Tentamensuppgifter i matematik för betyget B i fil. kand. och ämbetsexamen

Tentamensuppgifter i matematik

FÖR BETYGET B

I FIL. KAND. OCH ÄMBETSEXAMEN

MED LÖSNINGAR OCH SVAR

utgivna av

Cotty Blom **Göran Kjellberg**

Valter Schytt

LUND
C. W. K. GLEERUPS FÖRLAG

Malmö 1947

Nya Litografen

FÖRORD

Flertalet av dessa uppgifter äro givna i tentamensskrivningar vid Stockholms Högskola de senaste tio åren.

Vi ha med tacksamhet mottagit hjälp från flera både lärare och studenter, och tacka framför allt docent Arvid Uhler för hans värdefulla bistånd och råd samt fil. mag Tord Ganelius för hans granskning av manuskript och slutliga redigeringsarbete.

Någon avdelning med problem i analytisk geometri har icke medtagits, då ifrågavarande tentamensuppgifter till stor del ingå i professor F. Carlsons lärobok i geometri.

Utgivarna.

Innehåll

Gränsvärdesproblem

1. AB är en cirkelbåge mindre än en kvadrant. Tangenterna i A och B råkas i C. Man sätter bågen $AB = b$, kordan $AB = k$, sträckan $AC+$ sträckan $CB = u$. Visa att $u - b > 2(b - k)$ och att

$$\lim \frac{u-b}{b-k} = 2 \quad \text{då bågen } b \to 0.$$

2. En aritmetisk och en geometrisk serie ha samma första term a, samma sista term b och samma termantal. Till vilken gräns närmar sig förhållandet mellan deras summor, då termantalet växer obegränsat?

3. Bestäm $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{3x^2}$.

4. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

där $a_i > 0$ för $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Beräkna $\lim\limits_{a\to 0} \frac{1}{\ln \frac{1}{a}} \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + a^3}\, dx$.

6. Sök $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \left\{ \arctan x - \ln(1+x) + \frac{1}{2}(\cos^2 x - 1) \right\}$.

7. Låt $f(x) = \int \frac{x^2}{(1+x^4)^2}\, dx$. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^3}$.

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left[\int_0^1 \ln \frac{(1+xt)}{(1-xt)}\, dt + \int_{-x}^{x} \frac{dt}{(2-t)\sqrt{1-t)}} \right].$$

9. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1})$.

10. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$.

11. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin x - 4 \int_0^x \frac{t^3\, dt}{\sqrt{1+t^3}}}{\tan^6 x}$.

12. Sök $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

13. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^x - (1+x^2)}{x^3}$.

14. $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}e^{\theta_n}$. Betrakta storheterna θ_n och visa att

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} n\theta_n = 1.$$

15. Sök gränsvärdet

$$\lim_{u\to\infty}\left[u^3\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{u^2-x^2}} + u^4\int_{-1}^{1}\frac{dx}{u^2-x^2} - 2u^4\int_{-1}^{1}\frac{dx}{u^2+x^2}\right].$$

16. Beräkna $\lim\limits_{a\to 0} a^{3/2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

17. Sök $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sqrt[x]{(mx+1)(mx+2)\cdots(mx+x)}$.

18. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

19. Sök $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

20. Beräkna $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

21. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x\cdot\int_{x}^{2x}\frac{dx}{x\ln x}$.

22. B är ena ändpunkten av lillaxeln i en ellips, PQ är en med storaxeln parallell korda i ellipsen. Man betraktar förhållandet mellan arean av ellipssegmentet PQB och arean av rektangeln, vars ena sida är PQ och i vilken en sida faller utefter tangenten i B. Sök gränsvärdet för detta förhållande då kordan PQ konvergerar mot noll.

23. En cirkel och en punkt A utanför densamma äro givna. På cirkeln tar man n st ekvidistanta punkter $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Sök

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{AP_i}^2}$$

24. Sönderlägg funktionen $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ i reella partialbråk av formen

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} + \frac{cx+d}{x^2+rx+s}$$

och använd sönderläggningen för att beräkna

$$S_p = \sum_{n=1}^{p}\frac{n^2-1}{n^4+n^2+1} \quad \text{samt} \quad \lim_{p\to\infty} S_p.$$

25. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\ln 2 - \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\right]$.

