Uppsala universitet
Matematiska institutionen

Övningsuppgifter i komplex analys

A. Topologi

A1. a) Definiera A° och $\overline{A}$. b) Bestäm A° och $\overline{A}$ då $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \text{ rationella}\}$.

A2. Vilka av följande mängder M är öppna/slutna?

a)	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$	b)	$\mathbf{Q}$ = de rationella talen på $\mathbf{R}$
c)	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1\}$	d)	$\{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$
e)	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1,\ y = 0\}$	f)	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy > 1\}$

A3. a) Gäller $\partial M = \partial(\overline{M})$? Bevis eller motexempel.
b) Om $A \subseteq B$ gäller då $A^\circ \subseteq B^\circ$?

A4. Bevisa att en mängd M är sluten om och endast om varje konvergent följd av punkter i M har sitt gränsvärde i M.

A5. Bevisa eller ge motexempel till följande relationer:

a)	$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$	b)	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
c)	$\partial A = \partial(A^\circ)$	d)	$\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

A6. Visa att mängden av hopningspunkter till en följd $\{a_n\}_1^\infty$ är sluten.

B. Elementära funktioner

B1. Ange på formen $a + ib$ $(a, b \in \mathbf{R})$ värdet av e^z för z-värdena a) $i\pi/2$, b) $i\pi$, c) $-i\pi/2$, d) $-i\pi/4$, e) $2\pi i/3$, f) $2 + i$, g) $\ln 5 + 3\pi i/4$

B2. Ange på formen $a + ib$ $(a, b \in \mathbf{R})$ talen a) $\sin i$, b) $\cos(2 - i)$, c) $\cos(\pi/4 + i)$, d) $\sin(x + iy)$

B3. Lös fullständigt ekvationen $e^z = w$ för a)$w = 2$, b) $w = -1$, c) $w = i$, d) $w = 3 - 4i$

B4. Ange på formen $a + ib$ $(a, b \in \mathbf{R})$ talen a) $\mathrm{Log}(1 + i)$, b) $\mathrm{Log}(1 - i)^5$, c) $\mathrm{Log}(-1)$, d) $\mathrm{Log}(-i)$.

B5. Lös ekvationerna a) $\sin z = 1$, b) $\cos z = 2i$, c) $\sin z = 100$.

B6. Visa att $|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

B7. Ange alla lösningar till ekvationen $e^{e^z} = 1$.

B8. Ange värdet av $(2 - i)^z$ för a) $z = 1$, b) $z = 2$, c) $z = 1 - i$.

B9. Ange tal z, α, β sådana att $\left(z^\alpha\right)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$.

B10. Bestäm en gren av z^{1+i}, för vilken -1 tillhör definitionsmängden. Vad blir för denna gren värdet av $(-1)^{1+i}$?

B11. Bestäm real- och imaginärdelarna av a) e^{e^z}, b) z^z.

B12. Låt z röra sig på en halvstråle från origo ($\arg z$ = konstant). För vilka riktningar existerar a) $\lim e^z$, b) $\lim(z + e^z)$?

B13. Visa att $|\sin(x + iy)| = |\sin x + i \sin y|$, om x och y är reella.

B14. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cot z = 2 + i$.

B15. Ange den lösning till ekvationen $\cos z + \sin z = i$, som ligger i övre halvplanet och har minst avstånd till origo.

B16. Lös fullständigt ekvationen $\tan z = 2i$.

B17. Lös fullständigt ekvationen $5\cos z - 3i\sin z = 2$.

B18. Lös fullständigt ekvationen $e^{\tan z} = 1$.

B19. Lös fullständigt ekvationen $\sin(\cos z) = 1$.

C. Analytiska och harmoniska funktioner

C1. Visa att om f är analytisk i ett öppet sammanhängande område D, och om någon av $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ eller $\arg f$ är konstant i D, så är f själv konstant i D.

C2. Visa att en analytisk funktion f, vars real- och imaginärdelar uppfyller ekvationen $\operatorname{Im} f = \big(\operatorname{Re} f\big)^2$, måste vara konstant.

C3. Antag att f och g båda är analytiska i ett öppet sammanhängande område D och att de har samma realdel där. Visa att då är f och g lika så när som på en rent imaginär konstant: $f(z) = g(z) + iK$, $z \in D$ (K reell).

C4. Antag att f är analytisk i ett öppet sammanhängande område D och låt D^* beteckna spegelbilden av D i reella axeln, dvs $D^* = \{z\colon \bar{z} \in D\}$. Definiera funktionen $g(z)$ för $z \in D^*$ genom

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Visa att g är analytisk i D^*.

C5. Visa att om v är konjugerat harmonisk till u så är $-u$ konjugerat harmonisk till v.

C6. Bestäm alla funktioner som är konjugerat harmoniska till

$$a)\quad u = x^3 - 3xy^2 + 2xy + x, \qquad\qquad b)\quad u = x^2 - y^2 + 5.$$

C7. Ange alla konjugerat harmoniska funktioner till

$$a)\quad u = \sin x \cosh y, \qquad\qquad b)\quad u = e^x(y\cos y + x\sin y)$$

C8. Sök alla analytiska funktioner f för vilka $\operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = xy$.

C9. Bestäm de analytiska funktioner $f = u + iv$, för vilka $x \cdot u(x, y)$ är realdelen av en analytisk funktion.

C10. Bestäm de analytiska funktioner $f = u + iv$, för vilka $u(x, y) = x^3 + xg(y)$, där g är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion.

C11. Bestäm alla analytiska funktioner med realdel

$$ye^{-2x}\cos 2y - xe^{-2x}\sin 2y.$$

C12. Antag att u är harmonisk i ett öppet sammanhängande område i planet och att v är en till u konjugerat harmonisk funktion. Visa att

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\Big).$$

C13. Bestäm alla analytiska funktioner vilkas realdel är

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2}\sin 2xy.$$

C14. Antag att $f = u + iv$ är analytisk och inte identiskt konstant.

a) Visa att uv är realdel av en analytisk funktion.
b) Visa att $u^2 + v^2$ inte kan vara realdel av en analytisk funktion.

C15. Bestäm alla analytiska funktioner f vilkas realdel $u = u(x, y)$ satisfierar differentialekvationen $\frac{\partial u}{\partial x} = -u$.

C16. Bestäm alla analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + 3y$. $(z = x + iy)$.

C17. Bestäm alla analytiska funktioner $f = u + iv$, där $f(0) = 0$ och $u(x, y) = \phi(x)(1 - y)$, och ϕ är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}$.

C18. Bestäm alla analytiska funktioner av formen

$$f(z) = a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7y^3$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_7$ är komplexa konstanter.

D. Konform avbildning

D1. Bestäm den Möbiusavbildning, som överför punkterna 1, 0 och -1 på respektive 0, 1 och ∞.

D2. Sök bilden av $z = 0$ under den Möbiusavbildning, som överför i, ∞ och 1 på 0, 1 respektive $-i$.

D3. Ange en Möbiusavbildning, som överför området $|z - i| < 2$ på övre halvplanet och som är sådan att imaginära axeln avbildas på sig själv och punkten i är fixpunkt.

