Matematisk problemsamling

2-betygskursen

Matematisk problemsamling

2-BETYGSKURSEN

ANDRA OMARBETADE UPPLAGAN

LUND 1942
LUNDS STUDENTKÅRS INTRESSEBYRÅ

LUND 1942

LORENTZ LARSSONS TRYCKERI

FÖRORD

Föreliggande helt nya exempelsamling utgör en sammanställning av seminarie- och tentamensproblem, som givits vid matematikundervisningen under senare år vid Lunds universitet.

Behovet av en lämplig problemsamling i matematik är mycket stort, vilket bland annat framgår i Filosofiska Fakultetens remissyttrande över 1936 års Lärarutbildningssakkunnigas betänkande, i vilket vad matematik beträffar "vikten av att det gamla önskemålet om utgivande av lämpliga exempelsamlingar förverkligas". Föreliggande problemsamling omfattar problem från samtliga delar av den nuvarande 2-betygskursen. Dock är antalet ingående differentialekvationer något mindre än det, som skulle svara mot ifrågavarande del av kursen, beroende på att i ett redan förefintligt kompendium, Differentialekvationer, dylika problem ingå.

Föreliggande samling, som genomsetts av Prof. *M. Riesz*, till vilken härmed framföres ett tack för många värdefulla råd och anvisningar, närmast utarbetad med hänsyn till förhållandena vid härvarande universitet, torde även kunna bli till gagn för studerande vid andra högskolor.

Redigeringen och bearbetningen av denna samling har omhänderhafts av fil. mag. *Carl-Erik Fröberg*, fil. mag. *Malte Johansson*, fil. mag. *Eve Staffansson* och fil. lic. *Börje Svensson*.

Lund i november 1939.

FÖRORD TILL ANDRA UPPLAGAN

Andra upplagan av Matematisk problemsamling har för att tillgodose olika önskemål och krav kompletterats med determinantproblem och geometriska uppgifter.
Dessutom ha i några fall rättelser och tillägg till tidigare problem gjorts.
Till prof. *M. Riesz* och fil. lic *N. E. Fremberg*, som välvilligt genomsett andra upplagan, framföres här ett varmt tack för alla värdefulla anvisningar.
Arbetet med andra uplagan har omhänderhafts av *Carl-Erik Fröberg*, fil. lic. *Eve Staffansson* och docent *Börje Svensson*.

Lund i april 1942.

Innehåll

Problemen

Algebra

1. Angiv real och imaginärvärdet av $\log(1+z)$, där $z = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

2. Visa, att

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \geq n^2,$$

då $x_1, x_2, \ldots, x_n$ betyda n godtyckliga, reella, positiva tal.

3. Om $|a_n| \leq 1$ för alla n, så kan ej ekvationen $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = 0$ ha någon rot, vars absoluta belopp är mindre än $\frac{1}{2}$; en rot vars absoluta belopp $= \frac{1}{2}$ kan endast finnas, om $a_n = -e^{ni\phi}$, i vilket fall roten är $\frac{1}{2}e^{-i\phi}$.

4. x, y och z äro punkter i det komplexa talplanet. Visa, att det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att dessa punkter skola vara hörnpunkter i en liksidig triangel är:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

5. z betyder en komplex variabel. Visa, att om denna variabel beskriver cirklar $|z| = a$, $a > 1$, så beskriver $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ konfokala ellipser med halvaxlarna $\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ och $\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$. Vad blir motsvarande kurvor, om $0 < a < 1$?

6. Om (a, b, c, d) äro fyra punkter i det komplexa talplanet, vilka ligga på en cirkel, så är dubbelförhållandet $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ reellt. Bevisa även satsens omvändning.

7. Rötterna till $P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$ utprickas i det komplexa talplanet. Vad är villkoret för att de bilda en parallellogram? Visa, att när det inträffar, så ligga rötterna till $P'(z) = 0$ i rät linje, och en av dem sammanfaller med parallellogrammens medelpunkt.

8. Angiv de nödvändiga och tillräckliga villkoren för att ekvationen med reella koefficienter $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ har två komplexa och en reell rot, vilka alla skola ligga i rät linje i det komplexa planet.

9. Uppdela $x^{2n} - 2x^n \cos n\phi + 1$ i reella faktorer av andra graden.

10. I ekvationen $x^3 + px + q = 0$ betraktas p och q som rätvinkliga koordinater för en punkt i ett plan. Konstruera begränsningslinjerna för det område, i vilket punkten (p, q) måste befinna sig, för att rötterna skola vara reella och en och endast en av dem belägen mellan 0 och 1.

11. Sök de nödvändiga och tillräckliga villkoren, att andragradsekvationen i u: $u^2 - 2xu + y = 0$ skall ha reella rötter, belägna mellan -1 och $+1$. Om x och y tydas som rätvinkliga koordinater, tolka villkoren geometriskt.

12. Om s_r betecknar summan av de r:te digniteterna av rötterna till ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, vars alla rötter äro belägna mellan -1 och $+1$, och om $S_m = s_1 + s_2 + \ldots + s_m$, så skall visas, att:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = -\frac{a + 2b + 3c}{1 + a + b + c}.$$

13. Visa att $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1} < e\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)$, då $x > 0$.

14. Beräkna symmetriska funktionen $\sum x_1^3 x_2^3$, då $x_1, x_2, \ldots, x_8$ äro rötter till ekvationen $x^8 + px^3 + q = 0$.

15. Vad är nödvändiga och tillräckliga villkoret för att ekvationen $x^4 + 4ax + 3b = 0$ skall ha en dubbelrot? Rot av högre multiplicitet?

16. Ekvationen $x^5 - 209x + 56 = 0$ har två rötter vilkas produkt är 1. Sök dessa rötter.

17. Sök den ekvation, vars rötter äro kvadraterna på ekvationens $x^3 - 6x + 3 = 0$ rotdifferenser.

18. För vilka positiva hela n har ekvationen $(x + 1)^{n+1} + x^{n+1} + 1 = 0$ multipla rötter? Sök i så fall dessa rötter och angiv graden av deras multiplicitet.

19. Sättes för varje positivt n

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^a e^x) = x^{a-n} e^x f_n(x),$$

där a är en godtycklig konstant, så skall man söka polynomet $f_n(x)$ och visa formlerna: $f_n'(x) = n f_{n-1}(x)$ och $f_n(x) = (x + a - n + 1) \cdot f_{n-1}(x) + (n - 1)x \cdot f_{n-2}(x)$. Antages vidare a reell och $r - 1 < a < r$, där r är positivt, helt tal, skall man visa, att ekvationen $f_n(x) = 0$ har r negativa rötter för $r \leq n$ och n negativa rötter för $r \geq n$.

20. Har ekvationen $8x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 11x - 2 = 0$ lika rötter eller ej? Lös ekvationen.

21. Bilda den tredjegradsekvation med heltalskoefficienter och högsta koefficienten = 1, som har rötterna $2\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{7}$ och $2\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

22. Visa att ekvationen $x^4 + \frac{3}{2}ax^2 + bx + c = 0$ icke kan ha fyra reella rötter, om $a^3 + b^2 > 0$.

23. Visa, att ekvationen

$$\int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}$$

har en och endast en positiv rot, och visa, att den ligger mellan 1 och 2.

24. Rötterna till ekvationen $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ äro α, β, γ och δ. Bilda en ny ekvation, vars rötter äro kombinationer av formen

$$\alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

25. Beräkna på $0,01$ när rötterna till ekvationen

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3}{x+4}.$$

26. Bevisa, att ekvationen

$$x^n + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

har åtminstone två imaginära rötter, om

$$8(n-2)^2a_1^3 + 9n(n-1)a_2^2 > 0.$$

27. Av ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c äro hela tal, bildas den ekvation $y^3 + a_1y^2 + b_1y + c_1 = 0$, vars rötter äro kuberna på den förstas rötter. Bevisa, att a och a_1, b och b_1 samt c och c_1 ge samma rest vid division med 3.

28. Visa, att tangens och cotangens för halva vinklarna i en triangel äro rötter till resp.:

$$sx^3 - (4R + r)x^2 + sx - r = 0$$
$$rx^3 - sx^2 + (4R + r)x - s = 0$$

där s = triangelns halva omkrets samt R och r är resp. omskrivna och inskrivna cirkelns radie.

29. Om $f(x)$ är ett polynom med enbart reella och enkla nollställen, så har $[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ intet reellt nollställe.

30. Låt ρ_1, ρ_2 och ρ_3, vara rötter till ekvationen:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Vilka villkor skola koefficienterna, som antagas reella, vara underkastade, för att det skall givas en triangel, vars sidor äro ρ_1, ρ_2 och ρ_3?

