Matematisk problemsamling

1-betygskursen

Matematisk problemsamling

1-BETYGSKURSEN

ANDRA OMARBETADE UPPLAGAN

LUND 1942
LUNDS STUDENTKÅRS INTRESSEBYRÅ

LUND 1942

CARL BLOMS BOKTRYCKERI

FÖRORD

Föreliggande problemsamling utgör en omarbetad och utvidgad upplaga av en stencilerad samling, som under tecknad på begäran av Lunds Studentkårs Intressebyrå utarbetade för två år sedan. Den innehåller ett urval av uppgifter, som under senare år givits vid tentamina för ett betyg i matematik i fil. kand.- och ämbetsexamen vid Lunds universitet. Samlingen har genomsetts av professor Riesz, vilken jag härmed hjärtligt tackar för alla goda råd och anvisningar.

Lund i september 1942.

Nils Erik Fremberg
Fil. lic. Biträdande lärare i matematik
vid Lunds universitet.

Innehåll

Algebra

1. Utred, hur antalet reella rötter till ekvationen

$$6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x^2 + k = 0$$

varierar med k.

2. Ekvationen $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$ har en multipelrot. Bestäm denna och lös ekvationen fullständigt.

3. Ekvationen $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$ har roten $2 + \sqrt{3}$. Lös ekvationen fullständigt.

4. Angiv sambandet mellan koefficienterna i ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, för att en rot skall vara = summan av de båda andra.

5. För vilka värden på a och b har ekvationen $\log x = ax + b$ två, en resp. ingen reell rot?

6. Angiv samtliga värden på $\sqrt[3]{-1}$ och $\sqrt[16]{+1}$ i algebraisk form $a + bi$.

7. Uppskriv alla rötter till ekvationen $x^5 = 2i$.

8. Förenkla $\sqrt{\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}}$.

9. Uppdela $x^{12} - 1$ i reella faktorer av högst andra graden.

10. Bevisa, att uttrycket $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ kan uppdelas i två faktorer av andra graden med reella koefficienter, samt angiv dessa faktorer.

11. Sätt $z = x + iy$. Angiv kurvskaror i xy-planet, läng vilka absoluta beloppet resp. argumentet av e^{z^2} är konstant.

12. Bevisa olikheten $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$, där x och y äro rellea tal.

Differentialkalkyl

1. Funktioner, kurvor, derivator

13. Visa, att om $f(x)$ är kontinuerlig i ett intervall (a, b), så är $g(x) = |f(x)|$ det också. Visa vidare genom ett exempel, at omvändningen icke gäller. Hur blir satsen, om $|f(x)|$ utbytes mot $f(x)^2$ resp. $f(x)^3$?

14. För vilka positiva värden på x är den funktion kontinuerlig, som är = positiva kvadratroten ur x, minskad med det största positiva hela tal $\leq$ nämnda kvadratrot?

15. Är funktionen $y = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$ överallt deriverbar i intervallet $-1 \leq x \leq +1$? Beräkna derivatan för olika värden på x och skissera kurvan i stora drag.

16. Visa, att funktionen $f(x) = 4\cos x + \cos 2x$ uppnår sina maxima och minima för samma x-värden som $\cos x$, samt upprita kurvan $y = f(x)$.

17. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; $x > 0$. Sätt $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \varphi(x)$. Bevisa, att $\varphi(x) > 0$ och $\varphi'(x) < 0$.

Rita kurvorna 18–21:

18. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

19. $y = x^2 \log x$.

20. $y^2 = x^2 \log \dfrac{a^2}{x^2}$.

21. $\begin{cases} x = a \sin 2t \\ y = a \sin t \end{cases}$

22. Upprita kurvan $x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \log \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ och visa, att det stycke av tangenten, som begränsas av kurvan och x-axeln, är konstant $= a$.

23. Angiv genom kurvor, dels abscissan, dels ordinatan för det till en punkt (x, y) på parabeln $x^2 = 4ay$ hörande krökningscentrum varierar med x.