D4. Sök en Möbiusavbildning, som avbildar linjen genom $-i$ och 1 på enhetscirkeln och har 0 och 1 som fixpunkter.

D5. En Möbiusavbildning T överför övre halvplanet på sig självt och avbildar cirkeln $|z-1| = 1$ på imaginära axeln, varvid punkten $1 + i$ avbildas på punkten i. Ange T. Är T entydigt bestämd av de givna villkoren? Vad är bilden av linjen $\operatorname{Im} z = 1$?

D6. Bestäm alla Möbiusavbildningar, som överför området $|z| < 2$, $|z-1| > 1$ på området $|\operatorname{Im} w| < 1$.

D7. Ange en Möbiustransformation, som avbildar cirklarna $|z| = 1$ och $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ på koncentriska cirklar. Vad blir förhållandet mellan bildcirklarnas radier?

D8. Ange en Möbiustransformation, som avbildar området utanför enhetscirkeln på vänstra halvplanet. Vad blir bilderna av cirklar $|z| = r > 1$ och linjer genom origo?

D9. Ange en Möbiusavbildning som överför cirkeln $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ på cirkeln $|w + 2| = 2$ och avbildar 0 och $1 - i$ på 0 respektive -2.

D10. Ange en konform avbildning, som överför området $|z + 3| < \sqrt{10}$, $|z - 2| < \sqrt{5}$ på det inre av första kvadranten.

D11. Ange en konform avbildning av området $|z - 1| > 1$, $|z| < 2$ på övre halvplanet.

D12. Avbilda konformt området $0 < \arg z < \frac{\pi}{\alpha}$, $0 < |z| < 1$ (där $\alpha > 1$) på det inre av enhetscirkeln.

D13. Ange bilden av området $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ under avbildningen $w = e^z$.

D14. Området $|z| > a$ avbildas genom en Möbiustransformation på $|w| < a$ så att en given punkt p, $|p| > a$, avbildas på origo. Bestäm diametern hos bilden av cirkeln $|z| = 2a$.

D15. Från det inre av enhetscirkeln borttages de punkter, för vilka $\operatorname{Im} z = 0$ och $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < 1$. Avbilda det återstående området konformt på halvplanet $\operatorname{Re} w > 0$.

D16. Bestäm en konform avbildning av det längs den positiva x-axeln uppskurna komplexa planet på det inre av enhetscirkeln, så att punkten -4 avbildas på origo.

D17. Visa att det finns en Möbiusavbildning som konformt avbildar det genom olikheterna

$$|z-1+2i| < 2\sqrt{2}, \quad |z-1-2i| < 2\sqrt{2}, \quad |z| > 1$$

definierade området på det inre av triangeln med hörnen $w = 0$, $w = 1$ och $w = i$.

D18. På vilket område i w-planet avbildar funktionen $w = \tan z$ den kvadrat i z-planet som har tre av sina hörn i origo, $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi i}{2}$?

D19. På vilket område avbildas cirkelskivan $|z| < 1$ genom avbildningen

$$w = F(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \; F(0) = \infty?$$

(Ledning: Man kan införa hjälpvariablerna $W = \frac{w-1}{w+1}$ och $Z = \frac{z-1}{z+1}$.)

D20. Visa att man kan definiera $f(z) = \log \dfrac{z}{z-1}$ så att f blir en entydig analytisk funktion i $\Omega = \{z\colon 0 \le \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ och så att $f(\frac{1+i}{2}) = \frac{i\pi}{2}$. Beräkna därefter $f(\frac{1-i}{2})$ på formen $a + ib$, där a och b är reella.

D21. Bestäm alla Möbiusavbildningar som avbildar övre halvplanet på sig sjävt och har i som fixpunkt.

D22. Bestäm alla Möbiusavbildningar som avbildar $\operatorname{Im} z > 0$ på $|w| < 1$ och $z = i$ på $w = \frac{1}{2}$.

D23. Avbilda $\{z\colon |z| < 2, \text{ och } |z-i| > 1\}$ konformt på $\{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$ med en Möbiusavbildning så att 0 blir en fixpunkt.

D24. $\Gamma_1 = \{z\colon |z-2a| = a\}$, $a > 0$ och $\Gamma_2 = \{z\colon |z| = 1\}$ är två givna cirklar. Bestäm de värden på a för vilka man kan avbilda Γ_1 och Γ_2 på två koncentriska cirklar med en Möbiustransformation.

D25. Ange en konform avbildning av halvcirkelskivan $\Omega_1 = \{z\colon |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ på strimlan $\Omega_2 = \{z\colon |\operatorname{Re} z| < 1\}$.

D26. Ange en konform avbildning av området $\{z\colon |z-1| < 2, |z+1| < 2\}$ på det inre av enhetscirkeln så att origo avbildas på origo.

D27. Avbilda sektorn $\Omega = \{z\colon \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$ konformt på det inre av enhetscirkeln så att i avbildas på origo.

D28. Bestäm bilden av området $\big\{z\colon \operatorname{Re} z > 0, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\big\}$ vid avbildningen

$$z \mapsto \left(\frac{e^z + i}{e^z - i}\right)^3.$$

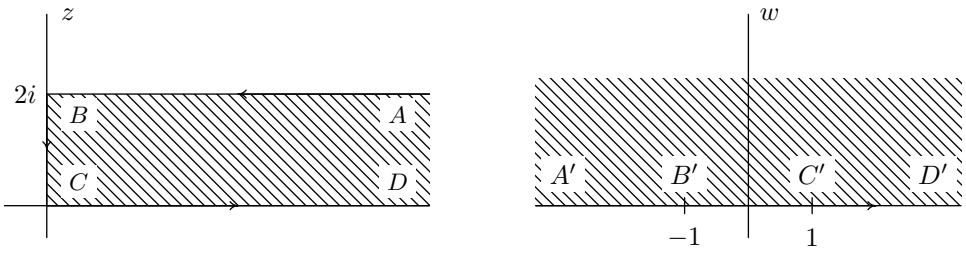
D29. Cirklarna $|z-1| = 1$ och $|z| = 1$ uppdelar planet i fyra områden av vilka ett innehåller punkten $z = -1/2$. Avbilda detta område konformt på övre halvplanet.

D30. Avbilda området $\{z\colon \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}, |z| < 1\}$ konformt på det inre av enhetscirkeln $|w| < 1$ så att randpunkten $z = \frac{1}{2}$ övergår till randpunkten $|w| = 1$.

D31. Bestäm en Möbiusavbildning som avbildar cirkeln $|z-2i| = 2$ på reella axeln och som har fixpunkterna $1+2i$ och 0. Hur många Möbiusavbildningar finns det som uppfyller dessa villkor?

D32. Bestäm en konform avbildning av området $\{z\colon |z| > 1\} \setminus]1, \infty[$ på det inre av enhetscirkeln. (Tecknet $\setminus$ betyder mängdsubtraktion och $]1, \infty[$ är ett intervall på reella axeln.)

D33. Bestäm en Schwarz-Christoffel-transformation, som avbildar området i z-planet på området i w-planet enligt följande figur:



D34. Bestäm en funktion som avbildar övre halvplanet på det inre av en triangel med hörnen $w = 0, 1, i$ svarande mot $z = 0, 1, \infty$ respektive.