26. Bevisa att

$$\ln(n+1) - \ln n = 2\Big[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\Big]$$

27. En talföljd definieras så:

$$x_0 > 0, \quad x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{2}{x_0}, \quad x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{2}{x_{n-1}}, \dots \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Visa att talföljden har ett gränsvärde och bestäm detta.

28. Visa att talföljden $s_1 = \sqrt{a}, \quad s_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad s_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$ är konvergent, och bestäm dess gränsvärde.

29. Visa genom induktion att

$$\cot x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n},$$

för alla x utom $x = 0$ och $x = 2^i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(i = 1, 2, 3, \dots)$. Vad erhålles härav för $n \to \infty$?

30. Visa genom induktion, att

$$\sin^3 x + \frac{1}{3}\sin^3(3x) + \frac{1}{3^2}\sin^3(3^2x) + \dots + \frac{1}{3^n}\sin^3(3^n x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{\sin(3^{n+1}x)}{4 \cdot 3^n}.$$

Vad erhålles härav för $n \to \infty$?

Differentialkalkyl

31. Beräkna n:te derivatan av $\cos^2 x \cdot \sin x$.

32. Om $y = \dfrac{Lx + M}{x^2 - 2Bx + C}$ så är

$$\frac{x^2 - 2Bx + C}{(n+1)(n+2)}\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + \frac{2(x-B)}{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

33. Bevisa att om $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ så gäller också

$$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (n^2+1)\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

34. Om $P(x)$ är ett polynom av tredje graden i x, och $y^2 = P(x)$, så skall man beräkna

$$\frac{1}{y^2}\frac{d}{dx}\Big(y^3\frac{d^2y}{dx^2}\Big).$$

35. Bevisa att $y = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ satisfierar differentialekvationen

$$(1 - x^2)y'' - xy' - 1 = 0,$$

och härled härur MacLaurin-utvecklingen

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{2!} + \frac{2^2x^4}{4!} + \ldots + \frac{2^2 4^2 \ldots (2m-2)^2 x^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$

36. Relationerna $1 - kx \geq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - mx$ skola gälla för $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, då för k och m insättas lämpligt valda sifferværden. Vilka äro de bästa värdena på k och m?

37. För $0 \leq x \leq 1$ är $\frac{1}{1+x} = e^{-x+\theta x^2}$, där $\ln \frac{e}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$.

38. Beräkna konstanterna i bråket $\frac{ax^2 + bx}{1 + cx}$ så, att detsamma i grannskapet av $x = 0$ avviker så litet som möjligt från $\ln(1 + x)$. Angiv sedan max.-beloppet av avvikelsen för $0 \leq x \leq 1$.

39. Bevisa att summan av de $n + 1$ första koefficienterna i den MacLaurinska utvecklingen för en funktion $f(x)$ är lika med koefficienten för x^n i potensserieutvecklingen för $\frac{f(x)}{1-x}$.

40. Bevisa, att funktionen

$$f(x) = (x - n)e^x + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{2x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{(n-1)x}{1} + n$$

är > 0 för $x > 0$.

41. Bevisa, att $2x + x\cos x > 3\sin x$ för $x > 0$.

42. Visa att $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x$ är konstant. Bestäm konstantens värde om med arctan och arcsin åsyftas de grenar av resp. funktioner, som ligga mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ (huvudgrenarna).

43. Om $y = x + \frac{h}{x}$ och $z = x^n + \left(\frac{h}{x}\right)^n$, ($n$ är ett helt tal > 0) så satisfierar z såsom funktion av y differentialekvationen

$$(y^2 - 4h)\frac{d^2z}{dy^2} + y\frac{dz}{dy} - n^2z = 0.$$

44. Transformera uttrycket

$$\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{dy}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}\right)^2$$

genom att införa y som oberoende variabel i stället för x.

45. Transformera ekvationen $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ genom att införa den nya oberoende variabeln $t = \arctan x$.

46. Transformera differentialuttrycket

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

genom att införa en ny oberoende variabel t och en ny beroende variabel u genom ekvationerna

$$u = \frac{y-ax}{\sqrt{1-a^2}}, \qquad t = \frac{x-ay}{\sqrt{1-a^2}}$$

47. Bestäm det värde funktionen $\dfrac{x^2-4y+8}{y^2-5x+1}$ antager, då punkten (x,y) närmar sig punkten $(2,3)$ längs parabeln $ay^2 - 9x - 9a + 18 = 0$.

48. Visa att

$$e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} > (n+1)\frac{e}{2}$$

för alla heltal $n > 1$.

