Matematisk problemsamling

för 2 betyg

Lars Hörmander *Lennart Sandgren*

MATEMATISK PROBLEMSAMLING

FÖR 2 BETYG

LUND 1954
Lunds Studentkårs Intressebyrå

FÖRORD

Vid omarbetandet av denna problemsamling har vi huvudsakligen använt oss av två källor: tentamensskrivningar, som givits för två betyg i fil. kand.- och ämbetsexamen under de senaste tio åren, och problem, som sammanställts för seminarieövningar vid Lunds Universitet. Dessutom har utnyttjats ett 50-tal problem ur Matematisk problemsamling, 2-betygskursen (Lund 1942).

Försök har gjorts att indela problemen i kapitel efter deras innehåll och kapitlen i orubricerade avsnitt. Ett stort antal problem ligger på gränsen mellan två områden och kunde kanske lika väl ha hört till det ena som det andra, men vi har dock ansett att en ansats till systematisk uppdelning kan vara värdefull.

Till svåra och metodiskt intressanta problem har korta anvisningar lämnats i samband med svaren.

Lund i januari 1954.

Lars Hörmander *Lennart Sandgren*

Ekvationsteori och komplexa tal

Om ej annat framgår av formuleringen förutsättes att alla ekvationer i detta avsnitt har komplexa koefficienter .

1. Visa, att om a, b, c, d är fyra punkter i det komplexa talplanet, vilka ligger på en cirkel, så är dubbelförhållandet $\dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$ reellt. Bevisa också omvändningen.

2. Vilken kurva beskriver punkten $w = \dfrac{1+iz}{i+z}$ i det komplexa talplanet, då z genomlöper cirkeln $|z-1| = 1$?

3. Visa, att då z i det komplexa talplanet beskriver cirklarna $|z| = a$ ($a \neq 1$), så beskriver $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ konfokala ellipser med halvaxlarna $\dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$ och $\dfrac{1}{2}\left|a - \dfrac{1}{a}\right|$. Vad blir orten för w, om $a = 1$?

4. a är ett komplext tal med $|a| < 1$. Sätt $f(z) = \dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}$. Visa, att $|f(z)| < 1$ om $|z| < 1$ och $|f(z)| = 1$ om $|z| = 1$, samt beräkna $f(f(z))$.

5. Beräkna real- och imaginärdelen av $\log(1+z)$, där $z = e^{\pi i/3}$.

6. Visa, att det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att de komplexa talen z_1, z_2, z_3 i det komplexa talplanet skall vara hörn i en liksidig triangel är, att $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

7. Rötterna till ekvationen $x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ bildar en kvadrat i det komplexa talplanet. Beräkna a och b.

8. Nollställena till ett fjärdegradspolynom $P(z)$ bildar i det komplexa talplanet en romb. Visa, att nollställena till derivatan $P'(z)$ ligger på den längsta diagonalen.

9. Rötterna till tredjegradsekvationen $P(x) = x^3 + px + q = 0$ (p och q reella) är i det komplexa talplanet hörn i en triangel. Visa, att om en ellips inskrives så att den tangerar triangelsidorna i mittpunkterna, så är nollställena till $P'(z)$ brännpunkter i ellipsen.

10. Angiv nödvändiga och tillräckliga villkoret för att ekvationen med reella koefficienter $x^3+ax^2+bx+c = 0$ skall ha två komplexa och en reell rot, som alla ligger på en rät linje i komplexa talplanet.

11. Visa, att om alla nollställen till polynomet $P(z)$ har positiv realdel, så gäller detta också för $P'(z)$.

---

12. Uppdela $x^{2n} - 2x^n \cos n\phi + 1$ i reella faktorer av andra graden.

13. Bilda den tredjegradsekvation med högsta koefficienten = 1 som har rötterna $2\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{7}$, och $2\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

14. Visa, att $\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)^2}$ är ett heltal och angiv detta.

15. Rötterna till en n-tegradsekvation ($n > 2$) bildar i det komplexa talplanet en regelbunden n-hörning. Bestäm ekvationen då ett hörn ligger i origo och summan av rötternas kvadrater är n.