D35. Bestäm bilden av övre halvplanet under avbildningen

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{dz}{z^{3/4}(z-1)^{1/2}},$$

där de ingående potensfuktionerna definieras av $w^a = \exp\big(a(\ln|w| + i\arg w)\big)$ med $-\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$. Svaret kan uttryckas med hjälp av den s.k. *betafunktionen*, som definieras av

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

E. Dirichlets problem

E1. u är harmonisk i området $|z| < 1$ och har randvärdena $= 1$ på $\{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ och $= 0$ på $\{z\colon |z| = 1,\ \operatorname{Re} z < 0\}$.
a) Bestäm $u(0)$.
b) Bestäm ekvipotentialkurvorna för u, dvs de kurvor längs vilka u är konstant.

E2. Bestäm en funktion $u(x,y)$ som är harmonisk i halvcirkelskivan $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$ och som antar värdet 1 på den rätlinjiga delen av randen och värdet 0 på den cirkelbågformade. I vilken punkt på imaginära axeln antar u värdet $\frac{1}{2}$?

E3. Funktionen u är harmonisk i det inre av enhetscirkeln med randvärdet 1 på $|z| = 1$, $|\arg z| < \pi/4$, och randvärdet 0 på $|z| = 1$, $\pi/4 < |\arg z| \le \pi$. Bestäm en sådan funktion u. I vilken punkt på reella axeln antar u värdet $1/2$?

E4. Bestäm en funktion u, harmonisk i halvbandet $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, med randvärdena 1 för $z = iy$, $0 < y < \pi$, 0 för $z = x$, $x > 0$, och 0 för $z = x + i\pi$, $x > 0$. I vilken punkt på linjen $y = \frac{\pi}{2}$ har u värdet $\frac{1}{2}$?

E5. Bestäm en funktion som är harmonisk i cirkelringen $1 < |z| < 2$ och har randvärdena 2 för $|z| = 1$, och 3 för $|z| = 2$.

E6. Bestäm en funktion som är harmonisk i området $|z| < 1$, $|z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}$, och som antar värdet 1 på $|z| = 1$ samt värdet 0 på $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$.

E7. Bestäm en funktion $u(x,y)$, harmonisk i första kvadranten och med randvärden $= 1$ på intervallet $]1,2[$ av x-axeln, $= 0$ för övrigt. (För full poäng skall svaret vara uttryckt med elementära funktioner av reella variabler.)

E8. Bestäm en funktion $u(x,y)$, harmonisk i området $\{z = x + iy\colon |z| < 1,\ z \ne x \text{ med } 0 \le x \le 1\}$, med randvärdena $u(x,0) = 1$, $0 < x < 1$ och $u(z) = 0$, $|z| = 1$, $z \ne 1$.

F. Integration m.m.

F1. Beräkna integralen $\int_C |z-1|\,|dz|$, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln.

F2. Beräkna $\int_C \frac{dz}{z}$ där C är

a) halvcirkeln i övre halvplanet från 1 till -1,

b) halvcirkeln i undre halvplanet från 1 till -1,

F3. Beräkna $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-i}$, där C är den positivt orienterade cirkeln $|z-2-i|=1$.

F4. Beräkna $\displaystyle\int_C e^z\,dz$, där C är halvcirkeln i högra halvplanet från $-i$ till i.

F5. Beräkna $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^2}$, där C är den positivt orienterade cirkeln a) $|z|=\frac{1}{2}$, b) $|z-\frac{i}{2}|=1$, c) $|z|=2$.

F6. Beräkna $\displaystyle\int_C \frac{1-\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz$, där C är kurvan $z(t)=2+e^{it}$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

F7. Beräkna $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz$ (positiv orientering).

F8. Beräkna för olika värden på det komplexa talet a ($|a|\neq 1$) integralen $\displaystyle\int_C \frac{ze^{z^2}}{z-a}\,dz$, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln.

F9. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos^2 z}{(z-1)^2}\,dz$ (kurvan genomlöps ett varv i positiv led).

F10. Om $f(w)=\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{2e^z+\cos z}{(z-w)^2}\,dz$, vad är då $f'(0)$?

F11. Beräkna för alla reella $a>0$ ($a\neq 2$) integralen $\displaystyle\int_C \frac{z^3}{z^4-a^4}\,dz$, där C är den positivt orienterade cirkeln $|z-1|=1$.

F12. Visa att om u är harmonisk i hela planet och $u(z)\ge 0$ för alla z så är u konstant.

F13. Antag att f är analytisk och $|f(z)|\le M$ för $|z|\le R$. Bestäm en övre gräns för $|f^{(n)}(z)|$ för $|z|\le r<R$.

F14. Visa att de successiva derivatorna till en analytisk funktion f i en punkt z_0 aldrig kan uppfylla olikheterna $|f^{(n)}(z_0)|>n!n^n$. formulera ett skarpare påstående av samma art.

F15. Låt f och g vara analytiska i $|z|\le 1$ och antag att de saknar nollställen där, samt att $|f(z)|=|g(z)|$ på $|z|=1$. Visa att det finns en konstant α med $|\alpha|=1$ sådan att $f(z)=\alpha g(z)$.

F16. Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$. Gäller då att om $|f|$ är begränsad på randen till Ω så är f begränsad i Ω? Bevis eller motexempel! (f antas vara analytisk i ett område som innefattar Ω och dess rand.)

F17. Antag att $f(z)$ är analytisk i $|z|<1$ och $f(0)=0$. Definiera $g(z)=\dfrac{f(z)}{z}$ för $z\neq 0$. a) Visa att $g(0)$ kan definieras så att g blir kontinuerlig för $z=0$. b) Visa att den enligt a) utvidgade funktionen är analytisk i $|z|<1$. (Ledning: Moreras sats!)

F18. Låt f vara en hel funktion med $f(0)=0$. Visa att f är reell på den reella axeln om och endast om f' är reell på den reella axeln.

F19. Beräkna integralen $\int_C \left(\sin z + ze^{z^2} + \frac{1}{z^2-z-2} + |z-2-i|\right) dz$, där kurvan C definieras av $z(t) = 2 + i + 3e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

F20. Beräkna integralen $\int_C \left(z^2 \sin z + \left|z + \frac{3}{4}\right| + e^{\sin z} \cos z + \frac{1}{z(z+1)}\right) dz$, där C är kurvan som ges av $t \mapsto z(t) = \frac{1}{4}\left(2e^{2\pi i t} - 3\right)$, $0 \le t \le 1$.

F21. C är kurvan $t \mapsto z(t) = e^{(1+i)t},\ 0 \le t \le 2\pi$. Beräkna $\int_C \frac{dz}{z(z+1)}$.

F22. Låt C vara den kurva som definieras av

$$z(t) = \begin{cases} t - \sin t + i(1 - \cos t) & 0 \le t \le 2\pi \\ 4\pi - t + \sin t - i(1 - \cos t) & 2\pi \le t \le 4\pi. \end{cases}$$

Beräkna $\int_C \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$.