31. Visa, att ekvationen $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0$ icke kan ha två reella rötter.

32. Sök villkoren för att $\log x - ax - b = 0$ har ingen reell rot, en reell rot eller flera reella rötter.

33. Bevisa, att ekvationen $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{n} = 0$ har en reell rot, om n är udda, och ingen om n är jämnt.

34. Utred huru antalet reella rötter till ekvationen

$$6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x^2 + k = 0$$

varierar med k.

35. Antag, att b är reellt och de $2n$ reella talen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ bilda en ständigt växande eller ständigt avtagande talföljd. Visa, att ekvationen

$$(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{2n-1}) + b(x - a_2)(x - a_4)\ldots(x - a_{2n}) = 0$$

har alla sina rötter reella och olika.

36. Sök nödvändiga och tillräckliga villkoret, att produkten av två rötter till en fjärdegradsekvation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

blir lika med produkten av de två andra.

37. $f(x) = 0$ är en algebraisk ekvation, där samtliga koefficienter äro heltal. Man vet att $f(0)$ och $f(1)$ båda äro udda tal. Visa, att ekvationen icke har några heltalslösningar.

38. En determinant kallas skevsymmetrisk, om man alltid har $a_{rs} = -a_{sr}$. Visa, att en skevsymmetrisk determinant av udda ordning alltid har värdet noll.

39. En determinant av ordningen $n + 1$ har alla elementen $= 1$ utom diagonalelementen, som kan skrivas $1, 1 + a_1, 1 + a_2, \ldots, 1 + a_n$. Visa, att determinantens värde $= a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$.

40. Bestäm värdet av den n-radiga determinanten:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

41. Vilka x-värden göra determinanten

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 2x^3 & 3x^3 \\ 3x^3 + 1 & 3x^3 + 2 & 3x^3 + 3 \end{vmatrix}$$

till maximum eller minimum?

42. Variablerna $\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_n$, $\eta_1\ \eta_2\ \dots\ \eta_n$, $\zeta_1\ \zeta_2\ \dots\ \zeta_n$ bero av $x_1\ x_2\ \dots\ x_n$, $y_1\ y_2\ \dots\ y_n$, $z_1\ z_2\ \dots\ z_n$ enligt:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \textstyle\sum_{r=1}^{n} m_r x_r \\ \eta_1 &= \textstyle\sum_{r=1}^{n} m_r y_r \\ \zeta_1 &= \textstyle\sum_{r=1}^{n} m_r z_r \end{aligned}\right\} \quad \text{med } \sum_{k=1}^{n} m_k = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= x_k - x_1 \\ \eta_k &= y_k - y_1 \\ \zeta_k &= z_k - z_1 \end{aligned}\right\} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Bestäm funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_n, \eta_1\ \eta_2\ \dots\ \eta_n, \zeta_1\ \zeta_2\ \dots\ \zeta_n)}{\partial(x_1\ x_2\ \dots\ x_n, y_1\ y_2\ \dots\ y_n, z_1\ z_2\ \dots\ z_n)}$$

43. Ett antal föremål äro givna. Bland dessa finnas minst två med olika färg och minst två med olika form. Visa, att det finns två föremål med olika färg och form.

44. Bestäm det värde på a, för vilket ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 3x + 4y + 2z = a - 3 \\ -4x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

har en lösning, och angiv för detta a-värde den fullständiga lösningen.

45. Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

46. $$\phi(x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & a + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & r_2 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & b + x & r_3 + x & \dots & a + x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b + x & b + x & b + x & \dots & r_n + a \end{vmatrix}.$$

Visa, att $\phi(x)$ är en lineär funktion av x. Visa också, att

$$\phi(0) = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{a - b},$$

där $f(x) = (r_1 - x)(r_2 - x) \dots (r_n - x)$.

47. Bestäm determinanten av n:te ordningen, där $a_{ik} = \dfrac{1}{i + k}$.

48. Bevisa, att funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(a\Delta, b\Delta, c\Delta, d\Delta)}{\partial(a,b,c,d)} = 3\Delta^4,$$

där $\Delta = ad - bc$.

49. Visa, att $\lim_{n\to\infty} \cos a \cdot \cos\dfrac{a}{2} \dots \cos\dfrac{a}{2^n} = \dfrac{\sin 2a}{2a}$.

50. a är ett positivt tal. Bevisa att

$$\frac{1}{a+1} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\Big)$$

och härav att: $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n$ går mot ett gränsvärde som är $> \dfrac{1}{2}$ och < 1.

51. Visa att

$$\sin x + 2\sin 2x + \cdots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$

52. Visa, att om $f(n)$ är en positiv funktionen av n och $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ existerar och $= p$, så gäller även att $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = p$. Härled härur $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

53. a och b är positiva tal. Sätt $a_1 = \sqrt{ab}$; $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$; $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$; $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ o.s.v. Visa att a_n och b_n gå mot ett gränsvärde.

54. Visa, att om sex primtal följa på varandra i aritmetisk progression, så kan differensen ej vara mindre än 30. Exempel: 7, 37, 67, 97, 127, 157.

55. $a_1, a_2, \dots, a_k$ är positiva tal. Visa, att $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\limits_{1\le j\le k} a_j$ (det största av talen $a_1, a_2, \dots, a_k$).

56. Visa, att

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots \frac{1}{(m+n)^2} + \cdots < \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$$

där $m > 0$. Även trapetsuppskattningen användes.

57. x_1 och x_2 äro reella eller komplexa tal, som uppfylla relationen $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$. Sök max. värdet av absoluta beloppet av $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2$.

Serier

58. En series allmänna term är $u_n = \dfrac{1}{n}\log\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$. Är serien konvergent eller divergent?

59. Är serien $\sum_{1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}$ konvergent eller divergent?

60. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}$ konvergent eller divergent?

61. Är serien $\sum_{1}^{\infty} \left(1-\cos \frac{a}{n}\right)$ konvergent eller divergent?

62. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ konvergent eller divergent?

63. För vilka positiva värden på k konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}\right) \cdot n \log n}?$$

64. Äro följande serier konvergenta eller divergenta?

a) $\sum \frac{1}{(logn)^{\log n}}$

b) $\sum \frac{1}{(\log n)^{\log \log n}}$

65. För vilka värden på s konvergera serierna

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+1}{n}\right)^s$ och

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\log \frac{n+1}{n}\right)^s$?

66. För vilka positiva x-värden är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{x}{n^2}$ konvergent?

67. När är serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergent, då

$$u_n = \frac{n^\alpha - \sqrt{n^{2\alpha} - n\alpha}}{n^\alpha - \sqrt[3]{n^{3\alpha} - n\beta}},$$

förutsatt att $0 < \beta < 3\alpha$.

68. Bestäm när serierna $s_1 = \sum_{1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^\beta$ och $s_2 = \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\beta$ äro konvergenta och divergenta.

69. Är den serie vars allmänna term är $a^{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\ldots+\frac{1}{b+n}\right)}$ konvergent eller divergent?

70. När konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \log n}{n(n+1)}$?

71. För vilka x-värden konvergerar serien $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 2^n}{n^{7/3}}$?

72. En series allmänna term är $u_n = \frac{(2n)! \cdot x^n}{(n!)^2}$. Undersök konvergens och divergens.

73. För vilka värden på x konvergerar den oändliga serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot s_n, \quad \text{där } s_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}?$$

74. Undersök för vilka x-värden serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot e^{-n^2 a} \cdot \frac{1}{n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

konvergerar, då a är ett positivt eller negativt tal eller 0.

75. För vilka reella eller komplexa z konvergerar serien

$$1 - \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+z^2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z^2} + \ldots$$

76. Visa, att om $\frac{1}{1-3x+3x^2}$ utvecklas i stigande potensserie, så fattas i denna oändligt många termer, och angiv vilka.

77. Utveckla $\log\sqrt{1-2x\cos\phi + x^2}$ i potensserie av x.

78. Visa att $y = (\arcsin x)^2$ uppfyller ekvationen $y''(1-x^2) = 2 + xy$ och utveckla med hjälp av detta i Mac Laurins serie.

79. Sök summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

80. Sök värdet av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an+b}{n^3+6n^2+11n+6}$.

81. Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(9n^2-1)}$.

82. Beräkna värdet av summan för $0 < t < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+9n+5)t^n}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} \quad \text{och}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+9n+5)}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$$

83. Sök med användning av formeln

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}\Big(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\Big).$$

84. När konvergerar och divergerar serien

$$f(x) = \frac{1}{1}\cdot x - \Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\Big)\cdot x^2 + \Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big)\cdot x^3 - \ldots$$

Sök dess summa, dvs. funktionen $f(x)$.