24. Sök läget av krökningscentrum till kurvan $x^3 + y^3 = 6xy$ i punkten $(3, 3)$.

25. Bestäm evolutan till kurvan $27ay^2 = 4x^3$.

26. Bestäm evolutan till kurvan $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$

27. Visa, att beröringen mellan kurvorna $x^2 + y^2 - 6(x + y) + 10 = 0$ och $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ i punkten $(1, 1)$ är av tredje ordningen, samt upprita kurvorna.

28. Beräkna $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right)$ och $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$.

29. Beräkna $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\log(1 + x)\right]$.

30. Beräkna $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{\log(1 - x)}{1 - x}\right)$.

31. Bevisa genom fullständig induktion, att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\arctan x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1 + x^2)^{n/2}} \sin(n \cdot \operatorname{arccot} x).$$

32. Bevisa genom fullständig induktion eller på annat sätt, att

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\cos bx) = r^n e^{ax}\cos(bx + n\theta),$$

där $a = r\cos\theta$ och $b = r\sin\theta$.

33. Bevisa genom fullständig induktion, att $\dfrac{d^n}{dx^n}(\tan x)$ kan skrivas som ett polynom av graden $n + 1$ i $\tan x$. Visa även, att alla koefficienterna i detta polynom äro positiva, samt beräkna den högsta av dem (= koefficienten för $(\tan x)^{n-1}$).

2. Maxima och minima

Sök maxima och minima av funktionerna 34–38:

34. $y = \dfrac{9x + 7x^3}{(1 + x^2)(9 + x^2)} - \arctan x$.

35. $y = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 16x}{x^2 + 4x + 8} - 2\log(x^2 + 4x + 8) - 4\arctan\dfrac{x + 2}{2}$.

36. $y = \sin x \cos 2x$.

37. $y = x^{3-\log x}$.

38. $y = (x - a)^m(b - x)^n$, där $a < b$ och m och n äro positiva heltal. Diskussion för udda och jämna värden på m och n.

39. Sök det största och det minsta värde, som funktionen

$$A\sqrt{a^2 + x^2} + B(b - x)$$

antager för $0 \le x \le b$. A och B äro positiva tal. Diskussion.

40. Vilken av alla i en given cirkel inskrivna trianglar har den största ytan?

41. I ett givet klot skall inskrivas en rät cirkulär cylinder, så att summan av mantel- och basytorna blir så stor som möjligt. Sök förhållandet mellan cylinderns höjd och basradie.

42. Sök minimum av volymen av den stympade räta cirkulära kon med parallella avskärningsytor, som är omskriven kring ett halvklot med radien a.

43. Ytan av en fyrhörning samt en diagonal äro givna. Hur skall fyrhörningen vara beskaffad, för att dess omkrets skall vara minimum?

44. Hur stor sektor skall bortskäras ur en cirkel för att av återstoden genom hopvikning erhålla en kon med största möjliga volym?

45. Två gator av bredden a resp. b korsa varandra under räta vinklar. Hur lång är den längsta stång, som kan föras i horisontellt läge från den ena gatan till den andra?

46. Ett rektangulärt pappersark $ABCD$ vikes så, att hörnet A faller på kanten CD. Var bör hörnet falla, för att vecket skall få minsta möjliga längd?

3. Olikheter

Bevisa olikheterna 47–51:

47. $x^2 \geq 1 + 2\log x$ för $x > 0$.

48. $2\sin x + \tan x > 3x$ för $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

49. $x < \dfrac{\sin x + \tan x}{2}$ och $x < \sqrt{\sin x \cdot \tan x}$ för $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

50. $xe^{-x} \leq e^{-1}$ för $x \geq 0$. Sök en liknande gräns för $x^n e^{-x}$, där $n > 0$ (ej nödvändigtvis heltal).

51. $\arcsin x < \dfrac{x}{1 - x^2}$ för $0 < x < 1$.

52. Visa, att $\dfrac{\sin x}{x}$ är avtagande för $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, och härled därav olikheterna $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x$ för $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

53. Visa, att för $0 < x < \pi$ är $|\sin nx| < n \cdot \sin x$, där n är ett heltal > 1.

54. $x > 0$. För vilka positiva eller negativa värden på a gäller $(x+1)^a - x^a > ax^{a-1}$?