49. Visa att $e^{x/2} < \dfrac{e^x-1}{x} < e^x$ för $x > 0$.

Integralkalkyl

50. Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^7+3x^4+x}$.

51. Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$.

52. Beräkna $\displaystyle\int \frac{(x^3+1)\,dx}{2x^4-3x^3-x^2-3x+2}$.

53. Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^8+3}{(1+x^3)^2}\,dx$.

54. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x+x^2)^4}\,dx$.

55. Bevisa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$.

56. Beräkna $\int \sqrt{\dfrac{x+5}{x+2}}\,dx$.

57. Beräkna $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1}}$.

58. Beräkna $\int_0^\infty \dfrac{x^4\,dx}{(1+x^2)^5\sqrt{1+x^2}}$.

59. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \int_1^x \dfrac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$.

60. Beräkna $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x}$.

61. Beräkna $\int (\tan x + \cot x)^3\,dx$.

62. Visa, att om k är ett positivt heltal, så har

$$\int_0^{k\pi} e^{ax}\frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx$$

alltid samma tecken, vilket reellt värde a än har.

63. Beräkna $\int \dfrac{xe^x}{\sqrt{(e^x-1)^3}}\,dx$.

64. Beräkna $\int \dfrac{\arctan x}{x^2}\,dx$.

65. Låt $f(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^x \dfrac{1}{u}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} - 1\right] du$. Sök gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - \frac{x}{4}}{x^2}.$$

66. Beräkna $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \dfrac{dx}{2+\sin x}$.

67. Visa att integralen $\int_0^\infty \dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$ är konvergent och beräkna dess värde.

68. Bestäm a och b så, att $f(x) = \dfrac{1}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2} + \dfrac{a}{x^4} + \dfrac{b}{x^2}$ får ett ändligt gränsvärde för $x \to 0$ och beräkna med dessa värden på a och b integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Kurvor, ytberäkning, etc

69. Upprita kurvan
$$y = \frac{1 + 2x - x^2 \pm 2\sqrt{x - x^3}}{1 + x^2}$$
med angivande av max- och min-punkter.

70. Konstruera kurvan $y = \dfrac{x}{1 + x \tan x}$ för $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

71. Diskutera kurvan $y = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

72. Har kurvan $\tan y - \tan x + 2\sqrt{3} = 0$ någon inflexionspunkt?

73. Visa att kurvan $y = \dfrac{a - x}{1 + x^2}$ har tre inflexionspunkter, som ligger i rät linje.

74. Konstruera kurvan $2y = -a \ln(a - x) + \dfrac{(a - x)^2}{2a} + a \ln a - \dfrac{a}{2}$. P_1 och P_2 äro två punkter på kurvan; tangenterna i dessa punkter skära linjen $x = a$ i punkterna Q_1 resp Q_2. Visa att bågen P_1P_2 = sträckan Q_1Q_2.

75. Diskutera kurvan $\left(y + \dfrac{a}{x^2}\right)(x - b) = c$, där $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, i intervallet $b < x < \infty$. Undersök hur kurvan varierar med c, och bestäm de värden på c, för vilka den saknar extrempunkter.

76. Konstruera kurvan $2^y(2^x - 1) = 2^x + 1$. s är båglängden från punkten med abskissan $= \dfrac{1}{2}$ till punkten med abskissan x. Sök $\lim_{x \to \infty}(s - x)$.

77. Konstruera kurvan $x = 4a^3 + 3a\sqrt[3]{y^2}$. Till kurvan lägges en tangent med vinkelkoefficienten k; den tangerar i P och skär i Q. A är den närmast origo belägna punkten på kurvan. Beräkna längderna av bågarna AP och AQ. Undersök om förhållandet mellan dessa längder har ett gränsvärde då $k \to \infty$.

78. Upprita kurvan $y = \dfrac{\sin x}{1 - \sin x}$, samt beräkna den yta, som begränsas av x-axeln samt kurvan mellan $x = \pi$ och $x = 2\pi$.

79. Konstruera kurvan $xy^2 = 4a^2(2a - x)$. Bestäm eventuella asymptoter och inflexionspunkter. Beräkna arean av den yta, som begränsas av kurvan och y-axeln, samt volymen av den rotationskropp, som uppstår, då kurvan roterar kring y-axeln.

80. Betrakta kurvan
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Angiv ekvationen i cartesiska koordinater, max- och minpunkter, samt inflexionspunkter. Sök arean av den slinga, som kurvan omsluter.