85. Beräkna $s = \frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{15}}{15} + \ldots$ där $0 < t < 1$, och beräkna speciellt $s_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \ldots$.

86. Sök de positiva värden på r för vilka serien $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$ är konvergent, och beräkna seriens summa.

87. Bevisa, att serien

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

är konvergent för alla reella värden på x.

88. Beräkna

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\Big]$.

89. Sök

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[1 + \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \ldots + \frac{1}{1+(\frac{n-1}{n})^2}\Big].$$

90. Bevisa att $\lim\limits_{a\to 0} a \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1-a} = 1$.

91. Visa att serien

$$\log\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)+\log\left(1-\frac{a^2}{3^2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)+\ldots$$

är konvergent och ange dess värde för $a=1$.

92. Visa att

$$\frac{x^{2n}-a^{2n}}{x^2-a^2}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{n}+a^2\right).$$

93. När är $\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\beta}\right)$ konvergent?

94. Är den oändliga produkten $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}}$ konvergent eller divergent?

95. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ äro positiva tal. Visa, att om serien $\sum a_n$ konvergerar, så konvergerar även serien $\sum \log(1+a_n)$ och omvänt.

96. Visa, att om $a_n>0$ äro serierna $\sum a_n$ och $\sum \frac{e^{a_n}-1}{1+a_n}$ samtidigt konvergenta eller divergenta.

97. Bevisa, att om $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ är en positiv, avtagande följd och $\lim_{n\to\infty} u_n=0$, så äro serierna:

$$\begin{aligned}&u_1-\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1+u_2+u_3}{3}-\ldots \quad \text{och}\\&u_1-\frac{u_1+u_3}{3}+\frac{u_1+u_3+u_5}{5}-\ldots \quad \text{konvergenta.}\end{aligned}$$

98. I den harmoniska serien ändrar man termernas tecken så, att på p positiva termer följa q negativa. Blir den nya serien konvergent eller divergent?

99. Bevisa formeln

$$a_n=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

och beräkna

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

samt visa, att det går likformigt mot 0, då $n\to\infty$, och då $\delta\le x\le 2\pi-\delta$, där δ är ett positivt tal, hur litet som helst.

Integralkalkyl

100. Beräkna $\int(2x-5)\sqrt{x^2+3x+2}\,dx$.

101. Beräkna $\int_1^5 \frac{(x+1)}{x\sqrt{6x-5-x^2}}\,dx$.

102. Beräkna $\int 0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$.

103. Beräkna $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+r^2-2r\cos x}$.

104. Beräkna $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+ib\cos x}$ och $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+ib\cos x+ic\sin x}$.

105. Visa, att $\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1+x^2} = -\int_1^\infty \frac{\log x\,dx}{1+x^2}$ och $\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{1+x^2} = 0$.

Härled härav värdet av $\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{a^2+x^2}$.

106. Bestäm $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+x^4+x^6}$.

107. Beräkna $\int_0^1 \frac{x\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

108. Beräkna $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x-v)}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx; \quad 0 < v < \frac{\pi}{4}$.

109. Beräkna den obestämda integralen $\int \frac{dx}{\tan x - \tan\alpha}$ och bestäm principalvärdet

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{\alpha-\delta} + \int\limits_{\alpha+\delta}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\tan x - \tan\alpha}.$$

110. Som bekant är: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Visa detta, och härled härur värdet på följande integraler:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx.$$

111. Beräkna $\int_0^\infty \frac{\sin a^2 x \cos b^2 x}{x}\,dx$.

112. Visa, att för $a > 0$, $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ och härav att:

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\cdot\pi^{1/2}.$$

Angiv även värdet för $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$.

113. Man vet att $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Beräkna även

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2-2bx}\,dx.$$

114. Visa att: $\lim_{h\to 0}\int_{-1}^{+1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx = \pi\cdot f(0)$, om $f(x)$ är kontinuerlig.

115. Visa genom variabeltransformation riktigheten av likheten:

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{2-x^2}.$$

Vilka serieutvecklingar få vi av den givna likheten, om vi före integrationen utveckla i serie?

116. Visa, att om r och t äro rötter till ekv. $\tan x = ax$, som varken äro lika eller lika med motsatt tecken, så är:

$$\int_0^1 \sin rx \sin tx\,dx = 0.$$

117. Uttrycket $\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = L_n(x)$ är ett polynom av n:te graden. Visa genom partiell integration, att

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n()\cdot L_m(x)\,dx = 0$$

för $n \neq m$, samt beräkna denna integral för $n = m$.

118. S är en kvadrat i xy-planet med sidan $2a$. Från $(x,\ y)$ fällas perpendiklar mot kvadratens sidor. Den största av dessa betecknas med $F(x,y)$, den minsta med $f(x,y)$. Beräkna

$$\iint_S \sqrt{F(x,y)\cdot f(x,y)}\,dxdy.$$

119. f är en funktion av $\sqrt{x^2+y^2}$. Beräkna

$$\iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy,$$

utsträckt över $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$.

120. Beräkna dubbelintegralen $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\left(y+\frac{x^2}{y}\right)}\,dxdy$.

121. Beräkna $\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha x+\beta y)^2-(\gamma x+\delta y)^2}\,dxdy$, då

1) $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ och då

2) $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

α, β, γ, δ äro reella tal.

122. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy.$$

Vad är villkoret för konvergens?

123. En kvadrat med sidan a skäres av en cirkel, som har sin medelpunkt i ett av kvadratens hörn och radien $\frac{1}{2}a$. Den utanför cirkeln belägna delen av kvadraten har i varje punkt tätheten = avståndet till nämnda hörn. Bestäm massan.

124. Beräkna $\displaystyle\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

125. Beräkna $\iint x^3y^7\cdot\sqrt{1-x^4-y^4}\,dx\,dy$ utsträckt över området $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x^4+y^4 \leq 1$.

126. Bevisa, att $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}dy$ är en exakt differential och beräkna kurvintegralen längs cirkelbågen med origo som medelpunkt från $(1,\,0)$ till $(0,\,1)$.

127. Beräkna $\displaystyle\int \left[\log(x^2+y^2)\,dx + 2\arctan\frac{x}{y}\,dy\right]$ från $(1,\,0)$ till $(0,\,1)$ längs den räta linjen. Diskutera olika vägar!

128. Beräkna linjeintegralen

$$\int \left[(e^{x+y}-y)\,dx + (e^{x+y}-1)\,dy\right]$$

a) längs x-axeln från 0 till 1;

b) längs halvcirkelbågen från origo till $(1,\,0)$.

Tillämpningar på integraler

129. En funktion $\phi(x)$ är definierad på följande sätt: Inom intervallet $(0,\,\sqrt{2}-1)$ är $\phi(x) = \int_0^{\sqrt{2x}}(x^2+y^2)^{4/3}\,dy$ och inom intervallet $(\sqrt{2}-1,\,1)$ är $\phi(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{4/3}\,dy$. Avgör om $\phi(x)$ är kontinuerlig och deriverbar överallt inom intervallet $(0,1)$.

130. Visa, att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

131. För vilka värden på a är $\int_0^\infty x^a \sin x \, dx$ konvergent respektive absolut konvergent?

132. För vilka värden på a äro $\int_0^\infty x^a \sin x^2 \, dx$ och $\int_0^\infty x^a \cos x^2 \, dx$ konvergenta?

133. För vilka reella värden på α och β konvergerar integralen

$$\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta) \, dx?$$

134. För vilka rella värden på a är $\int_0^\infty \sin x \arctan(x^a) \, dx$ konvergent respektive absolut konvergent?

135. För vilka värden på a och b är $\int_0^\pi (\sin x)^a (1 - \cos x)^b \, dx$ konvergent? Representera de erhållna villkoren geometriskt, i det a och b betraktas som rätvinkliga koordinater av en punkt.

136. Visa, att om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig, så är

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{\int_a^b [f(x)]^{2n} \, dx} = \text{ maximivärdet av } f(x) \text{ i intervallet } (a, b).$$

137. Beräkna totala längden av kurvan $4(x^2 + y^2) - a^2 = 3a^{4/3} y^{2/3}$.

138. Ekvationen $f(x) = x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x = 0$ har rationella rötter. Beräkna ytan mellan kurvorna: $y = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ och $\dfrac{6}{x - \frac{3}{2}}$ till höger om linjen $x = 3$.