F23. Integralen $\int_1^z w^{-1} \sin w\, dw$ tas längs en godtycklig kurva i planet, som ej passerar origo. Visa att $f(z)$ är *entydigt* bestämd för alla $z \neq 0$. Är f analytisk för $z \neq 0$? Motivera!

F24. Beräkna integralen $\int_C \frac{dz}{z^2-4}$, där C är kurvbågen $z = z(t) = e^{it},\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

F25. Beräkna integralen $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$, där C är en kurva som går från $z = \sqrt{3}$ till $z = -1$ och på så sätt att den hela vägen ligger i övre halvplanet och, bortsett från slutpunkten, utanför enhetscirkeln.

F26. Beräkna integralen

$$\int_C \left(\cos^2 z \sin z + \frac{2}{2z^2+z-1} + e^{z^2}\right) dz$$

där C är den slutna kurvan $t \mapsto z(t) = (t^2 - t + 1)e^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

F27. Visa att $\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta)\, d\theta = 2\pi$ för alla $a \in \mathbb{R}$. (Ledning: studera $\int_C \frac{e^{az}}{z}\, dz$, där C är en lämpligt vald kurva.

G. Numeriska serier

G1. Undersök om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{999}{1000}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\sqrt{n}}{(2n+3)^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 2^{2n}}{e^{2n} - e^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^3}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n \ln n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n} - e^{\sin 1/n}\right)$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{n}{n^2+1}\right)$

G2. Antag att $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergerar och att $0 < b_n \le a_n$ för alla n. Vad kan sägas om konvergensen av $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$? Motivera!

G3. Bestäm varje reellt tal a sådant att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{2/n}-\sqrt{1+\frac{a}{n}}\right)$$

konvergerar.

G4. För vilka reella x konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$?

G5. Bestäm de värden på det reella talet a för vilka serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^a}-1}{\arctan e^n}$ är konvergent.

G6. Beräkna för $a>0$ summan $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(am+n)}$.

G7. Visa att det finns ett reellt tal A sådant att

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(m+n)^2} > \ln N - A \qquad \text{för } N=1,2,3,\ldots.$$

G8. Sätt $U_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$. Undersök om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ är konvergent.

G9. Beräkna $\displaystyle\sum_{k,n=2}^{\infty} k^{-n}$.

G10. Sätt $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ och antag att $s_n\to s$ då $n\to\infty$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=s.$$

Diskutera ovanstående i det fall då $a_k=(-1)^k$.

G11. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ och $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara givna talföljder. Sätt $B_k=\sum_{j=1}^{k} b_j$, $B_0=0$. Visa formeln

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} B_k(a_{k+1}-a_k), \quad 1\le m<n.$$

(Abels partiella summation.) Jämför med formeln för partiell integration.

G12. Visa med hjälp av Abels partiella summation följande satser:
Sats α: Om
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ är konvergent, och
(ii) följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är reell, monoton och begränsad,
så konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$.
Sats β: Om
(i) delsummorna $\sum_{n=1}^{k} u_n$ av serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ är begränsade,
(ii) följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ av reella tal är monoton och sådan att $\lim_{n\to\infty} a_n=0$,
så konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$.

G13. Visa att $e^{z+w}=e^z e^w$ genom att använda att $e^z=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

H. Funktionsföljder och funktionsserier

H1. a) Definiera likformig konvergens för en funktionsföljd $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ på en mängd $M \subseteq \mathbb{R}$.
b) Är funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $f_n(x) = ne^{-n^2 x} \sin nx$, likformigt konvergent på intervallet $[0, 1]$?
c) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

H2. Låt $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$. Konvergerar funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ likformigt på
a) intervallet $0 \le x \le 1$, b) intervallet $x \ge 1$?
c) Gäller att $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$?

H3. För vilka x existerar $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ och i vilka intervall är konvergensen likformig, då $f_n(x)$ ges av
a) x^n, b) $(1-x^2)^n$, c) $(1-x^2)^{-n}$, d) $n^3 \sin^3 \dfrac{x}{n}$, e) $\dfrac{e^{n^2 x}+1}{e^{n^2 x}-1}$?

H4. Ange de mängder $M \subseteq \mathbb{C}$ i vilka nedanstående funktionsföljder konvergerar:
a) $\left\{\dfrac{\cos nz}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{n^z z^n\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\left\{\dfrac{z^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

H5. För vilka komplexa z konvergerar följden $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$f_n(z) = \frac{1}{1+z+z^2+\cdots+z^n}?$$

H6. Visa att $f_n(z) = e^{-nz}$ konvergerar likformigt mot 0 i $\operatorname{Re} z \ge \delta$ för varje $\delta > 0$. Är konvergensen likformigt i $\operatorname{Re} z > 0$?

H7. Låt $f_n(x) = \dfrac{1}{2+(\tan x)^n}$, $0 \le x < \pi/2$. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.

H8. Undersök följande funktionsserier med avseende på konvergens och likformig konvergens:
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+x^{2n}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^n$.

H9. Visa att var och en av följande serier representerar en funktion som är analytisk i högra halvplanet:
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{z+1}}$.

H10. Låt $f_n(x) = \dfrac{1}{2+x^n(x+2)^n}$.

a) För vilka x existerar $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$? Ange gränsfunktionen.
b) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx$. Motivera ordentligt.

I. Potensserier

I1. Låt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n$ vara en potensserie och antag att dess koefficienter är sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = K$$

Visa att serien har konvergensradien $1/K$.

I2. Beräkna de tre första (icke försvinnande) koefficienterna i potensserieutvecklingen kring origo av funktionen

a) $\sin \dfrac{1}{1-z}$, b) $\exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$, c) $e^{z \sin z}$, d) $\operatorname{Log}\big(1+e^z\big)$.

I3. Beräkna summan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

I4. Härled en formel för a_n i en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, vars summa $y(x)$ satisfierar differentialekvationen $xy'' + y' - y = 0$ med $y(0) = 1$. Visa att serien ger en lösning på hela $\mathbb{R}$.

I5. Visa att för $|z| < 1$ är $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, där funktionen till vänster är principalgrenen av logaritmen. (Ledning: utnyttja satsen om att en potensserie kan deriveras termvis innanför konvergenscirkeln.)

I6. Visa att för $|z| < 1$ är $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$. (Ledning: se föregående övning.)

I7. Ange konvergensradien för potensserieutvecklingen kring origo av $\dfrac{4z^2 + \pi^2}{e^z + e^{-z}}$.

I8. Bestäm konvergensradien för taylorutvecklingen för funktionen $\dfrac{z^3 - 2z^2 + 2z}{\sin \pi z}$ kring punkten $\frac{1}{2} + 2i$.

I9. Ange konvergensradien för potensserieutvecklingen kring origo av $\dfrac{z^4 + 4\pi^2 z^2}{e^z + e^{-z} - 2}$.

I10. Låt f vara analytisk i $|z| < 1$. Visa att om $f(x) = f(-x)$ för $-1 < x < 1$, så innehåller taylorutvecklingen kring origo av f endast jämna potenser av z.

