Studentmatematik

STUDENTMATEMATIK

Tillägg till DEL III
Reallinjens specialkurs
Januari 1953 – HT 1957
med utförliga lösningar
av
SELIM SKARBÄCK

ALMQVIST & WIKSELL
STOCKHOLM

Uppgifter

JANUARI 1953

1. En punkt rör sig i ett koordinatsystem, så att dess avstånd från x-axeln är dubbelt så stort som dess avstånd från en given punkt $(a;\ b)$ i första kvadranten. Orten för den rörliga punkten är en andragradskurva. Bestäm dennas ekvation och excentricitet.

2. I två konvergenta oändliga geometriska serier är den första termen lika med kvoten i den andra serien. De båda kvoterna är rötter till ekvationen $x^2 - ax - a^2 = 0$. Bestäm a, så att summan av de båda seriernas summor blir så stor som möjligt.

3. Funktionen y satisfierar ekvationen $xy\cos\dfrac{y}{x} = C$, där C är en konstant. Visa, att sambandet

$$x\left(y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)$$

gäller för alla värden på C.

4. Till en hyperbel med transversalaxeln utefter y-axeln är linjerna $4x-3y = 0$ och $21x-20y = 0$ konjugatdiametrar och linjen $21x - 20y + 17 = 0$ tangent. Bestäm hyperbelns ekvation.

5. Ett rektangulärt pappersark $ABCD$ är av s.k. standardformat (DIN-format), dvs $AB = AD\sqrt{2}$. Arket vikes, så att hörnet A faller på sidan CD och vikningslinjens ändpunkter på AB och AD. Var skall A falla, för att vikningslinjen skall bli så kort som möjligt?

6. Bevisa, att för alla vinklar x mellan 0 och $\dfrac{\pi}{2}$ gäller olikheterna

$$\frac{1}{3}(2\sin x + \tan x) > x > \sin x.$$

7. För att bestämma sneda asymptoter till en kurva kan man i många fall förfara på följande sätt. Tangenten till kurvan i en punkt med x-koordinaten x_1 bestämmes under formen $y = kx + l$, varefter man beräknar

$$\lim_{x_1\to\pm\infty} k \quad \text{och} \quad \lim_{x_1\to\pm\infty} l$$

Använd denna metod för att bestämma den sneda asymptoten till kurvan $y = x\sqrt{x : (x-1)}$. Konstruera därefter kurvan med angivande även av eventuella maximi- och minimipunkter samt övriga asymptoter.

VT 1953

1. Visa, att de tangenter till ellipsen $2x^2 + 6y^2 = 3$, vilka går genom punkten $(1;\ 1)$, är vinkelräta mot varandra.

2. Visa, att funktionen $y = ax + bx\sqrt{1-x^2}$, där a och b är konstanter, satisfierar ekvationen

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^3.$$

3. Sök och konstruera orten för medelpunkten i den cirkel, som tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 64$ innantill och går genom punkten $(4;\ 0)$.

4. Hur nära styrlinjen till en parabel kan skärningspunkten mellan två inbördes vinkelräta normaler till parabeln komma?

5. B och B' är ändpunkterna av en hyperbels konjugataxel. En rät linje genom B skär hyperbeln i två punkter, P och Q. Visa, att konjugataxeln är bisektris till vinkeln $PB'Q$ eller till dess sidovinkel.

6. I en cirkel med radien r är OA och OB två från medelpunkten O utgående strålar, som med varandra bildar vinkeln $2v$, där $v < 90°$. En korda CD i cirkeln är sida i rektangeln $CDEF$, vars hörn E och F ligger på var sin av strålarna OA och OB. För två lägen av kordan CD antar ytan av rektangeln ett maximivärde. Visa, att produkten av dessa maximivärden $= r^4$, oberoende av vinkeln v.

7. Diskutera utseendet av kurvan

$$y = \frac{2x + a}{x^2 - 4}$$

för olika värden på a. Undersök därvid skärningspunkter med koordinataxlarna, maximi- och minimipunkter samt asymptoter. Undersök även, hur kurvan närmar sig till asymptoterna. Upprita slutligen i deras huvuddrag – i olika koordinatsystem – exempel på de olika typer av kurvor, som kan förekomma.

Augusti 1953

1. Den mot en viss funktion $y = f(x)$, där $f(x)$ är ett polynom av tredje graden, svarande kurvan har en inflexionspunkt i punkten $(-1;\ 8)$ och en minimipunkt i punkten $(0;\ 6)$. Bestäm funktionen och upprita kurvan.

2. Ange excentriciteten för den största ellips, i vilken summan av storaxeln och den ena parametern är konstant.

3. En hyperbel har transversalaxeln parallell med y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Dess medelpunkt ligger i punkten $(4;\ -4)$, dess ena asymptot går genom origo, och dess ena vertex (topp) har ordinatan 5. Ange ekvationerna för de tangenter till denna hyperbel, som kan dragas från punkten $(0;\ 3)$.