139. I ett plant rätvinkligt koordinatsystem har man givit cirkeln $x^2 + y^2 = ay$ och linjen $y = a$. Genom origo A drages en rät linje ABC, som skär cirkeln i B och den räta linjen i C. På linjen avsättes punkten M, så att $MC = AB$. Sök i polära och rätvinkliga koordinater orten för M, då AC vrider sig kring A. Sök ytan mellan denna kurva och dess asymptot och ytan av de delar, vari kurvan delar cirkeln.

140. Beräkna volymen innesluten mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och den mot xy-planet vinkelräta cylinder, som till bas har lemniskatan $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Beräkna även den inom cylindern fallande delen av sfärens yta.

141. Beräkna volymen av den kropp, som begränsas av ytan $x^2 + y^2 = 5z$ och planet $x + y + z = 1$.

142. Bestäm volymen och den totala ytan av den kropp, som begränsas av ytan $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$ samt av planen $x = 0$ och $x = \log 2$.

143. Beräkna den gemensamma volymen, som inneslutes av ytorna:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{och} \quad \frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1.$$

144. Bestäm volym och yta av den kropp , som begränsas av de båda paraboloiderna $y^2+z^2=2p(x+aq)$ och $y^2+z^2=-2q(x-ap)$.

145. Sök volymen, som begränsas av ytan $10x^2+5yz-\frac{1}{4}z^2+12xy-2xz-yz=0$ och planet $z=2x+2y+6$.

146. Beräkna den volym, som inneslutes mellan de tre ytorna $z=0$, $z=\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}$ och $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

147. Beräkna de delar i vilka ytan $x^2+y^2+z^2-2x-4y=20$ delas av ytan $z^2-2xy+4x+2y-4=0$.

148. I en parabel $y^2=2px$ drages en korda $x=y$. Den yta, som begränsas av parabeln och kordan, roterar kring kordan. Bestäm volymen.

149. Sök volymen av de delar, vari den av ytan $2x^2+y^2+z^2-2xy+2x-6y+12=0$ begränsade kroppen delas av ett plan vinkelrätt på mitten av det kortaste avståndet från ytans centrum ut till ytan.

150. Axlarna till två lika cirkulära cylindrar skära varandra under en vinkel α; beräkna den gemensamma volymen.

151. En rät cirkulär kon med basradien r och höjden h skäres av ett plan, som skär bascirkeln efter en diameter och är parallell med ett av konens tangentplan. Beräkna de uppkomna volymerna.

152. En yta alstras av en variabel ellips. Ellipsen har sitt centrum i origo (rätvinkliga koordinater) och sin konstanta storaxel $2a$ på z-axeln samt skär ständigt cirkeln $z=0$, $x^2+y^2=ax$. Sök ytans ekvation och storleken av den volym den innesluter.

153. Beräkna ytan av skärningsellipsen mellan paraboloiden $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ och planet $z=Ax+By+C$ då $C>0$.

154. En sfär, som tangerar xy-planet i origo, skäres av en elliptisk kon med z-axeln till axel och spets i origo. Beräkna ytinnehållet av den innanför konen belägna kalottytan.

155. Bestäm mantelytan till den del av cylindern $(x-z\tan a)^2+y^2=r^2$, som ligger innanför cylindern $(x+z\tan d)^2+y^2=r^2$.

156. Beräkna tyngdpunkten för den volym, som innesluts mellan ytan

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$$

och de positiva koordinataxlarna.

Differentialekvationer

157. Lös ekvationen $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$.

158. Bestäm den partiella integral till diff.-ekv.

$$\frac{dy}{dx} - y\Big(\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2+a^2}\Big) = -\frac{2ax}{x^2+a^2},$$

vilken försvinner för $x = a$. Angiv den motsvarande kurvan och bestäm dennas krökningsradie i punkten $x = 0$.

159. Lös differentialekvationen

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x\sin x.$$

160. Lös diff.-ekvationen

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - x\frac{dz}{dx} + z = 0$$

genom att till oberoende variabel välja $y = \arcsin x$.

161. Sök den allmänna integralen till

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = f(x),$$

där $f(x)$ är en godtycklig funktion.

162. Inför i differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Big(ae^{2x} - \frac{1}{4}\Big)y = 0$$

t som oberoende variabel och z som beroende, då $x = \log t$ och $z = y\sqrt{t}$. Integrera ekvationen!

163. Sök fullständiga integralen till

$$y^{(n)} - \binom{n}{1}ay^{(n-1)} + \binom{n}{2}a^2y^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n a^n y = e^{\beta x}.$$

164. Bestäm $f(x)$ så att

$$4f(x) + 8 + 12x - 4x^2 - 2x^3 = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

165. Transformera uttrycket $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ genom att i stället för x och y införa två nya variabler, s och t, förbundna med de förra genom ekvationerna $s = e^x + e^y$; $t = e^{-x} + e^{-y}$.

166. I ekvationen $y'' + f(x)y' + xy = 0$ skall $f(x)$ bestämmas så, att ekvationen får en lösning $y = \phi(x)$ med $\phi(0) = 1$ och en annan lösning $y = e^{\phi(x)}$. Bestäm $f(x)$, $\phi(x)$ och den fullständiga lösningen.

Geometri

167. I en triangel dragas medianerna, vilka därefter sammansättas till en ny triangel. Medianerna i denna sammansättas till en tredje triangel. Visa, att den är likformig med den första!

168. En ellips rullar utan att glida utanpå en annan lika stor ellips, så att vid rullningens början storaxlarna ligga i förlängningen av varandra. Sök de geometriska orterna för den rullande ellipsens brännpunkter!

169. En godtycklig triangel är given. O är den omskrivna cirkelns medelpunkt, T tyngdpunkten och H höjdernas skärningspunkt. Visa geometriskt, att O, T och H ligga i rät linje och att $HT = 2 \cdot OT$.

170. En cirkel drages genom mittpunkterna på en triangels sidor. Visa, att den går genom höjdernas fotpunkter samt att den skär de delar av höjderna, som ligga mellan den gemensamma skärningspunkten och resp. hörn, mitt itu! (Niopunktscirkeln.)

171. Tangeringspunkterna för den i en triangel inskrivna cirkeln förenas. I denna nya triangel dragas höjderna. Dessas fotpunkter bilda hörn i en tredje triangel. Visa, att dess sidor äro parallella med den ursprungliga triangelns sidor! Om A, B och C äro vinklarna i den första triangeln, sök förhållandet mellan två motsvarande sidor!

172. I en triangel inskrives en ellips, som tangerar sidorna i deras mittpunkter. Visa, att ellipsens medelpunkt faller i triangelns tyngdpunkt!

Plananalys

173. Framställ en parabels båglängd som funktion av vinkeln mellan tangenten och styrlinjen.

174. I triangeln ABC drages från A medianen mot sidan BC. Från C drages en rät linje, som delar sidan AB i förhållandet $m : n$. I vilket förhållande delar denna linje medianen?

175. I ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, där $a > b > 1$, drages en variabel korda AB, så att dess avstånd till medelpunkten är konstant $= 1$. I ändpunkterna A och B dragas tangenter, som skära varandra i P. Sök maximum och minimum för triangelytan PAB.

176. Ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kan skrivas i parameterform $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Visa, att $\dfrac{abt}{2}$ är ytan av den ellipssektor, som utskäres av av den positiva x-axeln och radius vektor genom punkten (x, y).

177. Man betraktar alla parabler, som gå genom en given punkt och i denna ha en given cirkel till krökningscirkel. Sök orten för brännpunkten och enveloppen till styrlinjen.

178. Sök ekvationen för och upprita enveloppen till de cirklar, som gå genom origo, och vilkas medelpunkter ligga på parabeln $y^2 = 4ax$.

179. En kurva är given genom ekvationerna $x = e^{-t}$; $y = \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2t}}\,dt$. Bevisa, att det stycke av tangenten, som begränsas av kurvan och y-axeln, är konstant, och härled kurvans ekvation som samband mellan x och y.

180. Visa, att kurvan $x^{2n} + y^{2n} = 1$ obegränsat närmar sig en viss kvadrat, då n går mot ∞. Motsvarande faktum för ytan $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$?

181. Från origo drages en radius vektor till hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$. På denna som diameter uppritas en cirkel. Sök enveloppen till alla så uppkommande cirklar.

Rymdanalys

182. En triangel är given i rymden. Angiv dess yta.

183. Angiv i determinantform ekvationen för sfären omskriven kring tetraedern med hörnpunkterna (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4).

184. En rät cirkulär kon med toppvinkeln 120° skäres med ett plan så, att en liksidig hyperbel med axeln $2a$ erhålles. Beräkna längden av det stycke av konens axel som planet avskär, samt längden av den kortaste generatris, som går till en punkt på snittet.

