produkter.
- 2) Bestäm konstanterna a , b och c så att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[na + b + \frac{c}{n} - n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] e^{-\sqrt{\log(2+\log n)}}$$

konvergerar.

- 3) Bestäm arean av den del av den krökta ytan $z^2 = (x+y)^3$, som avskäres av xz -planet, yz -planet och av planet $x + y = \frac{2c}{3}$. Beräkna volymen av den kropp, som begränsas av koordinatplanen, planet $x + y = \frac{2c}{3}$ och ytan.
- 4) I vilken fjärdegradsekvation med rationella koefficienter är talet

$$\xi = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9}$$

rot? Vilka äro ekvationens övriga rötter?

Problem givna 11/5.

- 1) Om kurvintegraler.

- 2) Given en cirkel med radien a och två mot varandra vinkelräta diametrar OA och CD . En rörlig punkt R på cirkelns omkrets har projektionerna E på OA och F på CD . Låt OA vara x -axel och O origo. Bestäm den geometriska orten för skärningspunkten mellan de räta linjerna OF och RE .

Bestäm kurvans maximi-, minimi-, inflexionspunkter och singulära punkter. Rita upp kurvan för $a = 5$ på millimeterpapperet. Beräkna den yta, som inneslutes av kurvan. Beräkna den del av denna yta, som ligger utanför cirkeln. Bestäm cirkelns och kurvans gemensamma tangenter och normaler.

- 3) En cirkel med centrum i origo skär ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Låt A beteckna arean av de delar av ellipsen, som ligger utanför cirkeln och låt B beteckna arean av de delar av cirkeln, som ligger utanför ellipsen. Bestäm maximum och minimum av $A + B$, när ellipsen är fast och cirkeln varierar.

Hur stor del av cirkelns omkrets ligger utanför ellipsen, när $A + B$ har sitt minimum?