16. Visa, att $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

---

17. Rötterna till ekvationen $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ kallas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Visa, att

$$(1 + x_1^2)(1 + x_2^2) \cdots (1 + x_n^2) = (1 - a_2 + a_4 - \ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)^2$$

18. Visa, att om ett polynom $P(x)$ divideras med $(x - a)(x - b)$, så att resten blir lineär, så är den

$$\frac{(x - b)P(a) - (x - a)P(b)}{a - b}$$

såvida $a \neq b$. Vad blir den om $a = b$?

19. Ekvationen $x^n - ax - b = 0$ har rötterna $x_1, x_2, \ldots, x_n$.Visa, att

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) = (n - 1)a + \frac{nb}{x_1}$$

för $x_1 \neq 0$.

20. Bestäm de positiva hela n för vilka ekvationen

$$(x + 1)^{n+1} + x^{n+1} + 1 = 0$$

har multipla rötter samt angiv dessa rötter och deras multiplicitet.

---

21. Beräkna den symmetriska funktionen $\sum_{\nu \neq \mu} \frac{x_\mu}{2 + x_\nu}$ av rötterna till ekvationen $x^3 + 3x + 11 = 0$.

22. Ekvationen $x^3 + px + q = 0$ har rötterna x_1, x_2, x_3. Sök den ekvation vars rötter är $(x_1 - x_2)^2$, $(x_2 - x_3)^2$, $(x_3 - x_1)^2$.

23. Kalla rötterna till ekvationen $x^3 - 2x^2 + 2x + 3 = 0$ för x_1, x_2, x_3. Bestäm den ekvation vars rötter är $x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^3, x_1^3 + x_2^1$.

24. Beräkna värdet av produkten $\prod_{i,k=1}^{3} (y_i - x_k)$, där y_i är rötterna till ekvationen $y^3 + py^2 + q = 0$ och x_k rötterna till ekvationen $x^3 + px + q = 0$.

---

25. Sök nödvändiga och tillräckliga villkoret för att en av rötterna till ekvationen $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ är lika med produkten av de båda andra.

26. Sök nödvändiga och tillräckliga villkoret för att produkten av två rötter till ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ är lika med produkten av de båda andra.

27. I ekvationen $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ är koefficienterna reella. Bestäm de villkor som a, b och c skall vara underkastade för att ekvationens alla rötter skall ha absoluta beloppet 1.

28. Bevisa, att ekvationen $1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} = 0$ har en reell rot om n är udda, och ingen om n är jämnt.

29. Visa, att ekvationen $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ med reella koefficienter har minst en rot mellan 0 och 1 om för något $p > 0$ gäller $\frac{a_0}{n+p} + \frac{a_1}{n+p-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{p+1} + \frac{a_n}{p} = 0$.

30. Bevisa, att ekvationen $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ har en reell rot om n är udda, och ingen om n är jämnt.

31. För vilka reella p och q gäller, att realdelarna av rötterna till ekvationen $x^3 + px + q = 0$ ligger mellan -1 och $+1$? Tolka villkoret i ett pq-plan.

32. De $2n$ talen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ bildar en monoton talföljd. Visa att polynomet

$$(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{2n-1}) + b(x - a_2)(x - a_4)\ldots(x - a_{2n})$$

för varje reellt b har sina nollställen reella, och att de är olika om följden $\{a_k\}$ är strängt monoton.

33. Låt $P(x)$ vara ett reellt tredjegradspolynom med tre isolerade reella nollställen. Visa, att ekvationen $P'(x)^2 - 2P(x)P''(x) = 0$ saknar reella rötter.

34. Visa, att om det reella polynomet $P(x)$ har alla nollställen reella så är $P'(x)^2 - P(x)P''(x) \geq 0$.

35. Visa, att ekvationen $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ har alla sina rötter absolut mindre eller lika med det största av talen $2|a_1|, 2|a_2|^{1/2}, \ldots, 2|a_n|^{1/n}$.

36. Visa, att $x^n - |a_1|x^{n-1} - |a_2|x^{n-2} - \ldots - |a_n| = 0$, där inte alla $a_i = 0$, har exakt en positiv rot x_0. Bevisa, att alla rötter till $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ har absolutbeloppet $\leq x_0$.

37. Visa, att om ekvationen $x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x - x + b = 0$ har alla sina rötter reella så är differensen mellan den största och den minsta roten mindre än eller lika med 2.