4. En rät linje genom brännpunkten F skär parabeln $y^2 = 4fx$ i punkterna P och Q. Sträckorna FP och FQ har längderna a respektive b. Bevisa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

5. Tre punkter A, B och C ligger i denna ordning på en rät linje. En cirkel uppritas genom punkterna A och B. Ena tangenten till cirkeln från punkten C tangerar cirkeln i punkten P. Sök och konstruera orten för punkten P, då cirkelns radie varierar.

6. Genom sambandet $y^2 \cos nx = 1$, där n är en konstant, bestämmes y som funktion av x.Bestäm de värden på n, för vilka denna funktion satisfierar ekvationen $y + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 3y^5$, samt ange i dessa fall, för vilka värden på x inom intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ funktionen antar reella och ändliga värden.

7. Undersök kurvan $y(x-1)^2 = 3x^2 - 8x + 4$ med avseende på asymptoter, maximi-, minimi- och inflexionspunkter, samt upprita densamma i stora drag. För vilka värden på a kan man från punkten $P\ (a;\ 3)$ draga ingen, en eller flera tangenter med tangeringspunkten på ändligt avstånd? Diskutera särskilt fallet $a = 1$, och ange för detta fall tangentens ekvation.

HT 1953

1. Funktionen $y = x^3 + 3cx^2 + c$, där c är en konstant, har ett maximivärde, som är dubbelt så stort som funktionens minimivärde. Bestäm konstanten c.

2. Genom origo O i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje, som skär linjen $x = a$, där $a > 0$, i punkten A. Genom punkten B $(0;\ a)$ drages den mot OA vinkelräta linjen och genom A den med x-axeln parallella linjen. De båda sist dragna linjerna skär varandra i punkten P. Sök och konstruera orten för P, då linjen OA vrider sig kring origo.

3. I uttrycket $y = \sin x + z \tan x$ är z en funktion av x. Visa, att om $\dfrac{dy}{dx} = z + \cos x$, så är $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$.

4. Parabeln $y^2 = 2b(x + a)$, där a och b är positiva storheter, skär asymptoterna till hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i fyra punkter, som utgör hörn i ett parallelltrapets med ytan $14a^2$. Bestäm hyperbelns excentricitet.

5. O är toppen i en kon, vars basyta är en ellips. Konens höjd råkar basytan i dess medelpunkt. Ellipsens storaxel AB har längden $2a$. Den mindre axeln är CD. Sträckan OA är aritmetiskt medium till till ellipsens axlar, och vinklarna OAB och OCD förhåller sig som $2 : 3$. Hur stor är konens volym?

6. Genom punkten P med koordinaterna $(3p;\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rät linje, som skär parabeln $y^2 = 2px$ i punkterna A och B. Parabelns tangent i punkten A skär x-axeln i C. Vilket är det minsta värde, som ytan av triangeln ABC antar, då linjen AB vrider sig kring punkten P?

7. De räta linjerna L och L' skär varandra under räta vinklar i punkten O. På ena bisektrisen M till vinklarna mellan linjerna tages punkterna A och B på var sin sida om O, så att $AO = BO = 1$ längdenhet. P är en rörlig punkt på den andra bisektrisen M'. PA eller dess förlängning åt ena eller andra hållet skär L' i D. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av triangeln PCD varierar, när P genomlöper M'. Ange särskilt triangelytans eventuella maximi- eller minimivärden.

Januari 1954

1. Under vilka vinklar skär kurvorna $x^2 + 3y^2 = 4$ och $3x^2 + y^2 - 4y = 0$ varandra?

2. Tangenterna till en hyperbel i de båda parametrarnas ändpunkter bildar en fyrsiding. Hyperbelnormalerna i samma punkter bildar en annan fyrsiding. För en viss hyperbel är den senare fyrsidingens yta fyra gånger så stor som den förras. Bestäm denna hyperbels asymptotvinkel, dvs en vinkel mellan asymptoterna, inom vilken en hyperbelgren är belägen.

3. Genom ekvationen $\left(\dfrac{a}{x}\right)^3 - \left(\dfrac{b}{y}\right)^3 = 1$, där a och b är från 0 skilda konstanter, bestämmes y som funktion av x. Visa, att denna funktion, oberoende av värdena på a och b, satisfierar ekvationen
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

4. Kring en sfär med radien r är en regelbunden sexsidig pyramid med minsta möjliga volym omskriven. Beräkna denna pyramids baskant och höjd.

5. Normalen i en punkt A på parabeln $y^2 = 4x$ skär x-axeln i B. P är skärningspunkten mellan parabeltangenten i A och den räta linje genom B, som är parallell med y-axeln. Sök orten för P, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag. Visa även, att ortkurvan har den givna parabeln till asymptotkurva, dvs obegränsat närmar sig densamma, när punkten A rycker allt längre bort.

6. AB är diametern i en given halvcirkel med medelpunkten O och radien 1 dm. P är en punkt på halvcirkelbågen och Q mittpunkten på bågen PB. Normalerna genom P och Q mot diametern AB träffar denna i punkterna R och S respektive. Den yta, som begränsas av cirkelbågen PQ och sträckorna QS, SR och RP, är en funktion av vinkeln POB. Ange denna funktion, bestäm dess eventuella maximi- och minimivärden samt upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.