I11. Låt f vara analytisk i området $\operatorname{Re} z > 0$. Visa att det finns komplexa tal $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sådana att

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-1)^n}{(z+1)^n}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

I12. Funktionen f är analytisk för $|z| < 1$ och $f(0) = 0$. Sätt $f(z) = f\big(re^{i\theta}\big) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$, där U och V är reella, $r < 1$. Visa att

$$\int_0^{2\pi} \big(U(r,\theta)\big)^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \big(V(r,\theta)\big)^2 \, d\theta, \quad r < 1.$$

K. Entydighet, nollställen

K1. Ange ordningen av nollstället $z = 0$ till följande funktioner:

a) $z^2\big(e^z - 1\big)$ b) $e^{\sin z} - e^{\tan z}$.

K2. Visa att om f och g är analytiska i det öppna sammanhängande området D och $f(z)g(z) = 0$ för alla $z \in D$, så är antingen f eller g identiskt noll i D.

K3. Finns det någon funktion f, analytisk i $|z| < 1$, sådan att

$$f\Big(\frac{1}{2k}\Big) = \frac{1}{2k}, \qquad f\Big(\frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots?$$

K4. Bestäm alla funktioner f som är analytiska för $|z| < 1$ och uppfyller

$$f\Big(\frac{1}{k}\Big) = \frac{k+k^2}{1+k^2}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

K5. Låt f vara analytisk i $|z| < R$ och sätt $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$, $r < R$. Visa att M är en växande funktion av r och att den är strängt växande om inte f är konstant.

K6. f är analytisk i $|z| < 1$ och $\left|f\Big(\frac{1}{n}\Big)\right| \le \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att $f \equiv 0$.

K7. Antag att f är en hel funktion (dvs analytisk i hela $\mathbb{C}$), som uppfyller $f(z)f(-z) = f(z^2)$, $z \in \mathbb{C}$, samt $f(1) = 1$. Visa att f saknar nollställen i det inre av enhetsskivan utom möjligen i origo.

K8. f är analytisk i hela planet frånsett enkla poler i $z = 0$ och $z = 1$. Vidare är $f(-1) = 0$ och $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 1$. Bestäm f.

K9. Funktionen f är analytisk i hela planet frånsett en pol av ordning 3 i $z = 2$, därtill en pol av ordning 1 i $z = 0$ med residu 1. Vidare har f ett nollställe av ordning 3 i $z = 1$ och slutligen gäller $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$. Visa att dessa villkor bestämmer f entydigt och beräkna f.

K10. Bestäm alla funktioner med följande egenskaper: f är analytisk i hela $\mathbb{C}$ frånsett enkelpoler för $z = \pm i$, $f(0) = 1$ och $f(z)$ är begränsad då $|z| \to \infty$. Slutligen gäller

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_{|z|=4} zf(z)\,dz = 4\pi.$$

K11. f är analytisk i hela planet frånsett en enkelpol i origo med residu i. Vidare är $f(i) = e$ och

$$|f(z)| \le e^y, \qquad \text{för } |z| \ge 1,\ z = x + iy.$$

Bestäm f.

L. Laurentutveckling, isolerade singulariteter

L1. Finn Laurentutvecklingen av $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z)}$ i $0 < |z| < 1$.

L2. Ange Laurentutvecklingen av $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)(4-z^2)}$ i området

a) $0 < |z| < 1$ b) $1 < |z| < 2$ c) $|z| > 2$.

L3. Låt $f(z) = \dfrac{8z^3}{(z+1)(z-1)^2}$. Ange den singulära delen (principaldelen) till f i punkten a) $z = -1$, b) $z = 1$,

L4. Låt f vara analytisk för $R_1 < |z-a| < R_2$ och sätt $M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$, $R_1 < r < R_2$. Visa att om $\sum a_n(z-a)^n$ är Laurentserien för f. så gäller

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}, \quad R_1 < r < R_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

L5. Visa att funktionen $\cot \pi z = \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ har enkla poler för $z =$ heltal. Bestäm residuerna.

L6. Bestäm de singulära punkterna till funktionen $f(z) = \big(e^z - 1\big)^{-1}$ och ange deras karaktär.

L7. Bestäm alla singulära punkter för funktionen $f(z) = \dfrac{\cos \pi z - 1}{\sin^2 \pi z}$. Ange typen av singularitet och bestäm residuerna.

L8. Funktionen $f(z) = e^{1/z}$ har en väsentlig singularitet i origo. Visa att f antar alla värden utom noll oändligt många gånger i varje punkterad omgivning av origo.

L9. Visa att om f är en funktion som är analytisk i hela det ändliga planet och som har en pol i ∞, så är f ett polynom.

L10. Visa att en rationell funktion inte har andra singulariteter än poler i det utvidgade komplexa planet.

L11. Visa omvändningen till föregående övning: om f i det utvidgade komplexa planet inte har andra singulariteter än poler, så är f rationell. (Ledning: Visa först att f har högst ändligt många poler i $\mathbb{C}$, subtrahera de singulära delarna från f och använd L9.)

L12. Utveckla funktionen $f(z) = (z^2 + 2z)^{-1}$ i en Laurentserie i området $1 < |z - i| < \sqrt{5}$.

L13. a) Ange i vilka områden $(z + 3)^{-1}(z^2 + iz + 2)^{-1}$ kan utvecklas i Laurentserie kring origo.
b) Ange utvecklingen i det obegränsade av ovannämnda områden.

L14. Visa att funktionen $f(z) = \cos \dfrac{1}{z^2 + 1}$ har en väsentlig singularitet i $z = i$.

L15. Beräkna residun i $z = 0$ av $\dfrac{1}{z^2 \sin z}$.

L16. Funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z}$ kan utvecklas i Laurentserie i cirkelringen $\pi < |z| < 2\pi$. Bestäm den konstanta termen i denna utveckling.

L17. Bestäm principaldelen (singulära delen) i origo av funktionen $\dfrac{1}{\sin z} + \dfrac{1}{\cos z - 1}$.

L18. Bestäm residuer i samtliga isolerade singulariteter till $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2(e^z - 1)}$.

L19. Funktionen f är analytisk i en cirkelskiva $|z| < R$, där $R > 1$, bortsett från att f har en enkelpol i en punkt α med $|\alpha| = 1$. Visa att

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{n f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)}.$$

M. Residukalkyl, beräkning av integraler

M1. Beräkna residun av funktionen $z^n \sin \dfrac{1}{z}$ i origo,$n \in \mathbb{Z}$.

M2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}\, dz$, om C är
a) cirkeln $|z - i| = 1$, b) cirkeln $|z + i| = 1$.

M3. Beräkna residun av funktionen $f(z) = (1 + z^6)^{-1}$ i punkten $z = -i$.

M4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z(z^2 - 1)^2}\, dz$, där C är cirkeln $|z| = 4$.

M5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z - 1)^n}\, dz$, där C är cirkeln $|z| = 2$.

M6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2 + 1)^4}$, då C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i 2, $2 + 2i$, $-2 + 2i$ och -2.

M7. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \frac{\log(z + 2)}{z^2 + 4}\, dz$, där C är cirkeln $|z - 2i| = 1$.

M8. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$, $a > 0$.