81. Kurvan

$$(x-y)^3 - x^2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}y^2 - 2\sqrt{2}xy + 2x + 6y + 2\sqrt{2} = 0$$

går genom punkten $\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)$. Vrid koordinataxlarna så, att de bli parallella med tangenten och normalen i denna punkt. Konstruera kurvan.

82. Studera $y = x^x$ för $x > 0$; undersök om den kan skära den räta linjen $y = x$ samt bestäm krökningsradien i $x = 1$.

83. Konstruera kurvan $2y = \frac{3x-2}{x-1} + \ln x^2$.

84. Diskutera kurvan $xy^2 - x^2y = 2a^3$. Sök dess max- och minpunkter.

85. Konstruera kurvan

$$\begin{cases} x &= 2te^t \\ y &= t^2e^t \end{cases}$$

där t är en reell parameter, som antager alla värden. Beräkna öglans omkrets och area.

86. Konstruera den del av kurvan i polära koordinater $2\phi = \frac{r}{a} + \frac{a}{r}$, $\quad (a > 0)$ som hör till positiva $\phi < \pi$. Beräkna längden av denna del av kurvan och den area som inneslutes mellan den och radien $\phi = \pi$.

87. Betrakta en kurva, vars ekvation i polära koordinater är $r = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1}$. Beräkna båglängden $s(\phi)$ för den del av kurvan, som beskrives, då θ varierar mellan 0 och ϕ samt bevisa att

$$\lim_{\phi\to\infty} \frac{s(\phi)}{\phi} = 1.$$

88. Kurvan $r^2 = \frac{a^2 \sin v \cos v}{5\sin^2 v + \cos^2 v}$ har en i intervallet $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ belägen slinga. Beräkna dess yta.

89. Beräkna den area, som inneslutes av öglan i kurvan $y^2 = x^3 + 4x^2$.

Max- och min-problem

90. Bestäm max och min för ytinnehållet av de rektanglar, vilkas sidor tangera ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

91. Vilken är den minsta ellips av formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, som omsluter och tangerar cirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$?

92. Vilken är den stösta ellips, som kan inskrivas i en given halvcirkel så, att den tangerar diametern i mittpunkten och bågen i två symmetriskt belägna punkter?

93. Inom en parabel är en punkt given. Sök den korda genom punkten, som avskär minsta möjliga segment av parabeln.

94. En rät linje, parallell med x-axeln, skär kurvan $x^2y + y = 1$ i punkterna A och B. Tangenterna i A och B skära varandra i C. Bestäm linjen AB så, att arean av triangeln ABC blir maximal.

95. Man betraktar det stycke av en tangent till kedjelinjen $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ som ligger mellan kurvan och x-axeln. När blir det kortast?

96. Betrakta en rät linje l och två fixa punkter A och B på samma sida om l. P är en rörlig punkt på l. Hur går den kortaste vägen APB?

97. x och y äro rätvinkliga koordinater för en punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$. Sök de punkter på cirkeln för vilka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xn^3 + yn^2 + rn}{n!}$$

blir max eller min.

Beräkning av båglängder, areor och volymer

98. Visa, att längden s av bågen på parabeln $y^2 = 2px$ mellan $(0, 0)$ och (x, y) satisfierar

$$y < s < y + \frac{y^3}{6p^2}, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{s - y}{y^3} = \frac{1}{6p^2}.$$

99. Beräkna arean av ett segment, avskuret från parabeln $y^2 = 4ax$ genom en normal i punkten (x, y).

100. En parabel föres i ett nytt läge i det den vrides 45° kring toppen. Sök den för de båda lägena gemensamma arean.

101. Beräkna med en integral arean av ellipsen $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$.

102. Beräkna arean av astroiden $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

103. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då lemniskatan $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ roterar

a) kring x-axeln,

b) kring y-axeln.

104. Beräkna med 1 riktig decimal volymen av den kropp, som uppstår då den till höger om y-axeln belägna delen av kurvan $y^2 = 3x - 1 - x^3$ roterar kring x-axeln.

105. Beräkna ytinnehållet av en tillplattad rotationsellipsoid, vars ekvatorialradie = a och excentricitet = e, och utveckla det erhållna uttrycket efter potenser av e.