7. Diskutera utseendet av kurvan $y = (x^4 + ax^3 - 3) : x^3$ för olika värden på konstanten a. Undersök därvid skärningspunkter med koordinataxlarna, asymptoter och kurvans läge i förhållande till asymptoterna samt maximi-, minimi- och inflexionspunkter. Åskådliggör i skilda koordinatsystem de olika typer av kurvor, som kan förekomma.

VT 1954

1. Tangenterna till en hyperbel i den ena parameterns ändpunkter skär en av asymptoterna i punkterna A och B. Visa, att sträckan AB:s projektion på konjugataxeln är lika lång som parametern.

2. Upprita kurvorna $y^2 = 4x$ och $x^2 + y^2 + 2x = 0$, och bestäm ekvationerna för deras gemensamma tangenter.

3. Visa, att funktionen $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ satisfierar ekvationen

$$\frac{d^2}{dx^2} + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

4. I fyrhörningen $ABCD$ är vinklarna A och B räta. Sidorna BC och CD har vardera längden 1 cm. Bestäm maximivärdet av fyrhörningens yta. Svaret skall anges i såväl exakt som approximativ form.

5. I en given klotsektor är medelpunktsvinkeln 120°. I sektorn inskrives en rät cirkulär cylinder, vars axel faller utefter sektorns symmetrilinje och vars buktiga yta är så stor som möjligt. Bestäm förhållandet mellan denna cylinders basradie och höjd.

6. En ellips, vars yta är π enheter, tangerar de positiva koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem. Genom punkten $(0;\ 2)$ går två tangenter till ellipsen. En av dem sammanfaller med y-axeln. Den andra tangenten skär x-axeln i punkten P. Bestäm x-koordinaten för P som funktion av den av ellipsens halvaxlar, som är parallell med x-axeln, och åskådliggör denna funktion grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.

7. Upprita i dess huvuddrag kurvan

$$y = \frac{a}{x^2 + 1}$$

där a är en konstant. En punkt P på kurvan är så belägen, att kurvans normal i denna punkt går genom origo. Sök och upprita geometriska orten för P, när a antar olika värden. Ange vidare, hur antalet normaler genom origo beror av a samt vilka spetsiga vinklar, som dessa normaler kan bilda med y-axeln.

Augusti 1954

1. Av de räta linjerna $2x + y - 5 = 0$ och $2x + y - 30 = 0$ är den förra tangent och den senare normal till parabeln $y^2 = 4a(x - b)$. Bestäm konstanterna a och b.

2. Genom sambanden $x = \sin^2 t$ och $2y = \sin 2t$ bestämmes y som funktion av x. Visa, att

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4y^3}$$

3. En brännpunktsradie till hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ tages till diameter i en cirkel. Visa, att denna cirkel tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$.

4. En cirkel med radien r har sin medelpunkt i mittpunkten på den större av de parallella sidorna i ett parallelltrapets och tangerar trapetsets övriga sidor. Bestäm i exakt form det minsta värde, som trapetsets omkrets kan antaga.

5. Tangenten i en punkt P på en ellips skär de genom storaxelns ändpunkter dragna tangenterna i punkterna A och A_1. Ellipsens brännpunkter betecknas med F och F_1, av vilka F ligger närmast A. Visa, att de räta linjerna AF_1 och A_1F skär varandra på normalen till ellipsen i P.

6. Två ogenomskinliga klot med radierna 4 cm och 1 cm har ett medelpunktsavstånd av 10 cm. En punktformig ljuskälla befinner sig på centrallinjen. Bestäm summan av de belysta kalotterna som funktion av ljuskällans avstånd från det större klotets medelpunkt. Undersök hur denna funktion varierar, när ljuskällan rör sig längs del del av centrallinjen, som ligger mellan kloten, och åskådliggör detta i ett diagram.

7. Sök och konstruera orten för inflexionspunkterna till kurvan $y = a\tan x + \sin x$, när konstanten a genomlöper alla reella värden. Diskutera även den givna kurvans utseende för olika värden på a samt upprita i huvuddrag exempel på de olika typer, som kan förekomma.

HT 1954

1. Visa, att varje funktion av formen $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, där a, b, c och d är godtyckliga konstanter, satisfierar ekvationen
$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

2. Parabeln $y^2 = 4ax$ träffas av en ljusstråle, som går från vertex längs den räta linjen $y = 2x$. Sedan strålen en gång reflekterats mot parabeln, löper den längs en annan rät linje. Bestäm dennas ekvation.

3. Upprita kurvan $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$ med angivande av eventuella asymptoter, maximi-, minimi- och inflexionspunkter.

4. En ellips, vars brännpunkter ligger på y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, tangeras av de räta linjerna $2x + y - 6 = 0$ och $2x + y + 4 = 0$. Avståndet mellan brännpunkterna är lika stort som avståndet mellan de givna tangenterna. Sök ellipsens ekvation.