M9. Beräkna med residukalkyl integralerna

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$, $a > 0$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^4}\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$, $a, b > 0$

M10. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^a}$, $0 < a < 1$

M11. Beräkna följande integraler (från diverse tentamina):

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta+\cos\theta}$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{3}+\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^8+1)^2}$ e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{(x^2+a^2)^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+3)^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$ i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x+x^2}\,dx$, $-1 < \alpha < 1$

N. Argumentprincipen, Rouchés sats

N1. I vilka kvadranter ligger rötterna till ekvationen $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$?

N2. Ange antalet nollställen i första kvadranten till polynomen
a) $z^5 + z^2 + 1$, b) $z^8 + 5z^3 + 5$.

N3. Ange antalet nollställen i högra halvplanet till polynomen
a) $z^4 - z^3 + 2z^2 + z - 3$, b) $z^5 - (1+i)z + i$.
Visa att båda polynomen har reella nollställen.

N4. Visa algebrans fundamentalsats med hjälp av Rouchés sats.

N5. Ange antalet nollställen i området $|z| < 2$ till polynomet $p(z) = z^5 - 2z^3 + 5z + 1$.

N6. Ange antalet nollställen i området $|z| < 1$ till funktionen $f(z) = z^2 + e^{z-1}$.

N7. Ange antalet nollställen till funktionen $z^2 + 4 - 3e^{iz}$ i den öppna kvadrat vars hörn är 2, -2, $2+4i$ och $-2+4i$.

N8. Bestäm antalet nollställen i första kvadranten till polynomet $z^7 + z^3 + 1$.

N9. Antag att f är analytisk i den slutna enhetsskivan och att $\operatorname{Re} f(z) > 0$ på randen (enhetscirkeln). Hur många nollställen kan f ha inne i enhetsskivan?

N10. Bestäm antalet nollställen i vänstra halvplanet till $f(z) = z^4 + 3z^2 + z + 1$.

N11. Ange antalet nollställen i högra halvplanet till $f(z) = 2 - 2z^2 + z^4 + e^{-z}$

N12. Bestäm antalet nollställen för $p(z) = z^7 + 3z^5 - 6z^2 + 1$ i områdena
a) $\{z\colon |z| < 1\}$ b) $\{z\colon 1 < |z| < 2\}$ c) $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$

Uppsala universitet
Matematiska institutionen

Svar till övningsuppgifter i komplex analys

A1. b) $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = \{(x,y) \in\}\mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$

A2. a) öppen, b) varken öppen eller sluten, c) öppen, d) öppen, e) varken öppen eller sluten, f) öppen.

A3. a) Nej, inte allmänt; b) Ja, alltid.

A4.

A5. a) Sant, b)falskt, c) falskt, d) sant.

B1. a) i, b) -1, c) $-i$, d) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, e) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, f) $e^2(\cos 1 + i \sin 1)$, g) $\frac{5}{\sqrt{2}} + i\frac{5}{\sqrt{2}}$.

B2. a) $\frac{i}{2}\big(e - \frac{1}{e}\big)$, b) $\frac{1}{2}\big((e + \frac{1}{e})\cos 2 + i(e - \frac{1}{e})\sin 2\big)$, c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\big((e + \frac{1}{e}) - i(e - \frac{1}{e})\big)$,
d) $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

B3. a) $\ln 2 + n \cdot 2\pi i$, b) $(2n+1)\pi i$, c) $(2n + \frac{1}{2})\pi i$, d) $\ln 5 - i(\arctan \frac{4}{3} + n \cdot 2\pi)$, i samtliga fall $n \in \mathbb{N}$.

B4. a) $\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{5}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$, c) $i\pi$, d) $-\frac{i\pi}{2}$

B5. a) $\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, b) $\pm\big(\frac{\pi}{2} - i\ln(2+\sqrt{5})\big) + n \cdot 2\pi$, c) $\frac{\pi}{2} - i\ln\big(100 \pm \sqrt{9999}\big) + n \cdot 2\pi$, i samtliga fall $n \in \mathbb{N}$.

B6.

B7. $z = \ln(2k\pi) + i(\pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$.

B8. a) $2 - i$, b) $3 - 4i$, c) $(2-i)\exp(-\arctan\frac{1}{2} + 2k\pi - \frac{i}{2}\ln 5)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B9.

B10. Tag den gren som ges av $0 < \arg z < 2\pi$. Då blir $(-1)^{1+i} = -e^{-\pi}$.

B11. a) $\operatorname{Re} e^z = e^{e^x \cos y}\cos\big(e^x \sin y\big)$, $\operatorname{Im} e^{e^z} = e^{e^x \cos y}\sin\big(e^x \sin y\big)$,
b) $\operatorname{Re} z^z = e^{x\ln|z| - y\arg z}\cos(y\ln|z| + x\arg z)$, $\operatorname{Im} z^z = e^{x\ln|z| - y\arg z}\sin(y\ln|z| + x\arg z)$

B12. a) för $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$, b) existerar ej för någon riktning.

B13.

B14. $z = \frac{\pi}{8} - \frac{i}{4}\ln 2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

B15. $z = -\frac{\pi}{4} + i\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

B16. $z = \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\ln 3 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

B17. $z = \pm\frac{\pi}{3} - i\ln 2 + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

B18. Dels finns lösningarna $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, dels lösningarna $z = \frac{i}{2}\ln\frac{m \cdot 2\pi - 1}{m \cdot 2\pi + 1} + \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

B19. $z = \pm i\ln\left((2n + \frac{1}{2})\pi + \sqrt{(2n + \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1}\right) + m \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

C6. a) $v = 3x^2y - y^3 + y^2 + y - x^2 + A$, A reell; b) $v = 2xy + B$, B reell.

C7. a) $v = \cos x \sinh y + A$, A reell; b) $v = e^x(y\sin y - x\cos y) + C$, C reell.

C8. $f(z) = \frac{1}{4}(1-i)(z^2+A)$, A reell konstant.

C9. $f(z) = iAz + K$, A reell och K komplex konstant.

C10. $f(z) = z^3 + iaz^2 + bz + ic$, a, b och c rella konstanter.

C11. $f(z) = -ize^{-2z} + Ai$, A reell konstant.

C12.

C13. $f(z) = -ie^{z^2} + iC$, C reell konstant.

C14. a) Betrakta $\frac{1}{2}i\big(f(z)\big)^2$, b) kan inte vara harmonisk.

C15. $f(z) = ae^{-z} + ib$, a komplex, b reell konstant.

C16. $f(z) = z^3 + 2iz^2 - 3iz + ia$, a reell konstant.

C17. $f(z) = a\big(iz^2 + 2z\big)$,$a$ reell konstant.

C18. $f(z) = a_1 z + a_3 z^2$.

D1. $T(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

D2. $T(0) = -1$.

D3. $t(z) = -i\dfrac{z+i}{z-3i}$ eller $-i\dfrac{z-3i}{z+i}$.

D4. $T(z) = \dfrac{iz}{z-1+i}$.

D5. $T(z) = \dfrac{z}{2-z}$ eller $\dfrac{z-2}{z}$. Linjen avbildas på cirkeln $|z+1-i| = 1$ resp $|z-1-i| = 1$.