38. Låt $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ vara nollställena till ett polynom $P(x)$, och låt rötterna till $P'(x) = 0$ vara $y_1 < y_2 < \ldots$ Visa, att $y_1 - x_1 < x_2 - y_1$ om $n > 2$.

39. $P(x)$ är ett polynom med heltalskoefficienter. Visa, att $P(x) = 0$ ej kan ha heltalslösningar, om både $P(0)$ och $P(1)$ är udda tal.

40. För vilka värden på det hela talet n har ekvationen $nx^6 - 11x^4 - 5x^3 - 11x^2 + n = 0$ några rationella rötter? Bestäm även dessa.

41. En kubisk ekvation med reella, rationella koefficienter har en imaginär rot $a + bi$, där a och b är reella och b är rationellt. Visa, att ekvationen har en rationell rot.

Determinanter och lineära ekvationssystem

42. Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$.

43. $\phi(x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & a + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & r_2 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & b + x & r_3 + x & \dots & a + x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b + x & b + x & b + x & \dots & r_n + x \end{vmatrix}$

Visa att $\phi(x)$ är en lineär funktion av x och med hjälp därav att $\phi(0) = \dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b}$ där $f(x) = (r_1 - x)(r_2 - x)\dots(r_n - x)$.

44. Beräkna $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$

45. Visa, att $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$

46. Visa att $\begin{vmatrix} 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \epsilon^3 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \epsilon^6 \\ 1 & \epsilon^3 & \epsilon^6 & \epsilon^9 \\ 1 & \epsilon^4 & \epsilon^8 & \epsilon^{12} \end{vmatrix} = 125$ där ϵ är en femte enhetsrot $\neq 1$.

47. Bevisa, att

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

där n = determinantens ordning.

48. En determinant kallas skevsymmetrisk, om man alltid har $a_{rs} = -a_{sr}$. Visa, att en skevsymmetrisk determinant av udda ordning alltid har värdet noll.

49. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$.

50. Beräkna den determinant av n:te ordningen, där

$$a_{ik} = \frac{1}{i+k} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

51. Beräkna den determinant av n:te ordningen, i vilken

$$a_{ik} = \binom{i+k-1}{k} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

52. a_{ik} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ är elementen i en determinant D. Bestäm det minsta tal m så beskaffat, att av $a_{ik} = 0$ för $i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ m$ måste följa att $D = 0$.

53. I en determinant av ordningen n är alla element $= 1$ utom $n-1$ stycken som är $= 0$. Visa, att hur dessa nollor än är placerade så är determinantens värde 0, 1 eller -1.

54. Visa, att den matris som framkommer av en matris av rangen r genom strykning av i rader och k kolonner har en rang $\geq r - i - k$.

55. Använd den geometriska betydelsen av determinanten $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ för att bevisa, att

$$|D| \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)}.$$

När gäller likhetstecknet?

---

56. Bestäm för alla värden på a och b antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a^2x + 5y + z &= b \\ ax + (a+3)y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

57. Undersök för olika värden på a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ ax + y + 2z + 3w &= a + 2 \\ a^2x + y + 2^2z + 3^2w &= (a+2)^2 \\ a^3x + y + 2^3z + 3^3w &= (a+2)^3. \end{aligned}$$

Då oändligt många lösningar finns skall dessa anges explicit.

58. Lös för alla värden på a och b ekvationssystemet

$$\begin{aligned} ax + y + z + w &= 0 \\ (b+1)x + 3y + 4z + 5w &= 0 \\ x + by + z + w &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0. \end{aligned}$$

59. a_k and b_k, $k = 1, \dots, n$ är två talsviter så beskaffade, att för varje talsvit x_k, $k = 1, \dots, n$, som uppfyller villkoret $\sum_1^n a_k x_k = 0$, gäller $\sum_1^n b_k x_k = 0$. Visa, att $b_k = C a_k$ för $k = 1,\ \dots,\ n$, där C är en konstant.

Derivator

60. Funktionen $f(x)$ är definierad genom $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ för $x \neq 0, f(0) = 0$. Visa, att $f(x)$ har kontinuerliga derivator av varje ordning för alla reella x samt beräkna $f^{(n)}(0)$.