5. En rät linje L och en punkt A utanför densamma är givna. Genom A drages en rät linje, som skär L i punkten P. En cirkel tangerar AP i P och avskär av L en korda, vars längd är lika med dubbla avståndet från A till L. Sök och konstruera orten för cirkelns medelpunkt , när punkten P beskriver linjen L.

6. Ekvationen $3x^2 - 4y^2 + 6x + 36y + m = 0$ betyder för olika värden på konstanten m en kurva, som i allmänhet är en hyperbel. Diskutera kurvans utseende för o lika värden på m, och ange det samband, som måste finnas mellan två m-värden, m_1 och m_2, för att motsvarande kurvor skall vara konjugathyperbler.

7. Toppvinkeln i en rät cirkulär kon är 2α. En kropp, sammansatt av en rät cirkulär cylinder och en halvsfär, vars plana begränsningsyta sammanfaller med cylinderns ena basyta, är placerad i konen på följande sätt: cylinderns andra basyta faller utefter konens basyta och dess axel utefter konens axel, och halvsfärens buktiga yta tangerar konens mantelyta. Bestäm förhållandet z mellan den nämnda sammansatta kroppens volym och konens volym som funktion av förhållandet t mellan cylinderns och konens bottenradier. Ange det område, inom

vilket t kan variera. Undersök därefter, hur z varierar för t inom detta område. Visa bl.a., att z har ett maximivärde inom området, om α uppfyller ett visst villkor. Åskådliggör slutligen funktionen z med särskilda diagram över de olika fall, som kan förekomma. Ovan nämnda maximivärde för z är en funktion av vinkeln α. Undersök hur denna funktion varierar, då α antar de värden, som är möjliga. Ange speciellt det största värde, som funktionen kan anta.

Januari 1955

1. Visa, att inflexionspunkterna till kurvan $20a^4y = 3x^5 - 15ax^4 + 20a^2x^3$, där a är en konstant, som är $\neq 0$, ligger på en rät linje, och bestäm dennas ekvation.

2. Mellan variablerna y och z råder sambandet $z = \dfrac{1 + \tan y}{1 - \tan y}$. Bevisa, att $\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2z\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2 = 0$.

3. En ellips tangerar en liksidig hyperbel i dess vertices. Ellipsen skär konjugathyperbeln till den givna hyperbeln under räta vinklar. Beräkna ellipsens excentricitet.

4. Bestäm de värden på konstanten a, för vilka ekvationen

$$a(x^2 + y^2) - 2x + y + 5 = 0$$

betyder en cirkel. Bevisa, att origo och punkten $(4;\ -2)$ ligger på var sin sida om periferin av varje sådan cirkel.

5. Upprita kurvan $y^2 = 1 + xy$ i dess huvuddrag. Visa, att kurvan tangeras av den räta linjen $y = x\sin^2 v - \sin 2v$, där v är en konstant, för vilken gäller $0 < v < \frac{1}{2}\pi$. Diskutera gränsläget för denna linje och för motsvarande tangeringspunkt, då v obegränsat närmar sig 0 respektive $\frac{1}{2}\pi$.

6. En parabel har fokus i origo och vertex på den räta linjen $x + 5y = 0$. Parabeln tangerar den räta linjen $x - y - 6 = 0$. Bestäm koordinaterna för tangeringspunkten.

7. Visa, att kurvan $y = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$, där a är en konstant, som är $\neq 0$, har en och endast en inflexionspunkt, utom för $a = -1$, då inflexionspunkter saknas. Undersök för olika värden på a, hur i förra fallet inflexionspunkten är belägen i förhållande till kurvans tre asymptoter. Upprita i stora drag exempel på de olika huvudtyper av kurvor, som kan förekomma.

VT 1955

1. Visa, att funktionen $y = \sqrt{x^2 + C}$ satisfierar ekvationen $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2} = y^2 - x^2$ för alla värden på konstanten C.

2. P är en rörlig punkt på parabeln $y^2 = 2px$, F är parabelns fokus. Sök och konstruera orten för mittpunkten M på sträckan FP, när P beskriver parabeln. Visa också, att tangenterna i P och M till respektive kurvor är parallella.

3. Två kongruenta hyperbler i samma plan har gemensam medelpunkt, och vinkeln mellan deras transversalaxlar är rät. Kurvorna skär varandra under 45° vinkel. Bestäm deras excentricitet.

4. För funktionen $y = f(x)$ gäller $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6x$. Bestäm funktionen så, att motsvarande kurva får en inflexionspunkt i punkten $(-1;\ 0)$ och tangenten i denna punkt blir parallell med linjen $y = 4x$. Undersök därefter kurvan med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter, samt upprita densamma. (Med $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ menas derivatan av $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ med avseende på x.)

5. I en likbent triangel är basen och höjden mot basen lika stora. I triangeln inskrives en ellips på så sätt, att dess ena axel faller utefter den nämnda höjden. Bestäm excentriciteten så, att ellipsens yta blir så stor som möjligt.