185. Ett rätvinkligt koordinatsystem med origo i O är givet. M är en godtycklig punkt, M_1, M_2, M_3 dess projektioner på de tre koordinatplanen. I vilket förhållande delas sträckan OM av ett plan genom punkterna M_1, M_2 och M_3?

186. I en tetraeder $OABC$ förenas mittpunkterna på baskanterna BC, CA och AB med mittpunkterna på motstående kanter OA, OB och OC. Bevisa att dessa linjer skära varandra i en och samma punkt.

187. Fyra sfärer skära varandra parvis, så att 6 skärningscirklar uppstå. Visa att deras plan gå genom samma punkt.

188. Visa, att den tetraeder, som bildas av tre halva konjugatdiametrar till en ellipsoid, har konstant volym $\dfrac{abc}{6}$, där a, b och c betyda halvaxlarna.

189. Undersök krökning, eventuell medelpunkt och typ hos ytan

$$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4y + 8z + 9 = 0.$$

190. Ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ speglas i planet $x + y + z = 1$. Bestäm den nya ytans ekvation.

191. Angiv de andragradsytor $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots + a_{44} = 0$, som innehålla den givna räta linjen $x + y - 1 = 0$. Sök speciellt ytor, som i denna linje tangera xy-planet.

192. Från vilken punkt på ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ skall man draga en normal för att origos avstånd från densamma skall få ett maximalvärde?

193. Tangentplanet till ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ skär koordinataxlarna i punkterna A, B och C. Sök tangeringspunkten, om diagonalen i parallellepipeden med kanterna OA, OB och OC har sitt minsta värde.

194. Visa att planet genom ändpunkterna P, Q och R av tre konjugatdiametrar till ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ tangerar ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1/3$ i tyngdpunkten av PQR.

195. En sfär rör sig så, att den ständigt tangerar två fixa räta linjer, som skära varandra under vinkeln 2α. Visa, att sfärens medelpunkt beskriver en ellips med excentriciteten $\cos\alpha$.

196. Härled ekvationen för ett plan innehållande cirkelformiga skärningar till ytan

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

197. Sök ekvationen för en rät linje, som ständigt är parallell med xy-planet, ständigt skär y-axeln och ellipsen $x = a$, $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Finns det något plan vinkelrätt mot x-axeln, som skär ytan i en cirkel?

198. Bestäm de cirkulära cylindrar, som ha linjen $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-3}{5}$ till axel och tangera sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

199. Sök ekvationen för de koner, som tangera sfärerna

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{och}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 10z + 46 = 0.$$

200. Kan i ekvationen $4x^2 + y^2 + z^2 - 4kxy + 4xz - 2yz - 6x + 3y - 3z + 2 = 0$ konstanten k bestämmas så att ytan blir urartad? Vilken är ytans allmänna typ och vad form tar i så fall den urartade ytan?

201. Vilken yta alstras av en rät linje, som rör sig så, att den ständigt skär z-axeln och hyperbeln i xy-planet $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ samt tangerar den hyperboliska paraboloiden $4z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

202. Sök i ett rätvinkligt koordinatsystem ekvationen för den yta, som alstras av en rät linje, som alltid är parallell med xy-planet och skär z-axeln och den cirkel, vars ekvation är $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y = R$.

203. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna ytan $\dfrac{2z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ och kurvan $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = m^2$, $z = 0$. Sök ekvationen för den yta, som alstras av en rörlig rät linje, som ständigt tangerar den givna ytan och skär både den givna kurvan och z-axeln.

204. Tre räta linjer äro dragna från origo. Bestäm ekvationen för en rotationskon med dessa linjer som generatriser. Ex. en rotationskon genom x-axeln, y-axeln och linjen $x = y = 2z$.

205. Visa, att varje tangentplan till en tvåmantlig rotationshyperboloid skär den asymptotiska konen i en ellips med konstant lillaxel.

206. En rotationshyperboloid nar z-axeln till axel och en given rät linje till generatris. Skriv upp hyperboloidens ekvation.

207. I xy-planet ligger ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sök orten för spetsarna till alla koniska ytor, som gå genom denna linje och skära xz-planet i cirklar.

208. Sök orten för spetsarna till de rotationskoner, som gå genom parabeln $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

209. Sök polen till planet $2x - 8y - 3z - 2 = 0$ med avseende på ytan $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2yz + 6x - 4z + 5 = 0$.

210. I ett rätvinkligt koordinatsystem är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ given. En kon, vars toppunkt är (ξ, η, ζ), går genom cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. Visa att denna kon skär sfären i ännu en plan kurva. Sök geometriska orten för polen till denna kurvas plan med avseende på sfären, när (ξ, η, ζ) genomlöper planet $z = k$.

211. Sök ekvationen för den cylinderyta, vars generatriser äro tangenter till ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ och ha riktningscosinus α, β, γ.

212. Till ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ har man konstruerat en tangentkon. Bestäm orten för konens spets, om tangeringskurvans plan rör sig så, att det tangerar hyperboloiden $\dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} - \dfrac{z^2}{c_1^2} = 1$. Vilken blir orten om $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$?

213. En yta är framställd i rätvinkliga koordinater genom ekvationen $x^2 - y^2 = 2az$, där a är en positiv konstant. Sök orten för de punkter på ytan, där tangentplanen göra en vinkel på 60° med xy-planet. Sök storleken av den del av ytan, som begränsas av den funna kurvan.

214. Sök ekvationen för den yta, som är geometriska orten för räta linjer, av vilka var och en är skärningslinjen mellan två mot varandra vinkelräta plan, av vilka det ena går genom y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem och det andra genom $x = a$, $y = z$. Vilka system av räta generatriser innehåller den sökta ytan och vad slags yta är det?

215. Sök ekvationen för den yta, som uppkommer då kurvan $xz = a^2$, $y = 0$ roterar kring linjen $x = y = z$.

216. En rät linje, som på positiva x-axeln och negativa y-axeln avskär ett stycke av längden a, roterar kring den genom origo gående linje, som bildar lika stora vinklar med koordinataxlarna. Sök ekvationen för den alstrade ytan och undersök ytan.

217. På en sfär äro två cirklar givna. Visa att man genom dessa kan lägga två koner (i allmänhet ej cirkulära).

218. Sök orten för skärningspunkterna mellan två mot varandra vinkelräta generatriser till en enmantlig hyperboloid.

219. Genom varje punkt P på generatrisen $y = ax$, $z = 1$ till ytan $z^2 + y^2 - a^2x^2 = 1$ går en annan generatris. Undersök hur vinkeln varierar mellan generatriserna, då P beskriver den givna generatrisen.

220. Två alstringslinjer till en hyperbolisk paraboloid med vertex i O skära tangentplanet i O i punkterna A och B. Sök orten för skärningspunkten mellan två generatriser sådana att ytan av triangeln AOB är konstant.

221. Till $y^2 + z^2 = 2px$ drages genom varje punkt på ytan en normal. Normalkordan delas mitt itu. Sök orten för mittpunkterna samt upprita den kurva som xy-planet avskär av denna ort.

222. Visa att orten för mittpunkterna av de kordor hos en ellipsoid, som gå genom en fix punkt, är en ellipsoid.

223. Visa att om kordan, som förbinder två punkter på ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tangerar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1/2$, så äro de två punkterna ändpunkter till två konjugatdiametrar och att tangeringspunkten ligger i kordans mittpunkt.

224. En sfär är given och på sfären en cirkel och en punkt T. Visa, att paraboloider kunna läggas genom cirkeln så att de tangera i T.

225. Bilda allmänna ekvationen för sfärer, som skära en given elliptisk paraboloid i två lika cirklar.

226. En sfär skär planen $y = 0$ och $z = 0$ i två cirklar. Angiv ekvationen för en andragradsyta genom dessa cirklar och diskutera dess krökning.

227. En rotationskons spets ligger i origo. Axelriktning och öppningsvinkel äro givna. Skriv upp konens ekvation och som användning angiv villkoren för att en given homogen ekvation av andra graden skall framställa en rotationskon.

228. Visa att varje tangentplan till en tvåmantlig hyperboloid begränsar tillsammans med den asymptotiska konen en konstant volym.

229. En rotationskon avskäres av plan så att den koniska toppen får konstant volym. Sök orten för centrum till dessa koners basellipser.

230. Punkterna A och B röra sig på var sin räta linje i rymden, var för sig med konstant hastighet. Punkten C delar sträckan AB så att $\frac{AC}{BC} =$ konstant. Bestäm geometriska orten för C samt ytan alstrad av linjen AB.

231. Sök den geometriska orten för de punkter, vars avstånd från två räta linjer i rymden stå i ett konstant förhållande till varandra.