61. Om $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0, f(0) = 1$, så är $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ kontinuerlig. Bevisa, att denna funktion är deriverbar för varje x och beräkna $F'(0)$.

62. Tranformera uttrycket $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ genom att införa $s = x - y$ och $t = x + y$ som oberoende variabler.

63. Transformera uttrycket $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ genom att införa $s = e^x + e^y$ och $t = e^x - e^y$ som nya oberoende variabler.

64. u och v är två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner av x och y. Om $D = \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} \neq 0$ visa att $\dfrac{d(D,v)}{d(x,y)} = D\dfrac{\partial D}{\partial u}$.

65. Bevisa, att $\dfrac{d(xD, yD, zD, uD)}{d(x,y,z,u)} = 3D^4$, där $D = xu - yz$.

66. Sätt för $x_i > 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_1, x_2 + \ldots + x_n = \xi_1 \xi_2, \ldots, x_n = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$. Beräkna

$$\frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}.$$

67. Sätt $x_1 = r\cos\theta_1, x_k = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{k-1}\cos\theta_k$ $(2 \leq k \leq n-1)$,
$x_n = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}$. Beräkna

$$\frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})}.$$

Olikheter

68. Bevisa olikheten $y - 1 \geq \log y$ $(y > 0)$. Använd denna olikhet på talen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_i > 0)$, för att visa att om $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ så är $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq 1$. Bevisa med hjälp härav olikheten

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

för godtyckliga $a_i \geq 0$. När gäller likhet?

69. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är godtyckliga positiva tal. Visa, att

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

När gäller likheten?

70. x_1, x_2, x_3 är tre reella tal, $0 \le x_k \le 1$ $(k = 1, 2, 3)$. Kan produkterna $x_1x_2x_3$ och $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ samtidigt vara $> \dfrac{1}{8}$?

71. Bevisa olikheterna $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$, då $x > 0$.

72. Visa, t.ex. med trapetsuppskattning, att

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+n)^2} + \ldots < \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2},$$

där m är ett tal > 0.

73. Bevisa, att om $f(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{a\sqrt{x} + (1-a)\sqrt{1-x}}$, där $0 \le a \le 1$, så är $f(\frac{1}{2}) \le f(a) \le f(0)$.

74. Visa, att integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)(1+|x-a|)} \le 2$ för alla a.

75. Funktionen $f(x)$ är positiv och kontinuerlig för $0 \le x \le 1$ och $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Visa, att

$$\left(\int_0^1 f(x)\cos ax\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)\sin ax\,dx\right)^2 \le 1$$

för alla reella a.

Gränsvärden

76. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{k}{n^2}$.

77. Bestäm konstanten b så att

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - b\sqrt[3]{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

blir en konvergent talföljd.

78. a är ett positivt tal. Visa, att $\dfrac{1}{a+1} < \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right)$ och med hjälp härav att

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

existerar och är större än $\dfrac{1}{2}$ men mindre än 1.

79. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n})^{\frac{1}{\log n}}$.

80. Bestäm talet a så att $\displaystyle\lim_{n^{t}o\infty} n^a e^{-\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}}$ existerar ändligt och är $\neq 0$. Beräkna i detta fall gränsvärdet.

81. Rötterna till ekvationen $e^{\frac{1}{x}} = nx$ betecknas med a_n. Visa, att

$$\lim_{n\to\infty} a_n \log n = 1.$$

82. Talen θ_n är bestämda av $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\theta_n}{n}$. Visa, att $\lim_{n\to\infty} \theta_n$ existerar samt beräkna detta gränsvärde.

83. Visa, att $\lim_{n\to\infty} \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \ldots \cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

84. Talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras genom $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 3a_{n-1}}\ \left(a_0 \geq -\frac{1}{3}\right)$. Visa, att talföljden är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

85. Bevisa, att den talföljd som definieras genom $x_{n+1} = \frac{6}{1 + x_n}$, $(x_1 > -1)$, är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

86. Visa, att om $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är en talföljd sådan att $\lim_{n\to\infty} a_n$ och $\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n)$ existerar, så måste det senare gränsvärdet vara = 0.

87. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är en godtycklig talföljd. Visa, att för varje positivt heltal $k > 1$ gäller

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{kn}) \leq \log k \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, na_n$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{kn}) \geq \log k \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, na_n.$$

88. En funktion $f(x, y)$ definieras utanför origo genom $f(x, y) = \frac{|x|^p |y|^q}{x^2 - xy + y^2}$ och i origo genom $f(0, 0) = 0$. Angiv nödvändiga och tillräckliga villkoren på p och q för att $f(x, y)$ skall vara kontinuerlig i hela planet.

89. Funktionen $f(x)$ är deriverbar för $x > x_0$ och $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existerar $= A$. Visa, att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ existerar och är $= A$.

90. Funktionen $f(x)$ är deriverbar för $x > x_0$ och $\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x))$ existerar $= A$. Visa, att $f(x) \to A$ och $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

91. Funktionerna $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ är jämte sina derivator kontinuerliga och uppfyller följande villkor:

1) $y_n(0) = 0$ för alla n
2) funktionsföljden $y_n'(x) + y_n(x)$ konvergerar likformigt mot 0 för $0 \leq x \leq 1$, då $n \to \infty$.

Visa, att $y_n(x)$ och $y_n'(x)$ också konvergerar likformigt mot 0 för $0 \leq x \leq 1$ då $n \to \infty$.

92. Bilda funktionsföljden $(x \geq 0) f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \ldots$ Bestäm $\lim_{x\to 0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ och $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0} f_n(x))$. Är följden $f_n(x)$ likformigt konvergent för $0 < \delta \leq x < \infty$ resp. $0 \leq x\infty$?

---

93. Beräkna för $p > 0$ gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} n^p \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1-p}$.

94. Beräkna $\lim_{a\to+0} a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+a}}$.

95. Bestäm a så att $x^a e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ får ett från noll skilt gränsvärde, då $x \to \infty$, och angiv gränsvärdet.

96. Bestäm $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p\,dx$, där p är ett positivt heltal.

97. Visa, att $\lim_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x \sin xt}{1+t^2}\,dt = 1$.

98. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{x}\,dx$.

99. Studeta funktionsföljden $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ för $x > 0$. Visa, att $f_n(x)$ konvergerar mot en funktion $f(x)$ men att konvergensen inte är likformig. Visa även att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

100. En funktionsföljd $f_n(x)$ definieras av

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{för } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{för } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{för } \frac{2}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Visa, att $f_n(x)$ konvergerar mot en kontinuerlig funktion då $n \to \infty$,
men att $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Däremot gäller
$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^1 f_n(x)\,dx = \int_\delta^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ för $0 < \delta \le 1$.

---

101. Beräkna integralen $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$ $(a > 0)$. Visa med hjälp av resultatet att

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(a-x)}} = f(0),$$

om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion.

102. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $0 \le x \le 1$. Visa, att

$$\lim_{x\to+0} \int_x^1 \frac{f(t)\,dt}{t^2} = f(0).$$

103. Visa, att om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och ≥ 0 i $a \le x \le b$, så existerar

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b f(x)^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

och = maximivärdet av $f(x)$ i intervallet (a, b).

Oändliga serier

104. För vilka värden på a konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\log\frac{n+1}{n}\Big)^{a}?$$

105. a och b är positiva tal. När konvergerar serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\ldots+\frac{1}{b+n}}?$$

106. För vilka x och y konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{x}}{\log(1+n^{y})\log(1+n^{-y})}?$$

107. För vilka värden på a konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{2^{a}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{a}}\Big)n\log n}?$$

108. Är följande serier konvergenta eller divergenta?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$

109. Uppskatta storleken av det tal man får, om man i summan $\dfrac{1}{10^{m}}+\dfrac{1}{10^{m}+1}+\ldots+\dfrac{1}{10^{m+1}-1}$ stryker alla termer med nämnare, som i decimalsystemet innehåller någon nia. Visa med hjälp därav, att om man i den harmoniska serien utför samma strykning, så blir den erhållna serien konvergent.

110. Låt $a_1, a_2, \ldots$vara de positiva rötterna till ekvationen $\tan\pi x=\dfrac{1}{x}$ och beteckna med $\{a_n\}$ avståndet från a_n till närmaste mindre hela tal. Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\}?$$

---

111. För vilka a konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\Big(\log\frac{n+1}{n}\Big)^{a}$?

112. Är serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n}}$ konvergent eller divergent?

113. Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ konvergent eller divergent?

114. I den harmoniska serien ändrar man termernas tecken så, att på p positiva termer följer q negativa. Belir den nya serien konvergent eller divergent?

115. Bevisa, att serien

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

är konvergent för alla reella värden på x.

116. För vilka x-värden konvergerar potensserien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n \log n}{n(n+1)}$?

117. För vilka x konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$?

118. För vilka reella x konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$?

---

119. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är en följd av positiva, monotont avtagande tal. Visa, att om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar så är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = 1.$$

120. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är en konvergent serie med positiva, monotont avtagande termer. Visa, att $\sum_{n=1}^{\infty} na_n^2$ är konvergent.

121. Visa, att om $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ är monotont avtagande och $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, så är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

konvergent.

122. Visa med exempel, att i uppgifterna 119, 120 och 121 förutsättningen om monotonitet är väsentlig.

---

123. Talen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är positiva. Visa, att de båda serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ konvergerar och divergerar samtidigt.

124. Bevisa, att om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ är konvergent, så konvergerar också $\sum \frac{a_n}{n}$.

125. Talen a_n och b_n är positiva och $a_n b_n = n^{-2}$. Visa, att minst en av serierna $\sum a_n$ och $\sum b_n$ är divergent.

126. Talen a_n är positiva och $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n$ existerar $= k$. Visa, att serien $\sum a_n$ är konvergent om $k < e^{-1}$ och divergent om $k > e^{-1}$.

127. En reell serie $\sum u_n$ är konvergent. Visa, att om $\sum u_n^2$ också är konvergent, så konvergerar även $\sum \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

128. Serien $\sum \frac{a_n}{x - n}$ konvergerar för ett visst reellt, ändligt x-värde. Visa, att serien då måste konvergera för varje reellt $x \neq$ positivt heltal.

129. Visa, att $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

130. Undersök för vilka x serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x^n$ är konvergent och bestäm dess summa.

131. Beräkna den funktion, som representeras av potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, där $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ för $n = 2, 3, \dots$

132. Bestäm de positiva värden på r, för vilka $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$ är konvergent, och beräkna seriens summa.

133. Funktionen $f(x)$ har potenserieutvecklingen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ för $|x| < R$. Sätt $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Bevisa, att $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{f(x)}{1-x}$ för $|x| <$ det minsta av talen 1 och R. Genom att använda denna sats på en lämplig funktion $f(x)$, bestäm $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{a}{k}$, där a är ett godtyckligt reellt tal.

---

134. Beräkna summan av serien $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - k^2}$, där k är ett heltal > 0.

135. Beräkna summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$.

136. Beräkna med användning av att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

137. Beräkna summorna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2}$.

138. Bestäm $\sum \frac{1}{n}$, där summationen går över sådana heltal n, för vilka $\frac{1}{n}$ har en ändlig utveckling i decimalbråk.

---

139. Visa, att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - n^{-x}}{xn(\log n)^2}$ är likformigt konvergent för $x \ge a > 0$ men inte för $x > 0$.

140. Visa, att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + x^{2n})}{x^n}$ är likformigt konvergent för $0 < |x| \le k < 1$ och $1 < K \le |x|$. Undersök om serien är likformigt för $0 < |x| < 1$ resp. $1 < |x|$.

141. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ för $0 \le x \le 1$. Bevisa, att $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

142. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}$. Undersök om $f(x)$ är kontinuerlig och om $f'(x)$ existerar.

143. Visa, att
$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

144. Beräkna med hjälp av att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ den bestämda integralen $\int_0^{\infty} \log(1-e^{-y})\,dy$.

Integraler

145. Visa, att den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

146. För vilka värden på a är $\int_0^{\infty} x^a \sin x\,dx$ konvergent, resp. absolut konvergent?

147. För vilka värden på p och q är $\int_0^{\pi} (\sin x)^p (1-\cos x)^q\,dx$ konvergent? Åskådliggör resultatet i ett pq-plan.

