Gamla tentor givna av Arne Beurling

För betyget Med Beröm Godkänd [2 betyg]

September 1946

Problem givna fredag 6/9. Gemensamt Uppsala – Lund

1. Beräkna $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$, $a > 0$.
   Visa med ledning härav, att
   $$\lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(a-x)}} = f(0)$$
   om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion.

2a. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ är en följd av positiva tal, så beskaffade, att serien $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{a_n}{n}$ är konvergent. Kan serien $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\sqrt{a_n}}{n^2}$ divergera?

2b. Sök att besvara samma fråga för andra serier av typen $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{a_n^p}{n^q}$ för olika värden på p och q.

3. Funktionerna $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(), \ldots$ äro jämte sina derivator kontinuerliga och uppfylla följande villkor:

   1° $y_n(0) = 0$ för alla n.

   2° Funktionsföljden $y_n'(x) + y_n(x) = \epsilon_n(x)$ konvergerar likformigt mot noll för $0 \le x \le 1$.

   Visa, att såväl $y_n(x)$ som $y_n'(x)$ konvergera likformigt mot noll för $0 \le x \le 1$.

4. Kvantiteterna θ_n äro bestämda av relationerna
   $$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{\theta_n}{n}.$$
   Visa, att $\lim_{n\to\infty} \theta_n$ existerar samt beräkna gränsvärdet.

Lördag 7/9 1946

5. Vilket är det största värde, som summan av kuberna på rötterna till ekvationen $x^3 + (x^2 + x - 1)\sin\alpha = 0$ kan antaga för något värde på vinkeln α?

6. En tredjegradsekvation med rationella koefficienter är given. Man vet att skillnaden mellan två av rötterna är ett rationellt tal. Visa, att alla rötterna är rationella!

7. Ytan $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz = 1$ innehåller en cirkel, vars plan går genom punkten (1, 2, 3). Bestäm medelpunkten till denna cirkel samt cirkelns ekvation.

8. Fem punkter på ett kägelsnitt äro givna. På sammanbindningslinjen till två av dem tages en punkt Q. Konstruera polaren till Q.

Oktober 1946

Problem givna fredag 25/10.

1) Konstruera kurvan $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$ och beräkna den inneslutna ytan.

2) Bevisa, att summan av serien

$$\frac{a}{1!} + \frac{2^m a^2}{2!} + \frac{3^m a^3}{3!} + \dots + \frac{k^m a^k}{k!} + \dots$$

för heltaliga a och m är en heltalsmultipel av e^a.

3) Bilda talföljden $a_0 \geq -\frac{1}{3}$, a_1, a_2, ... , a_n, ... där $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_0}$, $a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_1}$,...,
$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_{n-1}}$, ...Visa, att den är konvergent och beräkna dess gränsvärde!

4) $y = f(x)$ är ekvationen för en kurva i ett snedvinkligt koordinatsystem, där axlarna bilda vinkeln α med varandra. Bestäm uttrycket för krokningen i en punkt (x, y).

Lördag 26/10 1946.

5. a_r och b_r, $r = 1, 2, \dots, n$ är två talföljder så beskaffade, att för varje talföljd x_r, $r = 1, 2, \dots, n$, som uppfyller villkoret $\sum_1^n a_r x_r = 0$, samtidigt gäller $\sum_1^n b_r x_r = 0$. Visa, att $b_r = k \cdot a_r$, $r = 1, 2, \dots, n$.

6. Visa, att ekvationen $x^5 + ax^3 + 2x^2 + bx + c = 0$ har åtminstone två komplexa rötter om $a > -\sqrt[3]{10}$.

7. Koefficienterna u, v och w i ekvationen $ux^2 + 2vxy + wy^2 = 1$ uppfattas som koordinater för en punkt i rummet. Undersök, vad ekvationen geometriskt betyder i xy-planet, då (u, v, w) varierar i rummet. Betäm den yta, som (u, v, w) måste befinna sig på, för att ekvationen skall betyda en ellips med konstant area!