D6. $T(z) = \dfrac{(a+3i)z - 2a + 2i}{z-2}$ eller $\dfrac{(a-3i)z - 2a - 2i}{z-2}$ (a reell).

D7. T.ex. $T(z) = \dfrac{z-2+\sqrt{3}}{z-2-\sqrt{3}}$; förhållandet blir $2+\sqrt{3}$ (oberoende av vilen avbildning man väljer).

D8. T.ex. $T(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Linjer genon 0 avbildas på cirklar genom ± 1, cirklar $|z| = r > 1$ på cirklar i vänstra halvplanet som har ± 1 som symmetriska punkter.

D9. $T(z) = -\dfrac{4(1+i)z}{z+3+i}$.

D10. Exempelvis $f(z) = e^{2i \arctan \frac{1}{2}} \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2$.

D11. Exempelvis $w = \exp\left(\dfrac{2\pi i z}{z-2}\right)$.

D12. Exempelvis $w = \dfrac{(1+z^\alpha)^2 - i(1-z^\alpha)^2}{(1+z^\alpha)^2 + i(1-z^\alpha)^2}$.

D13. $\{z\colon 0 < \arg z < 2\pi,\ z \neq 0\}$, dvs hela planet utom intervallet $]0, \infty[$ på rella axeln.

D14. Diametern blir $4a\dfrac{|p|^2 - a^2}{4|p|^2 - a^2}$.

D15. Exempelvis $w = i\left(\dfrac{\zeta^{1/2}-1}{\zeta^{1/2}+1}\right)^2$, där $\zeta = \dfrac{2z-1}{2z+1}$ och $\zeta^{1/2}$ betäms av $0 < \arg\zeta < 2\pi$ (dvs $\operatorname{Im}\zeta^{1/2} > 0$).

D16. Exempelvis $w = \dfrac{z^{1/2} - 2i}{z^{1/2} + 2i}$, där $\operatorname{Im} z^{1/2} > 0$.

D17. $w = \dfrac{1+i}{3} \cdot \dfrac{3-z}{3+z}$.

D18. Hela första kvadranten utom den (slutna) halvcirkelskiva med medelpunkt på imaginära axeln, som har en diameter mellan punkterna $i\frac{i-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}$ och $i\frac{i+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$.

D19. Hela $\mathbb{C}$ utom intervallet $[-1, 1]$ på reella axeln.

D20. $f(\frac{1-i}{2}) = i\frac{3\pi}{2}$ (välj grenen så att $0 < \arg w < 2\pi$, där $w = \frac{z}{1-z}$).

D21. $w = \dfrac{z-a}{az+1}$ (a reell) samt $w = -\dfrac{1}{z}$.

D22. $w = \dfrac{(3a+i)z + 3 - ia}{(3a-i)z + 3 + ia}$, a reell.

D23. Entydig lösning: $w = \dfrac{2\pi i z}{z - 2i}$.

D24. $0 < a < \frac{1}{3}$ eller $a > 1$.

D25. Exempelvis $w = -\dfrac{2i}{\pi} \operatorname{Log}\left(-i\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2\right)$.

D26. $w = \dfrac{\zeta^{3/2} - 1}{\zeta^{3/2} + 1}$, där $\zeta = \dfrac{i\sqrt{3} - z}{i\sqrt{3} + z}$ och $\operatorname{Re} \zeta^{3/2} > 0$.

D27. $w = \dfrac{z^3 + i}{z^3 - i}$.

D28. $\{w \colon 0 < \arg w < \frac{3\pi}{2}\}$.

D29. Exempelvis $w = -\left(\dfrac{z - e^{i\pi/3}}{z - e^{-i\pi/3}}\right)^3$.

D30. Exempelvis $w = i\dfrac{\zeta^3 + i}{\zeta^3 - i}$, där $\zeta = \dfrac{z - e^{i\pi/3}}{z - e^{-i\pi/3}}$.

D31. Endast en, nämligen $T(z) = \dfrac{(3-6i)z}{(3+4i)z + 8 - 16i}$.

D32. $w = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}\right)^2 - i}{\left(\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}\right)^2 + i}$, där $\operatorname{Im} \sqrt{z} > 0$.

D33. $w = \cos \frac{i\pi z}{2} = \cosh \frac{\pi z}{2}$.

D34. $w = A \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{z^{1/2}(z-1)^{3/4}}$, där $A = e^{\frac{3\pi i}{4}} \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)^{3/4}} \right)^{-1}$.

D35. Triangeln med hörn i 0, $-i\beta$ och $\beta - i\beta$, där $\beta = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

E1. a) $u(0) = \frac{1}{2}$, b) cirkelbågar genom $\pm i$.

E2. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \arctan \dfrac{1 - x^2 - y^2}{2y}$, $u(0, \sqrt{2} - 1) = \dfrac{1}{2}$.

E3. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \arctan \dfrac{x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 1}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{1}{2}$, $u(\sqrt{2} - 1, 0) = \dfrac{1}{2}$.

E4. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{2e^x\sin y}{e^{2x}-1} = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{\sin y}{\sinh x}$, $u(\ln(\sqrt{2}+1), \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2}$.

E5. $u = \dfrac{\ln r}{\ln 2} + 2$, där $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

E6. $u(z) = \dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\left(\ln\left|\dfrac{z-2+\sqrt{3}}{z-2-\sqrt{3}}\right| - \ln(7-4\sqrt{3})\right)$.

E7. $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{5x^2-5y^2-4-(x^2+y^2)^2}{6xy} + \dfrac{1}{2}$.

E8. $u(z) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\dfrac{i-\sqrt{z}}{\sqrt{z}+1}$.

F1. 8

F2. a) $i\pi$, b) $-i\pi$.

F3. 0.

F4. $2i\sin 1$.

F5 a) 0, b) π, c) 0.

F6. $\dfrac{2i}{5}(\arctan\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 5)$.

F7. $2\pi i$

F8. $2\pi i a e^{a^2}$ för $|a| < 1$, 0 för $|a| > 1$.

F9. $-2\pi i\sin 2$.

F10. $2\pi i$.

F11. $\dfrac{\pi i}{2}$ för $0 < a < 2$, 0 för $a > 2$.

F13. $|f^{(n)}(z)| \le \dfrac{n!MR}{(R-|z|)^{n+1}}$.

F14. T.ex.: Det finns inte någon följd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $a_n > 0$ och $a_n \to \infty$, sådan att $|f^{(n)}(z_0)| > n!a_n^n$.

F19. $\dfrac{2\pi i}{3}$

F20. $-2\pi i$.

F21. $2\pi - \ln\dfrac{e^{2\pi}+1}{2}$.

F22. $-i\pi e$.

F23. Ja!

F24. $\dfrac{1}{4}\big(2i\arctan\dfrac{1}{2} + \ln 3\big)$.

F25. $\dfrac{5\pi}{12}$.

F26. $\dfrac{4\pi i}{3}$.

G1. a) Divergent, b) konvergent, c) divergent, d) konvergent,
e) konvergent f) divergent, g) konvergent, h) konvergent,
i) divergent, j) divergent, k) konvergent, l) konvergent.