148. För vilka värden på a är $\int_0^{\infty} \frac{x^a \sin x}{1+x^2}\,dx$ konvergent?

149. För vilka värden på p och q konvergerar $\int_0^{\infty} e^{px} x^q \sin x\,dx$?

150. Undersök om integralen $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(2-\sin x)}\,dx$ är konvergent eller divergent.

151. För vilka värden på a konvergerar integralen
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a+1}}{1+x^{2a}} \cos x\,dx?$$

152. Visa, att om $f(x) \to 0$ monotont, då $x \to \infty$, och $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerar, så måste $xf(x) \to 0$, då $x \to \infty$. Visa däremot att $xf(x) \to 0$ monotont inte medför att integralen konvergerar.

153. Funktionen $f(x)$ är deriverbar för $x = 0$ och kontinuerlig för $x > 0$. Vidare är integralen $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent. Visa, att
$$\int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x^a}\,dx$$
är konvergent för $1 < a < 2$.

---

154. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x + \frac{x^2}{2}}\right) dx$.

155. Beräkna integralen $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$ $(|r| \neq 1)$.

156. Beräkna integralerna $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+ib\cos x}$ och $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+ib\cos x+ic\sin x}$.

157. Visa, genom att dela upp integrationsområdet i intervallen $(0,1)$ och $(1,\infty)$, att $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$. Beräkna med hjälp härav

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{a^2+x^2}\,dx.$$

158. Beräkna integralerna $\int_0^{\pi} \log\sin x\,dx$ och $\int_0^{\pi} \log\cos x\,dx$.

159. Beräkna med hjälp av $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ följande integraler

$$\text{a)}\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx.$$

160. Beäkna med hjälp av $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ integralen

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cosh 2x\,dx.$$

161. Visa, att funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ uppfyller integralekvationen

$$f(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{1-xy}$$

för $-1 < y < 1$.

162. Bevisa, att det existerar en identitet av formen

$$\int_0^x e^{-t^2} t^{2n}\,dt = C\int_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x^2}P(x),$$

där C är en konstant och $P(x)$ ett polynom. Bestäm C och $P(x)$.

163. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och $f(x) \to 0$, då $x \to \infty$. Beräkna Frullanis integral $\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$ (a och $b > 0$) och med hjälp härav integralen $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx$.

164. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för alla reella x. Vidare är $\lim_{x\to\infty} f(x) = h$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$. Visa, att

$$\int_{-\infty}^\infty (f(x-a) - f(x-b))\,dx = (a-b)(k-h).$$

165. En kontinuerlig funktion $f(x)$ ($\not\equiv 0$) har egenskapen att integralerna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ båda är konvergenta och har värdet noll. Visa, att f måste byta tecken minst två gånger. Generalisera!

---

166. Visa, att för $a > 0$ är $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$ och härav att

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\pi^{1/2}.$$

Ange även värdet av $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx$.

167. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}-1}{x^2}\,dx$ ($a \geq 0$).

168. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} \frac{\arctan ax}{(1+x^2)x}\,dx$ ($a > 0$).

169. Visa, att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 y}\cos xt\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{x^2}{4y^2}}$ ($y > 0$).

Multipelintegraler

170. Beräkna integralen $\iint \frac{e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\,dxdy$ över hela planet.

171. Beräkna dubbelintegralen $\iint e^{-\left(y+\frac{x^2}{y}\right)}\,dxdy$ över första kvadranten.

172. Beräkna dubbelintegralen $\iint \frac{y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ utsträckt över området $0 \leq xy \leq 3$, $0 \leq y-x \leq 2$ ($x, y \geq 0$).

173. Beräkna integralen $\iint \frac{dxdy}{(x^2+y^2)\sqrt{xy-1}}$ över den del av första kvadranten där $xy \geq 1$.

174. Beräkna $\iint \frac{dxdy}{x^4+y^4}$ över området utanför cirkeln $x^2+y^2 = 1$.

175. Beräkna $\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

176. Bestäm när $\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(Ax^2+2Bxy+Cy^2)}\,dxdy$ konvergerar och beräkna då dess värde.

177. Ekvationen $Ax^2+2Bxy+Cy^2-1 = 0$ betyder en ellips. Beräkna $\iint (x^2+y^2)\,dxdy$ över området $Ax^2+2Bxy+Cy^2 \leq 1$.