106. Bestäm arean och volymen till den rotationsfigur, som uppstår då en plan figur, belägen i halvplanet $x > 0$ och begränsad av y-axeln, cirkeln $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ samt av en annan cirkel med radien 1, som tangerar nyssnämnda cirkel samt y-axeln ovanför denna, roterar kring y-axeln.

107. Låt $S(r)$ vara ytinnehållet av den rotationsyta, som uppstår, då kurvan $y^2 = 4x$, $(0 < x < r)$ roterar kring x-axeln. Bestäm

$$\lim_{r\to\infty} \frac{S(r)}{r^{3/2}}.$$

108. Kedjelinjen $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ skär y-axeln i A; genom en punkt M med abskissan b drages perpendikeln MP mot x-axeln. Figuren $OAMP$ får rotera kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym och buktiga yta.

109. En ellips och en hyperbel ha samma brännpunkter. Ellipsens yta delas av hyperbeln i tre delar. Den del, som innehåller medelpunkten kallas A, en av de andra delarna B. Vid rotation kring ellipsens mindre axel alstras av A och B volymer, vilkas förhållande är 2/3. Om hyperbelns excentricitet är 5/3, hur stor är ellipsens?

110. Kurvan

$$y = \int_x^1 \left[\frac{1}{(1-u)\sqrt{u}} - \frac{1}{1-u}\right] du$$

roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av det stycke av rotationskroppen, som ligger mellan planen genom $x = 0$ och $x = 1$ vinkelräta mot rotationsaxeln.

Envelopper, krökning etc.

111. Sök enveloppen till en linje, så belägen, att produkten av dess avstånd från två givna, fixa punkter är konstant.

112. Bestäm ekvationen i cartesiska koordinater för enveloppen till de cirklar, som ha sina centra på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, och som gå genom origo.

113. Genom en godtycklig punkt P på parabeln $y^2 = 2px$ konstrueras en rät linje L, som gör samma vinkel med normalen i P som perpendikeln från P mot x-axeln. Sök enveloppen för L, då P varierar.

114. Sök enveloppen till de ellipser av formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, där summan av axlarna är konstant.

115. Givna äro en punkt O och en cirkel C. Låt A vara en godtycklig punkt på C. Sök enveloppen

a) för de räta linjer, som gå genom A vinkelrätt mot OA.

b) för mittpunktsnormalerna till OA.

116. Sök enveloppen för asymptoten till kurvan $y^3 + a^2yx^2 + a^3x^3 = xy$ om a är en variabel parameter.

117. $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, är en kurva. Sök villkoret för att det skall finnas en tangent, som tangerar i två skilda punkter! Beräkna tangentens vinkelkoefficient, om den finns.

118. Bestäm förhållandet mellan längderna av normalen och krökningsradien i en punkt på kedjelinjen

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

(Med normalens längd avses längden av normal-segmentet mellan kurvan och x-axeln.)

119. En parabel är given genom ekvationen

$$Ax^2 + 2\sqrt{AC}xy + Cy^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Beräkna krökningen i vertex.

120. Betrakta krökningscirkeln till ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i en punkt med abskissan $x = \frac{a}{2}$. Sök den fjärde skärningspunkten mellan ellipsen och cirkeln!

Algebra

121. I ekvationen $z^2 + \frac{az}{2} + \frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} = 0$ är $a = \cos\theta + i\sin\theta$, $\cos 2\theta = \sqrt{211} - \frac{119}{8}$. Om $z = x + iy$ är en rot till ekvationen, så skola värdena av $x^2 + y^2$ beräknas.

122. Vilket är det minsta positiva, hela tal a, så beskaffat, att

$$2x^3 - 3x + a = 0$$

har en enda reell rot? Beräkna denna rot med två decimaler, då a har ifrågavarande värde. Angiv en uppskattning av felet.

123. Sök värdet av största roten till

$$x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x - 10 = 0$$

med två riktiga siffror.

124. Använd för $-1 < x < 0$ utvecklingsformeln

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

på funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x}$ och beräkna med två riktiga decimaler det x-värde, för vilket tillhörande θ-värde blir $= \frac{1}{2}$.

125. Beräkna multipelrötter och rationella rötter till ekvationen

$$5x^6 - 122x^5 + 961x^4 - 2625x^3 + 2207x^2 - 640x + 700 = 0$$

samt bestäm approximativt med två decimaler övriga rötter.

126. Betrakta ekvationen $7x^4 - 15x^3 - 18x^2 + 7x + 6 = 0$. Avskilj förekommande rationella rötter och beräkna på trigonometrisk form de återstående rötterna.