55. Visa, att om $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, så är $\dfrac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$.

56. Visa, att om A, B och C äro vinklar i en triangel, så är $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$.

57. Beteckna med A och B en regelbunden månghörnings periferi resp. yta. Bevisa, att $B \leq \dfrac{A^2}{4\pi}$.

Gränsvärden

Beräkna nedanstående gränsvärden:

58. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

59. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}$.

60. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{\log\tan x}}$.

61. $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$.

62. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(1+ax+bx^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

63. Vilken av funktionerna e^{x^2} och x^x växer starkast, när $x\to\infty$?

64. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}\right)$.

65. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan(a+x)-\tan(a-x)}{\arctan(a+x)-\arctan(a-x)}$ (spec. även för $a=\pi/2$).

66. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{(a^2-x^2)^{1/4}+(a-x)^{1/4}}{(a-x)^{1/4}-(a^3-x^3)^{1/4}}$.

67. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$.

68. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

69. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

70. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos^2 x}{x+\sin^2 x}$.

71. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x+x}{x\arctan x}$.

72. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2+\cos x}$.

73. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^x-(1+x^2)}{x^3}$.

74. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\log(1-x)}\right)$.

75. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}-\frac{x}{6}\right)$.

76. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x^3}\left(\cot x-\frac{1}{x}-\frac{x}{3}\right)$.

77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$.

78. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2-\frac{x}{2}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x^3}$.

79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}$.

80. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

81. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\dfrac{a}{n^2} + \sin\dfrac{2a}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{(n-1)a}{n^2}\right)$.

82. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e\cdot n!)$.

83. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n$.

84. Bilda talföljden $a_1 = Aa_0 + B$; $a_2 = Aa_1 + B$; $a_3 = Aa_2 + B$; $\ldots$ $a_n = Aa_{n-1} + B$; $\ldots$, där $-1 < A < 1$. Existerar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ och vad är i så fall detta gränsvärde?

85. Bilda talföljden $a_1, a_2, a_3 = \dfrac{a_1+a_2}{2}, a_4 = \dfrac{a_2+a_3}{2}, \ldots$ Visa, att talföljden är konvergent och sök gränsvärdet.

86. Utgående från de positiva talen a och b bildas talföljderna

$$\begin{array}{ll} a_1 = \dfrac{a+b}{2} & b_1 = \dfrac{2ab}{a+b}; \\ a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2} & b_2 = \dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1}; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} & b_n = \dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}; \end{array}$$

Visa, att talföljden $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ är ständigt avtagande, talföljden $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ständigt växande, och att bägge äro konvergenta med gränsvärdet $\sqrt{ab}$.

Serier

Utveckla funktionerna 87–100 i Maclaurinserier och angiv giltighetsområdena för utvecklingarna:

87. $e^{2x}(3-x) - 4xe^x - x - 3$. (Vilken är den första termen $\neq 0$?).

88. $\sin^2 x$ och $\sin^3 x$.

89. $\cos x \cos 2x \cos 3x$.

90. $\sin ax \sin bx$.

91. $\cos^2 x \sin 3x$.

92. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$.

93. $e^x \sin x + e^x \cos x$.

94. $e^{-x} \cos^2 x$.

95. $e^{ax} \cos bx$.

96. $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$.

97. $\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)^2$.

98. $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$.

99. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

100. $\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

101. Utveckla $e^{x \sin x}$ i potensserie av x under medtagande av termer t.o.m. 4:de graden i x.

102. Utveckla $\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^m$ i en serie efter stigande potenser av $\dfrac{1}{2x+1}$ och bestäm, för vilka x utvecklingen är giltig.

Bevisa, att serierna 103–105 äro konvergenta, och angiv deras summor:

103. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

104. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

105. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$.

Avgör om serierna 106–110 äro konvergenta eller divergenta:

106. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{(2n+3)^{5/2}}$.

107. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{(5n-7)^{3/2}}$.

108. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{n^2(n+1)^2}}$.