G2. Inget bestämt kan sägas.

G3. $a = 4$ ger konvergens.

G4. $-1 \le x > 1$ ger konvergens.

G5. $a < 1$ ger konvergens.

G6. Summan blir $1/(2^a - 1)$ (produkt av två serier).

G7. Gör en uppskattning med en *dubbelintegral* (eller med två enkelintegraler). $A = \ln 4$ duger.

G8. Nej, den divergerar.

G9. Summan blir 1 (summera först över n för fixt k).

G10. Gränsvärdet kallas *Cesàro-summan* för serien och vad som skall visas är att för en konvergent serie blir denna summa lika med den "vanliga" summan. Serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ är *divergent*, men dess Cesàrosumma är ändlig, lika med $-\frac{1}{2}$.

G11. $B_k - B_{k-1} = b_k$ insättes i $\sum a_n b_n$, och en enkel omskrivning ger resultatet.

G12. α) (Abels konvergenskriterium): Sätt $B_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$ i G11, och visa att $\sum_{k=1}^{\infty} B_k(a_{k+1} - a_k)$ är en (absolut) konvergent serie, eftersom dess delsummor blir begränsade.

β) (Dirichlets konvergenskriterium): $B_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$ och sedan ungefär som i α.

H1. b) Nej. c) 0

H2. a) Nej. b) Ja. c) Ja.

H3. a) Konvergens för $-1 < x \leq 1$. Likformig i $[-a, a]$, om $0 < a < 1$.

b) Konvergens för $|x| < \sqrt{2}$. Likformig i $[-\sqrt{2} + \epsilon, -\epsilon]$ och $[\delta, \sqrt{2} - \delta]$ om $\epsilon, \delta > 0$.

c) Konvergens för $x = 0$ och $|x| > \sqrt{2}$. Likformig för $|x| \geq \sqrt{2} + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

d) Konvergens för alla $x \in \mathbb{R}$. Likformig på varje ändligt intervall.

e) Konvergens för $x > 0$. Likformig för $|x| \geq \epsilon$, om $\epsilon > 0$.

H4. a) Konvergens endast för z reell.

b) Konvergens endast för $z = 0$.

c) Konvergens för alla $z \in \mathbb{C}$.

H5. Konvergens för $|z| \neq 1$ och $z = 1$.

H6. Nej.

H7. $\dfrac{\pi}{8}$.

H8. a) Likformig konvergens på $\mathbb{R}$.

b) Likformig konvergens på $a < |x| < b$, där $0 < a < b < \sqrt{2}$.

H9.

H10. a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -(1+\sqrt{2}),\ x > \sqrt{2} - 1, \\ \dfrac{1}{3}, & x = \sqrt{2} - 1, \\ \dfrac{1}{2}, & -1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1. \end{cases}$ b) 0.

I2. a) $\sin 1, \cos 1, (\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1$, b) $1, 1, \frac{3}{2}$, c) $1, 1, \frac{1}{3}$, d) $\ln 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$.

I3. $\dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $(|x| < 1)$.

I4. $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$.

I7. $\dfrac{3\pi}{2}$.

I8. $\dfrac{5}{2}$.

I9. 2π.

K1. a) 3. b) 3.

K2.

K3. Nej.

K4. $f(z) = \dfrac{1+z}{1+z^2}$.

K8. $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$.

K9. $f(z) = \dfrac{z^4+5z^3-21z^2+23z-8}{z(z-2)^3}$.

K10. $f(z) = 1 + \dfrac{iz^2}{1+z^2}$.

K11. $f(z) = ie^{-iz}/z$.

L1. $\dfrac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n$.

L2. a) $\dfrac{1}{4z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n + \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)\dfrac{z^{2n-1}}{5}$ (0 pol av ordning 1 med residu $\frac{1}{4}$).

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(1)^n}{5z^{2n+3}} + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n-1}}{5\cdot 4^{n+1}}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-4^n}{4}\cdot\dfrac{1}{z^{2n+3}}$ (∞ hävbar singularitet).

L3. a) $-\dfrac{2}{z+1}$, b) $\dfrac{4}{(z-1)^2} + \dfrac{10}{z-1}$.

L6. Residuerna $= \dfrac{1}{\pi}$.

L7. Enkelpoler i $2\pi in$ med residu $= 1$ (∞ är ej isolerad singularitet).

L13. $f(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2-i)^{-n-1}(z-i)^n + \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-i)^{n-1}}{(z-i)^n}$.

L14. a) $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < z3$, $|z| > 3$.

b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha(-3)^n + \beta i^n + \gamma(-2i)^n\right)\cdot\dfrac{1}{z^{n+1}}$, där $\alpha = \frac{1}{130}(11+3i)$, $\beta = \frac{1}{30}(-1-3i)$ och $\gamma = \frac{1}{30}(-2+3i)$.

L16. Residu $= \dfrac{1}{6}$.

L17. $\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{\pi^2}$ (beräknas med residukalkyl).

L18. $\dfrac{2}{z^2} + \dfrac{1}{z}$.

L19. $z = 2k\pi i$ (k heltal $\neq 0$) enkelpoler med residu $\dfrac{1+2k\pi i}{-4k^2\pi^2}$, $z = 0$ trippelpol med residu $-\dfrac{5}{12}$.

M1. Residu $= \begin{cases} 0, & n < 0 \text{ eller } n > 0 \text{ och udda,} \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k \geq 0. \end{cases}$

M2. a) π/e, b) $-\pi e$.

M3. $i/6$.

M4. $2\pi i(1 - \cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1)$.

M5. $\dfrac{2\pi i e}{(n-1)!}$ för $n \geq 0$ och 0 för övrigt.

M6. $\dfrac{5\pi}{16}$.

M7. $\frac{1}{8}(6\pi \ln 2 + i\pi^2)$ (principalgrenen).

M8. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$.

M9. a) $\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\dfrac{3\pi}{16}$ c) $\dfrac{\pi}{16a^3}$ d) $\pi e^{-1/\sqrt{2}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
e) $\dfrac{\pi}{b} e^{-ab}$

M10. a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{\sin \pi a}$

M11. a) $\dfrac{\pi}{8e^2}$ b) $\pi\sqrt{2}$ $\pi(2-\sqrt{6})$ d) $\dfrac{7\pi}{64 \sin \frac{\pi}{8}}$
e) $\dfrac{\pi e^{-ab}(ab+1)}{4a^3}$ f) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ h) $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
i) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sin \frac{1}{3}\pi a}{\sin \pi a}$.

N1. Två i andra och två i tredje kvadranten.

N2. a) Ett nollställe. b) Två nollställen.

N3. a) Tre nollställen i högra halvplanet, varav ett reellt. b) Sammalunda.

N5. Fem nollställen (dvs alla).

N6. Två nollställen. (Obs att Rouchés sats inte kan användas direkt.)

N7. Ett nollställe.

N8. Två nollställen.

N9. Inga.

N10. Två nollställen (argumentprincipen).

N11. Två nollställen (Rouché).

N12. a) Två nollställen. b) Fem nollställen. c) Fyra nollställen.