6. Bestäm avståndet r från origo O i ett rätvinkligt koordinatsystem till en punkt P på kurvan $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ som funktion av den vinkel v – räknad i positiv led – som bildas mellan positiva x-axeln och sträckan OP. Undersök, hur detta avstånd varierar, då vinkeln v ändras, och ange speciellt avståndets största och minsta värde. Upprita även kurvan med användning av de erhållna resultaten eller på annat sätt.

7. Undersök kurvan $y = ax - \sin x$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter för olika positiva värden på konstanten a, och åskådliggör i skilda koordinatsystem exempel på de olika huvudtyper av kurvor, som kan förekomma.

Augusti 1955

1. En rät linje med riktningsvinkeln 135° går genom brännpunkten till parabeln $y^2 = 4ax$ och skär parabeln i punkterna A och B. Parabeltangenterna i dessa punkter skär varandra i en punkt C. Beräkna koordinaterna för denna punkt.

2. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel med radien 6 cm. Vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln B. Bestäm fyrhörningens vinklar så, att summan av diagonalernas längder blir så stor som möjligt.

3. Två räta linjer, som är parallella med den ena asymptoten till en hyperbel, går genom var sin av hyperbelns brännpunkter. Den ena linjen skär hyperbeln i punkten P och motsvarande konjugathyperbel i punkten Q, den andra skär hyperbeln i punkten P' och konjugathyperbeln i punkten Q'. Visa, att PP' och QQ' är konjugatdiametrar.

4. Visa, att funktionen $I = I_0 \sin(ct - v)$ satisfierar ekvationen $RI + \dfrac{dI}{dt} = V_0 \sin ct$. Storheterna I_0, c, v, R, L och V_0 är konstanter, mellan vilka följande båda samband råder:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + c^2L^2}} \text{ och } \tan v = \frac{cL}{R}, \text{ där } 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

5. En triangel bildas av koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem jämte den räta linjen $x + 2y = 4$. En ellips, vars axlar är parallella med koordinataxlarna, är inskriven i triangeln. Visa, att om ellipsens yta är den största möjliga, hypotenusan delas mitt itu av motsvarande tangeringspunkt.

6. En metod att dela en given spetsig vinkel v i tre lika delar är följande. I en cirkel med medelpunkten O och radien 1 längdenhet avsättes en medelpunktsvinkel $= 2v$. Tillhörande korda AB är $2a$ längdenheter. I ett rätvinkligt koordinatsystem, där enheten på vardera axeln är 1 längdenhet, uppritas parabeln $y^2 = x$. En cirkel med medelpunkten i $(2; -a)$ går genom origo och skär parabeln dessutom i tre andra punkter, av vilka den närmast vertex belägna har y-koordinaten y_1. I den ursprungliga cirkeln avsättes därefter en korda AD med längden y_1 längdenheter. Vinkeln AOD beteckans med $2u$. Visa, att $u = \frac{1}{3}v$.

7. Undersök kurvan $y = \dfrac{a^3}{x^2} - \dfrac{a^2}{x} - a$, där a är en positiv eller negativ konstant, med avseende på asymptoter, maximi-, minimi- samt inflexionspunkter. Upprita i huvuddrag och i särskilda koordinatsystem exempel på kurvor av de olika typer, som kan förekomma. Visa därefter, att om kurvorna för alla olika värden på a är belägna i ett och samma koordinatsystem, alla kurvorna har två gemensamma tangenter. Bestäm ekvationerna för dessa, och ange tangeringspunkternas koordinater i det allmänna fallet.

HT 1955

1. I en ellips, vars storaxel AA' är parallell med x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, har ändpunkten P av en parameter sammanbundits med punkterna A och A'. Visa, att den ena av linjerna PA och PA' har en riktningskoefficient (vinkelkoefficient), som är 2 enheter större än den andras.

2. Den ena parametern i en hyperbel är även parameter i en parabel, vars vertex ligger i hyperbelns medelpunkt. Bestäm hyperbelns excentricitet.

3. Bestäm ekvationerna för de med koordinataxlarna parallella tangenterna till kurvan $x^3 + y^3 - 3xy = 3$. Kurvan behöver ej uppritas.

4. En cirkel har sin medelpunkt i origo i ett rätvinkligt koordinatsystem. Från en given punkt $A\ (a;\ 0)$ drages en rät linje, som tangerar cirkeln i punkten P. Sök och konstruera geometriska orten för mittpunkten M på sträckan AP, när cirkelns radie varierar.

5. I triangeln ABC, där vinkeln A är rät, drages medianerna BM och CN. De skär varandra i punkten P. Undersök, hur vinkeln MPC varierar, när vinkeln ABC växer från 0° till 90°, och ange särskilt det största värde, som den förstnämnda vinkeln kan anta.

6. Undersök kurvan $y = ax + \dfrac{b}{x}$, där a och b är konstanter och $b \neq 0$, med avseende på asymptoter, maximi- och minimipunkter. Utred därvid, hur kurvans utseende beror av a:s och b:s tecken. Upprita därefter i olika koordinatsystem och i stora drag de olika typer av kurvor, som kan förekomma. Visa slutligen, att en godtycklig tangent till kurvan tillsammans med asymptoterna bildar en triangel, vars yta är konstant och ange denna konstants värde.