232. Sök geometriska orten för en punkt så beskaffad att summan av kvadraterna på dess avstånd från två givna räta linjer $y = kx$, $z = a$ och $y = -kx$, $z = -a$ är konstant. I vilket fall är den funna ytan en rotationsyta?

233. Visa att om en punkt P beskriver en fix linje L dess polarplan med avseende på en given andragradsyta vrider sig kring en annan fix linje L'. Visa att dessa linjer ömsesidigt motsvara varandra på samma sätt.
Låt L vara en rät alstringslinje till hyperboloiden $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Visa arr polarlinjen L' med avseende på hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ är en annan alstringslinje till den första hyperboloiden tillhörande samma system som L.

234. Sök orten för medelpunkter till de andragradsytor, som går genom en fix cirkel och en rät linje, som skär denna cirkel.

235. Koordinaterna till en punkt på en yta framställas genom

$$\begin{aligned} x &= 3u(1-u) + v(1+u) \\ y &= 3u(1+u) - v(1-u) \\ z &= 6u(1-u^2) \end{aligned}$$

u och v krokliniga koordinater. Sök ekvationen för ytans normal i en punkt där $u = 0$ men v godtycklig. Vilken yta beskriver denna normal, när v varieras?

236. En andragradsyta är med parametrarna u och v framställd i formen

$$\begin{aligned} x &= a_1uv + a_2u + a_3v \\ y &= b_1uv + b_2u + b_3v \\ z &= c_1uv + c_2u + c_3v \end{aligned}$$

Angiv ytans typ och dess ekvation i cartesiansk form.

237. $\dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda}=1$, där λ är en parameter, bilda en skara av konfokala andragradsytor. Visa att genom en punkt i rymden det i allmänhet passerar 3 sådana ytor, samt att dessa skära varandra vinkelrätt.

238. En ljusstråle kastas fram och tillbaka mellan två plana speglar. Visa att den ständigt ligger på en rotationshyperboloid med planens skärning till axel.

239. En given andragradsyta skäres av ett givet plan i en viss kurva. Angiv de andragradsytor, vilka tangera den givna ytan längs nämnda kurva.

240. Bevisa att alla omkring en given sfär omskrivna andragradsytor äro rotationsytor och att varje tangentplan till sfären skär ytan längs en andragradskurva med tangeringspunkten som brännpunkt.

241. Visa, att tangentplanet i en cirkelpunkt på en andragradsyta av en godtycklig tangentkon avskär ett snitt, vars ena fokus är cirkelpunkten.

Svar och anvisningar

Kap. 1 Algebra

1. $r = \frac{1}{2} \log 3$; im. $= \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

2. Cauchys olikhet.

5. $a = 1$; x-axeln. För $0 < a < 1$: ellips med halvaxlar $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} \pm a\right)$.

6. 2 fall: förhållandet mellan pos. eller neg.

7. $a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 = 0$.

8. $2a^3 - 9ab + 27c = 0$; $a^2b^2 - 4b^3 + 27c^2 < 0$.

9. $\prod_{k=0}^{n-1} \left[x^2 - 2x \cos(\phi + \frac{2k\pi}{n}) + 1\right]$.

10. Begränsningslinjernas ekvationer: $4p^3 + 27q^2 = 0$; $p + q + 1 = 0$ och $q = 0$. Området består av två delar, båda till vänster om kurvan $4p^3 + 27q^2 = 0$. För $q > 0$ måste $p + q + 1 < 0$ och omvänt.

11. $y - x^2 < 0$; $y + 2x + 1 > 0$; $y - 2x + 1 > 0$.

13. Logaritmisk derivering.

14. $5p$.

15. Dubbelrot, om $a^4 = b^3$. Rot av 4:de ordningen om $a = b = 0$.

16. $2 + \sqrt{3}$ och $2 - \sqrt{3}$.

17. $y^3 - 36y^2 + 324y - 621 = 0$.

18. $n = 3(2k + 1)$, där $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dubbelrötter $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

19. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}(n-k)!\,x^k.$

20. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2.$

21. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$

22. I intervallen $(0, 1)$ resp $(0, 2)$ ersättes nämnaren med sitt min. resp. max.

24. $x^4 + q\left(\frac{1}{s} - 1\right)^2 x^2 + r\left(\frac{1}{s} - 1\right)^3 x + s\left(\frac{1}{s} - 1\right)^4 = 0.$

25. $x_1 = -0,83$; $x_2 = -2,69$; $x_3 = -4,48$.

30. $a^3 - 4ab + 8c < 0$, $a, b, c > 0$. Diskriminanten $\Delta \geq 0$.

31. Om $f(x)$ reellt polynom och α reellt tal har $f(x) + \alpha f'(x)$ minst ett nollställe mellan två nollställen för $f(x)$. Bevisa detta!

32. Ingen reell rot, dubbelrot eller två reella rötter allteftersom $\log a + b + 1 > 0$, $= 0$ eller < 0, förutsatt att $a > 0$. Om $a \leq 0$ har ekv. en reell rot, oberoende av b.

34. $k > 8$: 1 reell rot; $0 < k < 8$: 3 reella rötter; $-11 < k < 0$: 5 reella rötter; $-19 < k < -11$: 3 reella rötter; $k < -19$: 1 reell rot.

36. $a^2 d - c^2 = 0.$

40. $\left[a + (n-1)b\right] \cdot (a-b)^{n-1}.$

41. $x = 1$ ger max. $x = \frac{7}{9}$ ger min.

42. 1.

44. $a = -\frac{13}{6}$, $x = -\frac{5}{6}$, $z = -\frac{4}{5} - 2y$.

45. $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_n - b_n).$

46. Välj $x = -a$ resp. $x = -b$.

47. $\frac{[1!2!\ldots(n-1)!]^3 \cdot n!}{(n+1)!(n+2)!\ldots(2n)!}.$

57. $\sqrt{2}.$

Kap. 2 Serier.

58. Konvergent. Anv. jfr. serien $\sum \frac{1}{n^2}$.

59. Divergent.

60. Divergent.

61. Konvergent.

62. Serien är konvergent.

63. $k \leq 1$.

64. a) Konvergent, b) Divergent.

65. a) $s > 1$, b) $s > 0$.

66. För alla värden utom $x = m^2 \cdot (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2}$, där m och k äro hela tal.

67. $\alpha > 1$; $\beta > 2n + 1$.

68. s_1 konvergent för $\beta > 1$, divergent för $\beta \leq 1$.
    s_2 konvergent för $\beta > 1/2$, divergent för $\beta \leq 1/2$.

69. Serien är konvergent för $a < 1/e$, divergent för $a \geq 1/e$.

70. För $|x| \leq 1/2$.

71. Konvergens för $|x| \leq 1/2$.

72. Serien konvergent för $-1/4 \leq x < 1/4$.

73. För $-1 \leq x < 1$.

74. $a > 0$: konvergens för alla x-värden
    $a < 0$: divergens för alla x-värden utom för $x = 0$.
    $a = 0$: konvergens för $-1 \leq x < 1$.

75. Serien är konvergent för alla reella värden på z samt för alla komplexa utom $z = ik$, där k är roten ur ett helt tal.

76. Var 6:e term saknas (6:3, 12:e …o.s.v.).

77. $-\left(x\cos\phi + \dfrac{x^2}{2}\cos 2\phi + \dfrac{x^3}{3}\cos 3\phi + \ldots + \dfrac{x^n}{n}\cos n\phi + \ldots\right)$.

78. $y = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{8}{45}x^6 + \ldots + \dfrac{(2k-1)!!}{k(2k-1)!!}x^{2k} + \ldots$

79. 1.

80. $\dfrac{a+b}{4}$.

81. $S = \dfrac{3}{2}(\log 3 - 1)$.

82. a) $-\dfrac{1}{12} - \dfrac{16}{9t} + \dfrac{7}{3t^2} - \dfrac{1}{3t^3} - \dfrac{5(1-t)}{4t^2\sqrt{t}} \cdot \log \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} - \dfrac{1-t^3}{3t^4} \log(1-t)$.
b) $\dfrac{5}{36}$.

83. $\dfrac{\pi^2}{3} - 3$.

84. Serien divergent för $|x| \geq 1$, konvergent för $|x| < 1$.
I konvergensområdet är $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{1+x}$.

85. $s = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \log \dfrac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \dfrac{\sqrt{2}}{8} \log \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

86. Serien konvergent för $r < 1$. $S = \dfrac{r\cos x - r^2}{r^2 - 2r\cos x + 1}$.

87. Partiell summation, Abels teorem.

88. a) 1. b) $\dfrac{\pi}{4}$.