8. På en sida i en given rektangel (sidor a och b) väljes en punkt P. I rektangeln inskrives en fyrhörning så, att ett av dess hörn faller i P. Visa, att den fyrhörning, som har minsta möjliga omkrets är en parallellogram med sidorna parallella med rektangelns diagonaler. Beräkna den minsta omkretsen!

December 1946

Problem givna första dagen 4/12.

1) Låt a_1, a_2, a_3, ... vara de positiva x-värden för vilka funktionen $\frac{\sin x}{x}$ har maxima. Undersök serierna $\sum_1^\infty \frac{\sin a_n}{a_n}$ och $\sum_1^\infty \frac{\cos a_n}{a_n}$ med avseende på konvergens eller divergens.

2) Om $f(x)$ är differentierbar för $x > x_0$ och $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$, visa, att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

3) Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \frac{ydx + (2-x)dy}{x^2 + y^2 - 4x + 4},$$

där C är en cirkel med origo som centrum och radie a) 1, b) 3.

4) Visa, att

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots$$

(Ledning: Sätt $\log x = -y$.)

Andra dagen 5/12 1946.

5. Visa, att en rotationskon med centrum i origo endast kan skära ytan $3x^2 - y^2 - z^2 + 12x + 9 = 0$ i plana sektioner.

6. Rötterna till ekvationen $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$ kallas t_1, t_2 och t_3. c_1, c_2 och c_3 äro tal sådana att

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = \text{heltal} \\ c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 = \text{heltal} \\ c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 + c_3 t_3^2 = \text{heltal} \end{cases}$$

Visa, att då är $c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + c_3 t_3^n = \text{heltal}$ för varje naturligt tal n, samt att detta heltal är $< 2^n$ för tillräckligt stora n.

7. Integralkurvorna till differentialekvationen $4(xy' - y)^2 = 1 - 2y' + 5(y')^2$ övertäcka hela xy-planet utom ett visst område, begränsat av en sluten kurva. Beräkna ytan av detta område!

8. En ellips och två räta linjer, som skära denna, äro givna. Ellipsens axlar äro parallella med linjernas bissektris. Visa, att varje konisk sektion, som går genom de 4 skärningspunkterna mellan ellipsen och de räta linjerna, har samma egenskap!

Januari 1947

Problem givna torsdag 23/1 1947.

1) Angiv de värden på x för vilka potensserien $x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \ldots$ är konvergent och beräkna då dess summa.

2) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin^2 nx}{x}\,dx$.

3) Med V betecknas den del av rummet, vars rätvinkliga koordinater uppfylla villkoret $|z| \leq \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^a}$. Angiv de värden på a för vilka volymen av V blir ändlig samt beräkna den för sådana värden på a.

4) En plan, sluten, konvex kurva K med kontinuerligt varierande tangentriktning är given. På en tangent, som berör kurvan i punkten T, väljes en punkt P så, att avståndet $TP = l$. Tangenten får sedan glida ett varv längs kurvan, varvid P (vars avstånd till respektive tangeringspunkt är konstant $= l$) beskriver en viss sluten kurva C. Visa, att den area, som är belägen mellan kurvorna K och C, är $= \pi l^2$ och således oberoende av den konvexa kurvan K.

Lördag 25/1 1947

5. Visa, att $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 6 & \dots & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 10 & \dots & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix} = n!$

6. Hyperboloiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ skäres av planet $Ax + By + Cz = 0$ längs en ellips. Bestäm dess yta!

7. För vilka värden på det hela talet n har ekvationen

$$nx^6 - 11x^4 - 5x^3 - 11x^2 + n = 0$$

några rationella rötter? Bestäm även dessa.

8. Låt $ABCDEF$ vara en sexhörning, som är inskriven i ett kägelsnitt. Låt P vara skärningspunkten mellan sidorna AB och CD och Q skärningspunkten mellan AF och DE, samt slutligen R skärningspunkten mellan diagonalerna BE och CF. (Vid behov få de nämnda sträckorna förlängas.) Visa, att P, Q och R ligga i rät linje.

Mars 1947

Problem givna torsdag 20/3 1947.