7. Undersök kurvan $y = \dfrac{\sin x}{x}$ med avseende på asymptoter, symmetriförhållanden samt maximi- och minimipunkter och upprita kurvan i stora drag. Därvid skall speciellt anges, för vilka x-värden inom intervallet $0 < x < 2\pi$ maximi- och minimipunkter erhålles. Vidare skall kurvans utseende för x-värden i närheten av 0 utredas.

Januari 1956

1. Vilken punkt på kurvan $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$ ligger närmast den räta linjen $x - y + 5 = 0$? Bestäm också denna punkts avstånd till linjen.

2. Kantlinjen i en regelbunden tetraeder är 6 cm. På en av tetraederns höjder skall bestämmas en punkt så belägen, att summan av dess avstånd till tetraederns hörn blir så liten som möjligt. Ange punktens läge och minimisumman.

3. Bestäm ett polynom $f(x)$ av tredje graden så beskaffat, att funktionen $y = f(x)$ för $x = 0$ antar samma värde på y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ och $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ som funktionen $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin x}}$.

4. En parabel med brännpunkten på y-axeln och styrlinjen utefter x-axeln tangerar hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i ändpunkten av en parameter i hyperbeln. Bestäm hyperbelns excentricitet.

5. I ekvationen $(a-1)^2x^2 + 2(a^2-1)x - 3(a^2 - 10a + 13) = 0$ är a en konstant $\neq 1$. Bestäm de värden på a, för vilka ekvationen har reella rötter. Bestäm också gränsvärdena för ekvationens rötter, när a växer obegränsat.

6. En sträcka AB delas av punkten P i två delar med längderna a och b. Sträckan AB rör sig så, att punkterna A och B hela tiden glider utefter en sluten kurva K, som ej skär sig själv. Punkten P antas därvid beskriva en sluten kurva K', som ej skär sig själv och som ej till någon del ligger

utanför K. Man kan då visa, att den yta, som ligger mellan de båda kurvorna, alltid är πab. Visa detta för det fall, då K är en rektangel, vars sidor är $\geq a + b$.

7. Undersök kurvan $y = x^3 - 3ax^2 + a^3$, där a är en konstant, med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter, och upprita i skilda diagram de huvudtyper, som kurvan uppvisar. Bestäm därefter var för sig de geometriska orterna för kurvans maximipunkt, minimipunkt och inflexionspunkt, när konstanten a antar olika värden. Upprita slutligen i ett särskilt diagram dessa tre orter jämte några exempel på kurvan för olika värden på a, t.ex. de tidigare uppritade.

VT 1956

1. Två rektanglar har lika stora ytor. Den enas diagonaler ligger utefter asymptoterna till en viss hyperbel, och ett par motstående sidor tangerar denna hyperbel. I den andra rektangeln utgöres ett par motstående sidor av samma hyperbels parametrar. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.

2. En parabels vertex ligger i punkten $(2;\ -4)$, och dess axel är parallell med y-axeln. Parabeln tangerar linjen $x + y = 0$. Bestäm dess ekvation.

3. Bestäm konstanterna a och b i funktionen
$$y = \frac{ax^2 + 3x + b}{ax - b},$$
så att den motsvarande kurvan får asymptoterna $x + 3 = 0$ och $x - y + 4 = 0$. Upprita därefter kurvan.

4. Två punkter, A och B, på jordytan är belägna diametralt motsatt varandra på samma nordliga latitud. Visa, att för den som skall flyga från A till B blir vägen kortare, om han följer storcirkeln över nordpolen, än om han följer parallellcirkeln. Ange även, på vilken latitud A och B skall ligga, för att skillnaden i flygväg skall vara så stor som möjligt. Jordytan antages vara sfärisk. Åskådliggör grafiskt, hur den nämnda skillnaden varierar, när latituden ändras.

5. En triangel har två av sina hörn i brännpunkterna till en ellips och det tredje hörnet i en punkt P på ellipsen. Bestäm geometriska orten för den i triangeln inskrivna cirkelns medelpunkt, när P beskriver ellipsen.

6. Visa, att kurvan $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ skär x-axeln oändligt många gånger samt att det mellan två successiva skärningspunkter finnes en punkt, där kurvan tangerar endera av linjerna $y = x$ och $y = -x$. Upprita kurvan i dess huvuddrag och studera densamma, när $x \to 0$ och $x \to \pm\infty$.

7. I en sfär med medelpunkten O och radien 1 längdenhet är AB en diameter. Utefter AB lägges en koordinataxel med O som origo, så att punkten A får koordinaten $x = 1$. En rät cirkulär dubbelkon med toppvinkeln 60° lägges med axeln utefter AB, så att dubbelkonens spets faller i en punkt P med koordinaten x på AB eller dess förlängning. Uttryck som funktion av x den del av den koniska ytan, som faller inom sfären. Studera denna funktion, och bestäm speciellt dess eventuella maxima och minima. Upprita slutligen den motsvarande kurvan samt undersök funktionen och dess kurva närmare för värdena $x = \pm 1$.