109. $\frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \dots$

110. $\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \frac{5}{9} - \frac{6}{11} + \dots$

111. Visa, att om a_n äro positiva tal, så äro serierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+1}$ konvergenta och divergenta samtidigt.

112. Beräkna $e^{\frac{1}{3}}$ utan tabell på $0,00001$ när. Uppskatta felet.

Bestäm, för vilka reella värden på x serierna 113–115 konvergera:

113. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}$.

114. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}x^n}$.

115. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

116. För vilka reella värden på x konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$? Uppskatta felets storlek, om man sätter $x = \pm\frac{1}{2}$ och medtager 8 termer.

Angiv konvergensintervallen för serierna 117–120 och beräkna deras summor:

117. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

118. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n+1}$.

119. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

120. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+1} x^n$.

121. För vilka reella värden på x konvergerar serien $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^n$?

122. För vilka reella eller komplexa värden på z konvergerar serien $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2z}\right)^n$?

123. x och y äro rätvinkliga koordinater. För vilka punkter i planet konvergerar serien $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{y^2+1}\right)^n$?

Integraler

1. Obestämda integraler

Evaluera följande obestämda integraler:

124. $\int \frac{2x^4 - x^3 - x + 1}{x^5 - 2x^4 + x^3}\, dx$.

125. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

126. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+3x+2)}$.

127. $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^4(x^2+1)}\, dx$.

128. $\int \frac{x^3\, dx}{1+x^2}$.

129. $\int \frac{dx}{x(x^n-1)}$.

130. $\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\, dx$.

131. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$

132. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+4x)\sqrt{x^2-1}}.$

133. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{5+6x-7x^2}}.$

134. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

135. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}.$

136. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos x}.$

137. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}.$

138. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}.$

139. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

140. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$

141. $\displaystyle\int \sin^5 x\cos^4 x\,dx.$

142. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx.$

143. $\displaystyle\int x^2\arcsin x\,dx.$

144. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\sqrt{a+b\tan^2 x}}\,dx.$ (Diskussion för olika värden på a och b.)

2. Bestämda integraler

Beräkna integralerna 145–161:

145. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

146. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

147. $\displaystyle\int_0^{2a} x^3\sqrt{2ax-x^2}\,dx.$

148. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

149. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$

150. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\,dx}{\sin x+\cos x+1}$

151. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}.$

152. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}.$

153. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+3x-2}{(x^2-x+1)^2(x-2)}\,dx.$

154. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

155. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}.$

156. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x+x^2}}.$

157. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^{3/2}}\,dx$

158. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

159. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$

160. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

161. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+r^2-2r\cos x} \quad (|r|\neq 1)$

162. Visa, att för positivt heltal n är $\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n!$.

163. Visa, att för positivt heltal n är

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2+1})^n} = \frac{n}{n^2-1}.$$

164. Visa, att $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = -\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$, beräkna med hjälp av detta integralen $\int_0^\infty \frac{\log x}{a^2+x^2}\, dx$.

165. Visa genom partiell integration, att för $x > 0$ gäller

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{n-1}\, dt = \frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdot \cdots \cdot (x+n-1)}.$$

Vad är integralens värde för $x \leq 0$?

166. Beräkna medelst en trigonometrisk substitution integralen $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$. Diskussion för $a^2 < 1$, $a^2 = 1$, $a^2 > 1$.

3. Tillämpningar på integraler

Bestäm derivatan av de funktioner av x, som äro definierade genom integralerna 167–169:

167. $\int_1^{\tan x} \frac{dt}{t(1+t^2)}$.

168. $\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{dv}{\sqrt{1+\sin^2 v}}$.

169. $\int_0^{\sin x} e^{-t^2}\, dt$.

170. Sök den totala första differentialen av funktionen av två variabler

$$f(x,y) = \int_0^{xy} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Beräkna gränsvärdena 171–175:

171. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$.

172. $\lim_{n\to\infty} \left(\cos^3 \frac{a}{n} + \cos^3 \frac{2a}{n} + \cdots + \cos^3 \frac{(n-1)a}{n} \right)$.

173. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

174. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

175. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+2}{n}\cdot\dfrac{n+3}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

176. Visa, att $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}{\log n} = 1$.

177. Visa, att för alla positiva heltal n gäller

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}+\cdots<\frac{1}{n}.$$

178. Bevisa olikheterna (n godtyckligt positivt heltal)

$$0<\frac{\pi}{4}-\left(\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)<\frac{1}{2n}.$$

179. Beräkna längden av den båge av kurvan $y = \log\sin x$, som ligger i intervallet $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

180. Beräkna båglängden mellan två punkter på kurvan $y = \cosh x$.

181. Beräkna längden av kurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ samt den av kurvan inneslutna ytan.

182. Beräkna längden av den minsta båge, som avskäres av en korda genom brännpunkten i en parabel med parametern $2p$.

183. Cykloiden $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ är given. Beräkna längden av en båge (från $t = 0$ till $t = 2\pi$) samt den yta, som inneslutes mellan denna båge och x-axeln.

184. Beräkna ytan av en ögla av kurvan $x = a\sin 2t$, $y = a\sin t$.

185. Beräkna ytan mellan kurvan $y^2 = \dfrac{x-1}{2-x}$ och dess asymptot.

186. Den yta, som begränsas av kedjelinjen $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, x-axeln och linjerna $x = a$ och $x = -a$ roterar kring x-axeln. Beräkna den sålunda uppkommande rotationskroppens volym och totala yta.

187. Hur stor del av ytan $x^2 + xy + y^2 \le 1$ ligger över linjen $y = 1$?

Analytisk geometri

188. En rotationskon med öppningsvinkeln 2α skäres längs en ellips av ett plan, som bildar vinkeln β med konens axel och har avståndet p från konens topp. Beräkna snittellipsens axlar.

189. En rotationskon med öppningsvinkeln $120°$ skäres av ett plan, i en liksidig hyperbel med brännpunktsavståndet $2c$. Beräkna planets vinkel med konens axel och dess avstånd från konens topp.

190. En rotationskon med öppningsvinkeln 2α skäres av ett plan, som är parallellt med ett tangentplan till konen och har avståndet p från konens topp. Beräkna snittparabelns parameter.

Angiv lineära, ortogonala koordinattransformationer, som överföra andragradskurvorna 191–193 till enklaste form, samt diskutera och rita kurvorna:

191. $x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 2 = 0.$

192. $11x^2 + 4y^2 - 24xy + 46x - 32y + 59 = 0.$

193. $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0.$

Diskutera kurvorna 194–196 för alla möjliga värden på a:

194. $ax^2 + 2axy - y^2 - 2x - 2ay + a = 0.$

195. $(5a-16)x^2 + (5a-9)y^2 + 24xy - (10a-80)x + (20a-60)y - a^2 + 30a - 100 = 0.$

196. $(2a^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2xy + 2a(x + y) - a^2 = 0.$

197. Det rätvinkliga koordinatsystemet $(x,\ y)$ är givet. Man definierar ett nytt dylikt $(x',\ y')$ genom att till x'-axel välja den räta linjen $2x + y + 7 = 0$ och till y'-axel den räta linjen $x - 2y - 4 = 0$. Angiv i $x'y'$-systemet ekvationen för den ellips, vars ekvation i xy-systemet är $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 44x + 38y + 65 = 0$.

198. Bestäm ytan av ellipsen $x^2 + 4xy + 20y^2 - 6x - 8y + \dfrac{5}{4} = 0.$

199. Sök excentriciteten för den ellips, som tangerar parabeln $y^2 = x$ i punkterna $(1,\ -1)$ och $(4,\ 2)$ och som går genom punkten $(4,\ 0)$.

200. Visa, att ekvationen $12x^2 + 7xy - 12y^2 - 38x + 41y - 122 = 0$ betyder en liksidig hyperbel, samt angiv ekvationen för denna i det koordinatsystem, där hyperbelns asymptoter äro koordinataxlar.

201. Bestäm asymptoterna till hyperbeln $x^2 + 6xy + 8y^2 - 2x + 8y = 0.$

202. Skriv upp ekvationen för den hyperbel, som har sina asymptoter utefter linjerna $2x + 3y - 1 = 0$ och $x - 2y + 2 = 0$ och som går genom origo.