1. Betrakta kurvan $y = \frac{1}{x^a}$, $a > 0$. Från punkterna (1, 0), (2, 0), (3, 0),...dragas tangenter till kurvan, vilka med x-axeln bilda de spetsiga vinklarna A_1, A_2, A_3,...Undersök konvergensen av serien $A_1 + A_2 + A_3 + \dots$.

2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} n^2 \Big[e^{-n}\Big(1 + \frac{1}{n^3}\Big)^{n^4} - 1\Big]$.

3. Man vet, att funktionen $f(x, y) \geq 0$ samt att $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy > 1$.

Kan $\int_0^1 \int_0^1 \Big(f(x, y)\Big)^2 dxdy$ vara < 1?

(Ledning: Använd ev. funktionen $(f(x, y) - \frac{1}{2})^2$.)

4. Sök den funktion $u(x)$, kontinuerlig liksom $u'(x)$ och $u''(x)$, som satisfierar ekvationen

$$u(x) = x + 2 - \cos x - \int_0^x (x - t)u(t)\, dt.$$

(Derivera lämpligt antal gånger.)

Lördag 22/3 1947.

5. a, b och c äro rötter till ekvationen $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Beräkna

$$\frac{1}{(b + a)(c + a)} + \frac{1}{(a + b)(c + b)} + \frac{1}{(a + c)(b + c)}.$$

6. F är en punkt inuti en given triangel. Med F som brännpunkt inskrives en ellips i triangeln. Konstruera geometriskt tangeringspunkterna med triangelsidorna.

7. Bevisa formeln $\prod_{p=0}^{2n} \cos \frac{\pi p}{2n+1} = (-1)^n 2^{-2n}$ genom att betrakta faktoruppdelningen av polynomet $x^{2n+1} - 1$.

8. En hyperboloid är given. Man betraktar två fixa generatriser ur olika system, som skära varandra i en punkt O på strupellipsen. Två parallella generatriser skära de fixa i punkterna P och Q resp. Visa, att produkten av $\overline{OB}$ och $\overline{OQ}$ är konstant för alla par av parallella generatriser. (Välj t.ex. O som origo.)

Maj 1947

Första dagen.

1) Beräkna summan av serien $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - k^2}$ (k helt positivt tal).

2) En sfär tänkes invändigt belagd med ett speglande skikt. Från en punkt på sfärens yta utgår en ljusstråle, som bildar vinkeln $a\pi$ med den radie, som går genom punkten $(0 < a < \frac{1}{2})$. Strålen reflekteras sedan gång på gång i sfären. Visa, att strålen någon gång återkommer till utgångspunkten om och endast om a är ett rationellt tal.

3) Bestäm en funktion $f(x)$ sådan att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)$ konvergerar och är $= f(x)$.

4) Bestäm fotpunktskurvan till $y = x^2$ m.a.p. origo. Konstruera fotpunktskurvanmoch beräkna den yta, som är belägen mellan densamma och dess asymptot.

Andra dagen.

5. Visa att, om ekvationen $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x - x + b = 0$ har alla sina rötter reella, så är differensen mellan den största och den minsta roten mindre än eller lika med 2.

6. a_{ik} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ äro elementen av en determinant D av given ordning n. Om alla elementen försvinna, är uppenbarligen $D = 0$. Bestäm det minsta tal m så beskaffat, att av $a_{ik} = 0$ för $i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, m$ måste följa att $D = 0$.

7. Beräkna volymen av det område, som definieras genom olikheterna $x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ och $x^2 + y^2 \leq 2x$. (x, y och z äro rätvinkliga koordinater.)

8. I en punkt P på en lurva drages tangenten och normalen. I en närbelägen punkt Q på kurvan drages tangenten. Denna skär den förstnämnda tangenten och normalen i T resp. N. Beräkna
$$\lim_{Q \to P} \frac{PT^2}{PN}$$
uttryckt i kurvans krökningsradie i P. Kurvan förusättes vara grafiska bilden av en funktion med godtyckligt många derivator. (Ledning: Välj P till origo och tangenten i P till x-axel.)