Augusti 1956

1. Genom ekvationen $x = \cos^2 y$ bestämmes y som funktion av x. Ange $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ som funktion av enbart y.

2. En ellips med storaxeln utefter x- eller y-axeln har ekvationen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Axlarnas längder förhåller sig som $2 : 3$. En diameter går genom punkten $(3;\ 2)$. Bestäm ekvationen för dess konjugatdiameter.

3. Till en parabel är två mot varandra vinkelräta tangenter dragna. De skäres av en tredje tangent i punkterna P och Q, vilka sammanbindes med parabelns brännpunkt F. Visa, att vinkeln PFQ är rät.

4. En bensinbehållare av 4 mm tjock plåt har formen av en rät cirkulär cylinder med basradien 1 m och höjden 4 m (inre mått). Den ligger på ett vågrätt underlag och innehåller 2 m^3 bensin. De angivna måtten betraktas som exakta. Bestäm på 1 mm när den fria vätskeytans höjd över underlaget.

5. Kurvan $4x^2 - 3xy - 28x + 12y + 84 = 0$ är en hyperbel. Upprita den i stora drag och bestäm dess excentricitet.

6. I parabeln $y^2 = 9x$ drages en korda med riktningskoefficienten (vinkelkoefficienten) 1. Sök och konstruera orten för en punkt, som delar kordan i förhållandet $1 : 2$.

7. Undersök kurvan $x^3 - x^2y + ax + y = 0$ med avseende på asymptoter, maximi- och minimipunkter, samt bestäm därigenom kurvans huvudtyper, då a antar olika värden. Upprita också i stora drag ett exempel på var och en av dessa.

HT 1956

1. Konstruera kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ med angivande av eventuella maximi-, minimi- och inflexionspunkter samt asymptoter.

2. Funktionen $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{c + x}}$ är given. Visa, att likheten

$$3x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + y^4 = 0$$

gäller oberoende av värdet på konstanten c.

3. En ellips och en cirkel har samma medelpunkt och lika stora ytor. Kurvornas gemensamma tangenter bildar en romb, vars spetsiga vinklar är 60°. Beräkna ellipsens excentricitet.

4. AB är en diameter i en cirkel med medelpunkten O, CO en mot diametern vinkelrät radie. P är en rörlig punkt på cirkelns periferi och PQ normalen mot AB. P sammanbindes med O och C med Q. Sök orten för skärningspunkten mellan OP och CQ eller deras förlängningar.

5. En funktion T är definierad på följande sätt:

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2,\ \text{där } v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

och

$$x = A\sin wt,\ \ y = A\sqrt{2}\sin(wt + \tfrac{1}{3}\pi).$$

Storheterna m, A och w är positiva konstanter. Bestäm de x- och y-värden, för vilka funktionen T antar ett maximivärde.

6. A är en godtycklig punkt på en given hyperbel, B en punkt på konjugathyperbeln, så belägen att sammanbindningslinjen AB är parallell med den ena asymptoten. På denna asymptot är C en godtycklig punkt. Bevisa, att ytan av triangeln ABC är konstant.

7. Till kurvan $y = x^3 - 2x$ drages två parallella tangenter. Bestäm avståndet mellan dessa som funktion av abskissan för den ena tangeringspunkten P, och undersök denna funktion med avseende på maxima och minima. Åskådliggör slutligen i ett särskilt koordinatsystem, hur det nämnda avståndet varierar, när P beskriver kurvan.

Januari 1957

1. En cirkel går genom origo och genom ändpunkterna av parametern i parabeln $y^2 = 4ax$. Under vilken vinkel skär kurvorna varandra i dessa senare punkter?

2. AB är en diameter i en cirkel med radien r. En punkt rör sig längs cirkelperiferin från punkten A till en punkt C utan att passera punkten B och därifrån utefter den mot AB vinkelräta kordan CD till punkten D. Bestäm avståndet från punkten A till kordan CD, när den av punkten genomlöpta vägsträckan är längst.

3. Undersök hyperbeln $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$ med avseende på asymptoter, maximi- och minimipunkter, medelpunkt och excentricitet. Upprita kurvan.

4. Bevisa, att en brännpunktsradie i en ellips alltid är större än fjärdedelen av parametern.

5. Undersök funktionen $f(x) = x^2 - \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2} - \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2}$ för olika värden på x, upprita kurvan $y = f(x)$ och ange eventuella maximi- och minimipunkter på denna.

6. I ett rätvinkligt koordinatsystem är de båda räta linjerna $y = kx$ och $y = -kx$ givna. Origo O och en punkt P är motstående hörn i en parallellogram med två sidor längs de givna räta linjerna och med den konstanta ytan a^2. Sök ekvationen för orten för punkten P, och upprita ortkurvan i stora drag.

7. Normalen i en punkt P på parabeln $y^2 = x$ skär parabeln i ytterligare en punkt Q. Bestäm längden av kordan PQ som funktion av normalens riktningskoefficient (vinkelkoefficient), och upprita motsvarande kurva med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter. Bestäm även kurvans asymptoter.