127. Beräkna $\sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}}$ med fem riktiga decmaler.

128. Beräkna på algebraisk form alla rötter till $x^5 - i = 0$.

129. Ange alla sex rötterna till ekvationen $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$.

130. Ekvationen $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ har en rot på enhetscirkeln. Lös den!

131. Bestäm rötterna till ekvationen

$$x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 6x - 3 = 0.$$

132. Om i ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vi har $a^2d = c^2$, så har ekvationen två rötter, vilkas produkt = produkten av de två andra.

133. För vilka heltalsvärden på n är $x^{3n} - x^{2n} + x^n - 1$ delbart med $x^3 - x^2 + x - 1$?

134. Om ekvationen $f(x) = x^5 + qx^3 + rx^2 + t = 0$, $t \neq 0$, har en dubbelrot, så är denna rot till ekvationen $rx^2 - \frac{2q^2}{5}x + \frac{5t}{3} - \frac{4q}{15}r = 0$.

135. Om a väljes så, att rötterna x_1 och x_2 till ekvationen $2x^2 + ax + 2 = 0$ satisfiera relationen $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3$, vilket värde har då $x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$?

136. Om $f(x) = 0$ är en algebraisk ekvation av gradtalet n med skilda rötter $x_1, x_2, \ldots, x_n$, skall man visa att

$$\frac{x_1^{n-2}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f'(x_n)} = 0.$$

137. Vad är villkoret för att ekvationen med reella koefficienter $ax^3 + bx + c = 0$ har en komplex rot med absoluta beloppet = 1?

138. Betrakta ekvationen $x^6 + ax^4 + bx^3 + ax^2 + 1 = 0$ och bestäm ett värdepar av a och b, sådant att ekvationen har sex reella rötter.

139. Bestäm a så, att polynomen $P(x) = ax^5 + x^2 + 1$ och $Q(x) = x^5 + x^3 + a$ få en gemensam faktor av 2:a graden. Hur många reella rötter har ekvationerna $P = 0$, $Q = 0$ för dessa a-värden?

140. Uttryck ytan av den kring en triangel omskrivna cirkeln i koefficienterna för den tredjegradsekvation, som har sidornas mätetal till rötter.

141. Vad är villkoret för att $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx - a^3$ har ett maximi- och ett minimivärde, vilkas summa = 0?

142. Bestäm antalet reella rötter till ekvationen

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^3 e^{ax+b}) = 0 \qquad a \neq 0.$$

143. Bevisa, att rötterna till ekvationen

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4\sin^2\alpha = 0$$

är reella och positiva.

144. Undersök hur antalet reella rötter till ekvationen

$$f(x) = x^5 - ax - b = 0$$

varierar med a och b.

145. Undersök realiteten av rötterna till ekvationerna

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 0 \quad \text{och} \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 0$$

146. Sök villkoret för att systemet

$$\begin{cases} qz - ry = a \\ rx - pz = b \\ py - qx = c \end{cases}$$

skall ha åtminstone en lösning.

147. Om ekvationen $f(x) = x^3 - 3px^2 + 3qx - r = 0$ har tre reella rötter, så kan skillnaden mellan två rötter aldrig överstiga $\sqrt{12(p^2 - q)}$ och skillnaden mellan den största och den minsta roten aldrig understiga $3\sqrt{p^2 - q}$.

148. Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!} = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är udda} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{om } n \text{ är jämnt} \end{cases}$$

149. Man vet att $\log_{10} 15848 < 4,2 < \log_{10} 15849$. Bestäm med hjälp härav (utan användande av tabell eller räknedosa) de hela tal upp till 12000, i vilkas logaritm första decimalen är 1.

150. Lös ekvationen $\cos 5x \cdot \cos^5 x + \sin 5x \cdot \sin^5 x = a$ och diskutera antalet lösningar för olika reella a-värden.

151. Bilda den kubiska ekvation, vars rötter är $\sin 18^\circ$, $\sin 30^\circ$ och $\sin 234^\circ$.

152. Antag att

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \end{cases}$$

Beräkna $\tan 2x + \tan 2y$, uttryckt i a och b.

153. Vilket samband finns mellan vinklarna x, y, z om

$$2\sin^2 x + 2\sin^2 y + 2\sin^2 z - 6\sin x \sin y \sin z - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z = 0?$$