89. $\dfrac{\pi}{4}$.

91. För $a = 1$ blir serien $\log \dfrac{1}{2}$.

93. $\beta > \alpha$.

94. Konvergent för $\alpha > 0$ samt för $\alpha = 0$, $\beta > 1$.

98. Konvergent för $p = q$, eljest divergent.

99. $A_n = \dfrac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{2n \sin^2 \frac{x}{2}}$.

Kap. 3 Integralkalkyl.

100. $\dfrac{2}{3}(x^2+3x+2)^{3/2} - 2(2x+3)(x^2+3x+2)^{1/2} + \log(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}) + C$.

101. $\pi\Big(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big)$.

102. $\dfrac{\pi}{2(1+|a|)}$.

103. $\dfrac{2\pi}{|r^2 - 1|}$, då $r \neq 1$, ∞ om $r = 1$.

104. $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

105. $\dfrac{\pi \log|a|}{2|a|}$.

106. $\dfrac{\pi}{4}$.

107. $\log 2 - 1$.

108. $\dfrac{\cos v}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}\cos v + \sqrt{\cos 2v}) - \dfrac{\sin v}{\sqrt{2}} \arccos(\sqrt{2}\sin v)$.

109. $\cos^2\alpha \log|\sin(x-\alpha)| - x \sin\alpha\cos\alpha + C$. Principalvärdet är $\cos^2\alpha \log\left|\dfrac{1-\tan\alpha}{\sqrt{2}\tan\alpha}\right| - \dfrac{\pi}{4}\sin\alpha\cos\alpha$.

110. π; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2\pi}{3}$.

111. $I = \dfrac{\pi}{2}$ för 1) $a \neq 0$; $b = 0$. 2) $a, b \neq 0$, $a^2 > b^2$
$I = 0$ för 1) $a = b = 0$. 2) $a = 0$, $b \neq 0$. 3) $a, b \neq 0$, $a^2 < b^2$.
$I = \dfrac{\pi}{4}$ för $a = b \neq 0$.

112. $\dfrac{1}{2}n!$

113. $e^{b^2/a^2} \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{|a|}$.

115. Substitutionen är $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Serieutvecklingen ger:

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^2} + \frac{1}{7\cdot 2^3} + \ldots\Big)$$

117. 1. $L_n(x)$ kallas Laguerres polynom $= \sum\limits_k (-1)^k \dbinom{n}{k} \dfrac{x^k}{k!}$.

118. $\frac{8a^3}{3}$.

119. $2\pi\left[b\left(\frac{df}{dr}\right)_b - a\left(\frac{df}{dr}\right)_a\right]$.

120. $\frac{\pi}{4}$.

121. 1) $\frac{\pi}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}$; 2) ∞.

122. $\frac{\pi}{|\sin\alpha|}$; $\sin\alpha \neq 0$.

123. $\frac{a^3}{3}\left[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{16}\right]$.

124. $\frac{\pi}{6}$.

125. $\frac{1}{210}$.

126. $e - 1$.

127. 2; värdet oberoende av vägen, då integranden är en total differential (så länge origo ej passeras).

128. $e - 1$; $e - 1 - \frac{\pi}{8}$.

Kap. 4 Tillämpningar på integraler.

129. $\phi(x)$ är kontinuerlig i hela intervallet och deriverbar utom i punkten $x = \sqrt{2} - 1$.

131. Konvergent för $-2 < a < 0$, absolut konvergent för $-2 < a < -1$.

132. 1) $-3 < a < 1$. 2) $-1 < a < 1$.

133. $\left|\frac{\alpha+1}{\beta}\right| < 1$.

134. Konvergent för $\alpha < 0$, absolut konvergent för $\alpha < -1$.

135. Två villkor: $a + 2b > -1$ och $a > -1$.

136. Maximivärdet M antages i punkten c

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} [f(x)]^{2n}\,dx < \int_a^b [f(x)]^{2n}\,dx < \int_a^b M^{2n}\,dx$$

I intervallet $(c-\delta, c+\delta)$ är för tillräckligt litet δ: $f(x) > M - \epsilon$,

$$(M-\epsilon)^{2n} \cdot 2\delta < \int_a^b [f(x)]^{2n}\, dx < M^{2n}(b-a).$$

137. $6a$.

138. $\log 243 - \log 256 + 2\log \dfrac{(5+\sqrt{13})(3+\sqrt{13})^2(1+\sqrt{13})^3}{(2+\sqrt{13})^6}$.

139. $r\sin\phi = a \pm a\sin^2\phi$ (beroende på om M ligger över eller under asymptoten). I rätvinkliga koordinater: $y(x^2+y^2) - ax^2 = 0$ (Cissoid), resp. $(y-a)(x^2+y^2) - ay^2 = 0$. Ytan: $\frac{3}{4}\pi a^2$ resp. $\frac{5}{4}\pi a^2$. Delarnas ytor: $a^2\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big)$ och $a^2\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)$.

140. Volymen $= \dfrac{8a^3}{3}\Big(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\Big)$. Ytan $= 8a^2\Big(\dfrac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}\Big)$.

141. $\dfrac{245\pi}{8}$.

142. Volymen $= \dfrac{\pi}{4}\Big[\dfrac{15}{8} + \log 4\Big]$. Ytan $= \dfrac{\pi}{2}(7 + \log 4)$.

143. $\dfrac{\pi abc}{3}(4 - \sqrt{2})$.

144. Volymen $= \pi qpa^2(p+q)$.

145. $10\pi\sqrt{6}$.

146. $\dfrac{\pi ab}{4}\Big(\dfrac{a^2}{m^2} + \dfrac{b^2}{n^2}\Big)$.

147. Sista ytan är en kon med spetsen i sfärens centrum och toppvinkeln 90°; ytan av en kalott $25\pi(2-\sqrt{2})$.

148. $\dfrac{2\pi}{15}p^3\sqrt{2}$.

149. $\dfrac{5\pi}{24}$; $\dfrac{9\pi}{8}$.

150. $\dfrac{16R^3}{3\sin\alpha}$.

151. $\dfrac{r^2h}{18}(3\pi + 4)$; $\dfrac{r^2h}{18}(3\pi - 4)$.

152. $(x^2+y^2)^2 + x^2(z^2 - a^2) = 0$. Volymen $\dfrac{2}{3}\pi a^3$.

153. $\frac{\pi ab}{4}\left(A^2a^2+B^2b^2+4C\right)\sqrt{1+A^2+B^2}$.

154. Om sfärens ekvation är $x^2+y^2+z^2-2Rz=0$ och konens $ax^2+by^2-cz^2=0$, är volymen $\frac{4\pi R^2 C}{\sqrt{(a+c)[b+c]}}$.

155. $\frac{8r^2(a+\sin a\cos a)}{\sin a\cos a(\tan a+\tan d)}$.

156. $\frac{21a}{128}$; $\frac{21b}{128}$; $\frac{21c}{128}$;

Kap. 5 Differentialekvationer.

157. $y=\frac{1}{Cx+\log x+1}$.

158. $y=\frac{x^2(a^2-x^2)}{a^2(a^2+x^2)}$; $\rho=\frac{1}{2}|a|$.

159. $y=\cos x\left(A_1+A_2x-\frac{x^2}{8}\right)+\sin x\left(A_3+A_4x-\frac{x^4}{24}\right)$.

160. $y=A\sqrt{1-x^2}+Bx$

161. $y=e^x\left[A-\frac{1}{2}\int(x+1)e^{-x}f(x)\,dx\right]+xe^x\left[B+\frac{1}{2}\int e^{-x}f(x)\,dx\right]+$
$+\cos x\left[C+\frac{1}{2}\int f(x)\cos x\,dx\right]+\sin x\left[D+\frac{1}{2}\int f(x)\sin x\,dx\right]$.

162. $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\sqrt{a}\cdot e^x+B\sin\sqrt{a}\cdot e^x\right]$.

163. $y=\frac{e^{\beta x}}{(\beta-\alpha)^n}+e^{\alpha x}(C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1})$; $\alpha\neq\beta$.
Om $\alpha=\beta$: $y=e^{\alpha x}(C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+\frac{x^n}{n!})$.

164. $f(x)=12e^{x/2}-6e^{-x/2}-12x+8$.

165. Det nya uttrycket blir

$$s^2\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+t^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-2st\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}+s\frac{\partial z}{\partial s}+t\frac{\partial z}{\partial t}.$$

166. $f(x)=-\frac{x^3+15}{3x}$; $\phi(x)=\frac{x^3}{9}+1$; $y=C_1\left(\frac{x^3}{9}+1\right)+C_2e^{\frac{x^3}{9}+1}$.