VT 1957

1. En korda i parabeln $y^2 = 4x$ går genom punkten $(6;\ 4)$ och halveras av linjen $2x + y = 10$. Bestäm kordans ekvation.

2. Genom sambandet $\tan y = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$, där $x \neq 0$ och $-\pi/2 < y < \pi/2$, bestämmes y som en deriverbar funktion av x. Bevisa, att

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2(1 + x^2)}.$$

3. I en triangel är en sida 2 cm och en annan sidas projektion på den tredje 7 cm. Bestäm det största värde, som triangelns yta kan antaga.

4. En cirkel har den ena parametern i en hyperbel till diameter och tangerar konjugathyperbeln till den förra. Bestäm vinkeln mellan hyperbelns asymptoter.

5. I en triangel ABC, där $AB = AC$, är punkten D projektionen av hörnet B på sidan AC. Sök och konstruera geometriska orten för mittpunkten på sidan AB, om sträckan CD är given till längd och läge.

6. Ett sfäriskt segment har den konstanta volymen $\frac{4\pi}{3}$ cm^3. En kon har segmentets plana begränsningsyta till basyta och spetsen i medelpunkten av den sfär, varav segmentet är en del. Ange först, vilka värden segmentets höjd kan anta. Uttryck sedan konens volym som funktion av segmentets höjd och undersök, hur konens volym varierar, då segmentets höjd antar olika värden. Åskådliggör slutligen detta grafiskt med angivande av eventuella maxima och minima.

7. Undersök kurvan $y = a\cos x + \frac{1}{\cos x}$ med avseende på asymptoter samt maximi- och minimipunkter för olika värden på konstanten a. Upprita i stora drag exempel på de olika typer, som kurvan uppvisar.

Augusti 1957

1. I funktionen $y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$ är a, b och c konstanter.Visa att $3y^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2a$.

2. Sök ekvationen för en rät linje, som halverar kordor med samma riktning i parablerna $y^2 = 6x$ och $y^2 + 4y + 3x + 11 = 0$.

3. Undersök kurvan $y = \sin 2x + 2\sin x$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter samt upprita den i dess huvuddrag.

4. Den räta linjen $2x - y - 3 = 0$ är normal till en ellips med axlarna längs koordinataxlarna och med excentriciteten $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Bestäm ellipsens ekvation i det ena av de båda fall, som är möjliga.

5. En punkt P på den räta linjen $y = x$ sammanbindes med punkterna A $(6;\ 2)$ och B $(-1;\ 3)$. Undersök och åskådliggör grafiskt med angivande av eventuella maxima och minima, hur förhållandet mellan sträckorna PA och PB varierar, när punkten P genomlöper den nämnda räta linjen.

6. En punkt P på parabeln $y^2 = 4x$ förenas med parabelns fokus F och vertex O. Höjderna i triangeln FOP skär varandra i punkten R. Sök och konstruera orten för R, då P genomlöper kurvan, och ange eventuella maximi- och minimipunkter på ortkurvan. Bestäm även ekvationerna för tangenterna i kurvans skärningspunkter med x-axeln.

7. Kring en rätvinklig parallellepiped med kantlinjerna 1 cm, 4 cm och 8 cm omskrives ett variabelt klotsegment, så att en av de största sidoytorna ligger i segmentets plana yta. Uttryck segmentets buktiga yta som funktion av dess höjd, bestäm de värden, som höjden kan anta, och åskådliggör grafiskt, hur funktionen varierar. Ange särskilt eventuella maximi- och minimipunkter för funktionen.

HT 1957

1. En hyperbel har brännpunkterna i två motsatta hörn av en regelbunden sexhörning och går genom de övriga hörnen. Bestäm excentriciteten.

2. Visa, att funktionen $y = \sqrt[3]{a - bx^3}$, där a och b är konstanter, satisfierar differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cdot \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}\right).$$

3. Undersök kurvan $y = \sin 2x + 2\cos x$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter samt upprita den i dess huvuddrag.

4. En cirkel går genom en parabels brännpunkt, har sin medelpunkt på axeln och tangerar parabeln i två skilda punkter. Bestäm förhållandet mellan cirkelns diameter och parabelns parameter.

5. En ellips har sina brännpunkter i punkterna $(c;\ 0)$ och $(-c;\ 0)$, där c är en konstant. Ellipsen skär positiva x-axeln i punkten A, positiva y-axeln i punkten B och negativa y-axeln i punkten B'. Sök och konstruera geometriska orten för skärningspunkten mellan tangenten i B och förlängningen av kordan $B'A$.

6. Undersök, hur antalet lösningar till ekvationen $\cos x = kx$ inom intervallet $0 < x \leq \pi$ beror av värdet på konstanten k. Ändpunkterna för de olika k-intervallen skall bestämmas med tre säkra decimaler medelst grafisk metod eller genom systematisk prövning.

7. En likbent triangel har tyngdpunkten i origo, spetsen på positiva x-axeln och basens ena ändpunkt på den räta linjen $y = x + 2$. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur triangelns halva omkrets varierar som funktion av abskissan (a) för triangelns spets. Undersök särskilt förhållandena i närheten av värdet $a = 4$.