203. Sök ekvationen för den hyperbel, som har samma brännpunkter som ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 1$ och vars konjugataxel har samma längd som ellipsens lillaxel.

204. Visa, att ekvationen $(x + y)^2 + 2x + 6y - 1 = 0$ betyder en parabel, och angiv dess axel, vertex och brännpunkt.

205. Sök ekvationen för styrlinjen till parabeln $(y - x)^2 = ax$.

206. Vilken är ekvationen för den parabel med axeln parallell med x-axeln, som går genom punkten $(1, 1)$ och där har samma krökningscentrum som kurvan $y = x^3$?

207. Angiv ekvationen för det kägelsnitt, som går genom punkterna $(2, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ och $(0, 0)$, samt bestäm brännpunkternas lägen och axlarnas längder.

208. Skriv upp ekvationen för det kägelsnitt, som går genom punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(4, 2)$ och $(4, a)$. Diskutera kurvorna för olika värden på a.

209. Bestäm orten för medelpunkten till andragradskurvorna $ax^2 - 2axy - y^2 - 2x + 2ay + a = 0$.

210. Sök orten för brännpunkten till parabelskaran

$$16x^2 + 9y^2 + 24xy - (4a - 6)x - (3a + 8)y = 0.$$

211. Bestäm orten för medelpunkten till de kägelsnitt, som tangera cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i punkterna $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

---

212. I ett plan äro två punkter A och B och en rät linje givna. Angiv genom konstruktion eller räkning den punkt på den räta linjen, från vilken sträckan AB synes under största möjliga vinkel.

213. Två punkter och en rät linje äro givna. Bestäm på den räta linjen en punkt sådan, att summan av dess avstånd till de givna punkterna blir minimum. Tolka resultatet och bevisa det även elementargeometriskt.

214. En materiell punkt rör sig i xy-planet med hastigheten v_1 ovanför x-axeln och hastigheten v_2 under x-axeln. Vilken väg beskriver partikeln för att på kortast möjliga tid passera från punkten (x_1, y_1) till punkten (x_2, y_2), där $y_1 > 0$ och $y_2 < 0$?

215. I planet äro givna en vinkel och en punkt. Vilken är den räta linje genom punkten, som tillsammans med vinkelbenen innesluter en triangel med minsta möjliga yta?

216. En triangel är begränsad av två fixa och en rörlig rät linje, som går genom en fix punkt. Sök orten för triangelns tyngdpunkt.

217. Bestäm orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar en given rät linje och skär en given cirkel under räta vinklar.

218. Sök orten för medelpunkten till de cirklar, som synas från två givna punkter under givna vinklar.

219. En cirkel och en punkt inuti densamma äro givna. Med diametrar som storaxlar konstrueras ellipser, som gå genom den givna punkten. Sök orten för dessa ellipsers brännpunkter.

220. Bestäm geometriska orten för den punkt, från vilken en given ellips synes under konstant vinkel.

221. Omkring en rektangel med sidorna $2p$ och $2q$ omskrivas ellipser. Vilken är den minsta ellipsytan?

222. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna till en ellips i ändpunkterna av en rörlig korda av konstant längd.

223. Från en parabels vertex dragas tvenne kordor, som bilda rät vinkel med varandra. Sök orten för det fjärde hörnet i den rektangel, som uppritas på kordorna.

224. Sök orten för fotpunkten av perpendikeln från parabelns $y^2 = 4ax$ brännpunkt mot parabelns normaler.

225. Bestäm orten för brännpunkten till de parabler, som gå genom en given punkt och i denna ha en given cirkel till krökningscirkel.

226. Beräkna ytan av det minsta segment, som begränsas av parabeln $y^2 = 4ax$ och en rät linje genom punkten (a, a).

227. Hur stort ytinnehåll har det segment av parabeln $y^2 = 4ax$, som avskäres av normalen i en punkt (x, y) på parabeln?