Kap. 6 Geometri.

168. Cirklar med fasta ellipsens brännpunkter som medelpunkter och radien = storaxeln.

171. $\dfrac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$.

Kap. 7 Plananalys.

171. $S = \dfrac{p}{2}\left(\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$ där p betecknar halva parametern, θ är vinkeln mellan tangenten och styrlinjen, och S är längden av bågen från vertex till tangeringspunkten.

174. Medianen delas i förhållandet $\dfrac{2m}{n}$.

175. Max. $= \dfrac{b}{a}(a^2-1)^{3/2}$, min.$= \dfrac{a}{b}(b^2-1)^{3/2}$.

177. Orten för brännpunkten är cirkeln $x^2 + \left(y - \dfrac{R}{4}\right)^2 = \dfrac{R^2}{16}$. Enveloppen till styrlinjen är punkten $\left(0; -\dfrac{R}{2}\right)$, om den givna punkten väljes till origo och cirkelns medelpunkt lägges i $(0, R)$. R är krökningscirkelns radie.

178. Enveloppens ekvation är $y^2 = -\dfrac{x^3}{x+2a}$.

179. Kurvans ekvation: $y = \dfrac{\log(1+\sqrt{1-x^2})}{x} - \sqrt{1-x^2}$.

180. a) Kvadraten begränsas av linjerna $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.
b) En kub, begränsad av planen $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ och $z = \pm 1$. Betrakta fallen $|x| \leq |y|$ och $|x| \geq |y|$.

181. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Kap. 8. Rymdanalys.

182. $\dfrac{1}{2}|(r_1 - r_2) \times (r_3 - r_2)|$; r_1, r_2 och r_3 äro vektorer.

184. Av konens axel avskäres $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, kortaste generatris $\dfrac{a}{3}(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$.

185. 2 : 1.

189. Ellipsoid.

190. $\dfrac{(x-2y-2z+2)^2}{a^2}+\dfrac{(y-2x-2z+2)^2}{b^2}+\dfrac{(z-2x-2y+2)^2}{c^2}=9.$

191. Villkor: $\begin{aligned} a_{11}+a_{22}-2a_{12} &= 0\\ a_{11}+a_{44}+2a_{14} &= 0\\ a_{22}+a_{44}+2a_{24} &= 0\end{aligned}$
eller alla ytor innehållande rätliniga generatriser. Ytor som tangerar äro koner eller cylindrar.

192. $\pm\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}$, 0, $\pm\dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}$; $a>b>c>0$.

193. $\pm\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}$, $\pm\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}$, $\pm\dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}$.

196. $z=\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{21}}\cdot x+$ konstant.

197. $a^2c^2y^2+b^2x^2z^2-b^2c^2x^2=0$, $x=\pm\dfrac{ac}{b}$.

198. $\Big[x-\dfrac{3}{50}\big(3x+4y+5z-46\big)-5\Big]^2+\Big[y-\dfrac{4}{50}\big(3x+4y+5z-46\big)-4\Big]^2+$
$\Big[z-\dfrac{1}{10}\big(3x+4y+5z-46\big)-3\Big]^2=\Big(\dfrac{8}{5}\sqrt{3}\pm 1\Big)^2$

199. $40x^2+33y^2+24z^2-24xy-30xz-40yz+6x+8y+10z-50=0.$
$32x^2+25y^2+16z^2-24xy-30xz-40yz-18x-24y-30z-50=0.$

200. Enmantlig hyperboloid; för $k=1$ betyder ekvationen två parallella plan $y=\dfrac{4x+2z-3}{2}\pm\dfrac{1}{2}$.

201. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-(z-1)^2=0$, en kon med spetsen i $(0,0,-1)$, samt den del av $z=0$ som ligger innanför hyperbelns asymptoter.

202. $z^2(x+y)^2-2R^2xy=0.$

203. $m^2\Big(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\Big)=\Big(\dfrac{2z}{c}+m^2\Big)^2.$

204. $xy-xz-yz=0$ (spec. fallet). Flera fall!

207. $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{a^2}=1$, $x=0$.

208. $z^2=4a(a-x)$, $y=0$.

209. $(-1, 3, 2)$.

210. $x^2 + y^2 = R^2 + k^2 - 2kz$.

211. $\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) -$
$- \frac{2\alpha\beta}{a^2b^2}xy - 2\frac{\alpha\gamma}{a^2c^2}xz - 2\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}yz = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}$.

212. $\frac{x^2}{a^4/a_1^2} + \frac{y^2}{b^4/b_1^2} - \frac{z^2}{c^4/c_1^2} = 1$.

213. $x^2 + y^2 = 3a^2$, $x^2 - y^2 = 2az$; Ytan: $\frac{14\pi a^2}{3}$.

214. $x^2 + y^2 - yz - ax = 0$.

215. $xy + yz + zx = a^2$.

216. $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = a^2$; enmantlig hyperboloid.

218. Orten är skärningslinjen mellan hyperboloiden och ytan
$$a^2\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2y^2}{a^2b^2}\right) - b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + c^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2z^2}{b^2c^2}\right) = 0.$$

219. $\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{a^2}{(a^2+1)(a^2x_0^2+1)}$, där x_0 är punktens x-koordinat.

220. Om paraboloidens ekvation är $\frac{y^2}{p^2} - \frac{z^2}{q^2} = 2x$, är ortens ekvation $\frac{y^2}{p^2} - \frac{z^2}{q^2} = \frac{4S}{pq}$, $x = \frac{2S}{pq}$, där S betyder ytan av triangeln.

221. $2(y^2 + z^2)^2 - 2px(y^2 + z^2) + 2p^2(y^2 + z^2) + p^4 = 0$.

225. $x^2 + y^2 + z^2 + 2z(k - p) + k^2 = 0$. Paraboloidens ekvation $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p > q$.

226. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2\lambda yz - R^2 = 0$.

227. $x^2(\alpha^2 - \cos^2\theta) + y^2(\beta^2 - \cos^2\theta) + z^2(\gamma^2 - \cos^2\theta) + 2\alpha\beta xy + 2\alpha\gamma xz + 2\beta\gamma yz = 0$. Diskussion.

228. Visas enklast med en transformation som lämnar formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ invariant. Man finner transformationsdeterminanten $= \pm 1$. Vid transformationen övergår ett tangentplan i ett annat tangentplan, varvid volymen är oförändrad på grund av funktionaldeterminantens värde.

229. Jfr. föregående problem.

230. Orten för C är en rät linje; för AB en hyperbolisk paraboloid.

231. Om linjernas ekvationer äro: $y = kx$, $z = 0$ och $z = c$, $y = 0$ är orten:
$k^2x^2 + y^2(1 - A) + z^2(k^2 + 1 - A) - 2kxy + 2Acz - Ac^2 = 0$, där $A =$ konstant.

232. $\dfrac{x^2}{(1 + \frac{1}{k^2})(K^2 - a^2)} + \dfrac{y^2}{(1 + k^2)(K^2 - a^2)} + \dfrac{z^2}{K^2 - a^2} = 1.$

234. Om cirkeln är $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2Rx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ och linjen $\dfrac{x}{\xi} = \dfrac{y}{\eta} = \dfrac{z}{\zeta} = 0$ är orten
$\zeta^2x^2 + \zeta^2y^2 + (\xi^2 + \eta^2)z^2 - 2xz\xi\zeta - 2yz\eta\zeta + Rx\zeta^2 - Rz\xi\zeta = 0.$

235. $\dfrac{x - v}{-3} = \dfrac{y + v}{-3} = \dfrac{z}{3 + v}$; $(x + 3)^2 - (y - 3)^2 + 12z = 0$, en hyperbolisk paraboloid med vertex $(-3, 3, 0)$.

236. Om $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ och $A_1, \dots, C_3$ äro de mot $a_1, \dots, c_3$ svarande alg. komplementen, är ekvationen

$$\Delta(xA_1 + yB_1 + zC_1) = (xA_2 + yB_2 + zC_2)(xA_3 + yB_3 + zC_3)$$

d.v.s. en hyperbolisk paraboloid. Om $\Delta = 0$, men någon underdeterminant $\neq 0$, betyder systemet ett plan. Om $\Delta = 0$ och alla underdeterminanter $= 0$, anger systemet en rät linje.

238. I en rotationshyperboloid äro de båda generatriserna genom en viss punkt spegelbilder av varandra med avseende på normalplanet i punkten.

239. Jfr. följande problem. Den givna ytans ekv. $K = 0$, planets $L = 0$. Tangerande ytor: $K + \lambda L^2 = 0$.