228. Sök geometriska orten för en punkt sådan, att tangenterna från densamma till parabeln $y^2 = 2px$ bestämma en tangentkorda, som av parabeln avskär ett segment med konstant yta $= a^2$.

229. En rät cirkulär kon med basradien $= \dfrac{a}{2}$ och generatrisen $= b$ skäres med ett plan parallellt med ett tangentplan till konen. Vilken är den största möjliga ytan av det utskurna parabelsegmentet?

230. Var och under vilken vinkel skära kurvorna $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ och $y^2 = \dfrac{(2a - x)^3}{x}$ varandra?

231. Från en fix punkt A på en cirkels periferi är kordan AP utdragen till en punkt Q så, att rektangeln av AP och PQ är $=$ kvadraten på cirkelns diameter. Sök ekvationen för och uppritа orten för Q. (Använd gärna polära koordinater.)

232. En cirkel rullar på en rät linje. Upprita och diskutera den kurva, som beskrives av mittpunkten på en av cirkelns radier.

233. Från origo drages en sträcka parallell med och lika stor som krökningsradien till cykloiden $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ i en punkt P. Sök orten för sträckans andra ändpunkt, när P genomlöper cykloiden.

234. Sök och konstruera orten för den punkt, från vilken två mot varandra vinkelräta tangenter kunna dragas till kurvan $y^3 = x^2$.

235. Bestäm orten för den punkt, från vilken två mot varandra vinkelräta tangenter kunna dragas till kurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

---

236. En triangel bildas av tangenter till en parabel. Visa, att höjdernas skärningspunkt ligger på parabelns styrlinje.

237. En rät linje skär en hyperbel och dess båda asymptoter. Visa, att de två stycken på linjen, som avskäras mellan hyperbeln och asymptoterna, äro lika långa.

238. Bevisa, att en rörlig tangent till en hyperbel jämte asymptoterna begränsa en triangel med konstant yta.

239. Tre hyperbler äro uppritade så, att de tangera var sin sida i en triangel och ha de båda återstående sidorna till asymptoter. Visa, att produkten av hyperblernas parametrar är = kuben på den i triangeln inskrivna cirkelns diameter.

240. Från medelpunkten av en ellips fälles en perpendikel mot tangenten. Vilket är det största möjliga avståndet från perpendikelns fotpunkt till tangeringspunkten?

241. Vilken är den minsta triangel, som begränsas av en tangent och de båda axlarna till en ellips?

242. Bestäm den minsta vinkel, som tangenten till en ellips bildar med radius vector från medelpunkten.

243. Visa, att 1) summan av kvadraterna på två konjugatdiametrar i en ellips är konstant och 2) summan av de inverterade kvadraterna på två vinkelräta diametrar i en ellips är konstant.

244. Visa, att om alla möjliga rektanglar omskrivas kring en ellips, så har den fyrhörning, som har sina hörn i tangeringspunkterna, en konstant omkrets.

245. Brännpunkterna till en ellips betecknas med A och B, deras spegelbilder i avseende på en variabel tangent till ellipsen med A' och B'. Bevisa, att produkten av sträckorna AA' och BB' är konstant.

246. En ellips är inskriven i en triangel så, att dess ena brännpunkt sammanfaller med den omskrivna cirkelns medelpunkt i triangeln. Visa, att den andra brännpunkten faller i höjdernas skärningspunkt.

247. Bevisa, att om en i en triangel inskriven ellips tangerar triangelns sidor i deras mittpunkter, så sammanfaller ellipsens medelpunkt med triangelns tyngdpunkt.

248. Två fixa parallella tangenter till en ellips avskära av en rörlig tangent ett visst stycke. Visa, att detta stycke från var och en av brännpunkterna synes under konstant vinkel.

249. I en fix punkt P på en ellips drages normalen. A_1 och A_2 äro sådana punkter på ellipsen, att normalen är bissektris till vinkeln A_1PA_2. Bevisa, att alla sammanbindningslinjer A_1A_2 skära varandra i en punkt.

250. Från en fix punkt P på en ellips dragas två vinkelräta kordor PA_1 och PA_2. Bevisa, att alla linjer A_1A_2 gå genom en fix punkt.