178. Funktionen $f(x, y)$ är definierad som summan av avstånden från punkten (x, y) till brännpunkterna i ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i ett rätvinkligt koordinatsystem ($a > b$). Beräkna integralen $\iint f(x, y)\, dxdy$ utsträckt över ellipsen.

---

179. Beräkna $\iint_D \varrho^2\, dxdy$, där D är en cirkelskiva i xy-planet med radien 1 och ϱ är avståndet mellan punkten (x, y) i cirkeln och en fix punkt belägen på avståndet a från cirkelns medelpunkt.

180. Med $f(x, y, z)$ betecknas kortaste avståndet från punkten (x, y, z) till klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Beräkna integralen $\iiint f(x, y, z)\, dxdydz$ utsträckt över området $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

181. Funktionen $f(x, y, z)$ definieras som avståndet från (x, y, z) till den närmaste sidoytan av en kub med kantlängden a. Beräkna integralen $\iiint f(x, y, z)\, dxdydz$ tagen över kuben.

182. I xy-planet är givet en cirkel med radien a. Från den variabla punkten (x, y) drages tangenterna till cirkeln, de bildar vinkeln v med varandra. Beräkna $\iint (v - \sin v)\, dxdy$ utsträckt över det yttre av cirkeln.

183. Funktionen $f(x, y)$ är definierad som summan av avstånden från punkten (x, y) till punkterna $(-1, 0)$ och $(1, 0)$. För vilka värden på p konvergerar $\iint f(x, y)^p\, dxdy$ utsträckt över hela planet.

---

184. $f(x)$ är positiv och kontinuerlig för $x \geq 0$ och $\int_0^\infty f(x)\, dx$ är konvergent och har värdet A. Beräkna $\int_0^\infty \int_0^\infty f(a^2x^2 + b^2y^2)\, dxdy$, om både a och b är skilda från noll.

185. $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion, positiv för $(x, y) \neq (0, 0)$ och positivt homogen av graden $k > 0$, dvs. $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ om $t \geq 0$. Beräkna

$$\frac{\iint f(x, y)\, dxdy}{\iint dxdy}$$

där båda integralerna tas över det område där $f(x, y) \leq 1$.

186. Man vet, att $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Visa, att då måste $\int_0^1 dx \int_0^x f(x) f(y)\, dy$ också vara noll.

187. Visa, att om $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ och $f(x)$ är kontinuerlig så gäller $\int_0^1 f(x) dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)\, dz < 0$, såvida inte $f(x) \equiv 0$.

188. Visa, att om $\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dxdy > 1$ så är också $\int_0^1\int_0^1 f(x, y)^2\, dxdy > 1$.

Linjeintegraler

189. Bevisa, att $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\, dx + \frac{e^y}{1 + x^2}\, dy$ är en total differential och beräkna linjeintegralen

$$\int \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\, dx + \frac{e^y}{1 + x^2}\, dy$$

längs en kurva från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.

190. Beräkna linjeintegralen $\int \frac{(y-1)dx - (x-1)dy}{x^2+y^2-2x-2y+2}$ i positiv led längs en cirkel med origo som medelpunkt och radien a) = 1, b) = $\sqrt{2}$, c) = 2.

191. Vilka värden kan linjeintegralen

$$\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} \frac{(x-2y)dx + (2x+y)dy}{x^2+y^2}$$

antaga, om man föreskriver, att integrationsvägen inte skär strålen $y = x$, $x \geq 0$.

192. Visa, att $\int_C \frac{xy\,dx + (1+x^2-y)\,dy}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, där C är en sluten kurva, som är symmetrisk med avseende på y-axeln.

193. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \log(y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx + \log(x + \sqrt{x^2+y^2})\,dy,$$

där C är en kurva som förbinder $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

194. Beräkna linjeintegralen $\int (e^{x+y} - y)\,dx + (e^{x+y} - 1)\,dy$ längs en halvcirkelbåge ovanför x-axeln från origo till $(1, 0)$.

195. Om funktionen $f(x, y)$ förutsättes, att den på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ är konstant och att den där satisfierar relationen $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1$. Beräkna linjeintegralen $\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dy + \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ längs cirkeln.

196. Funktionen $u(x, y)$ är konstant på parabeln $y = x^2$, och satisfierar på denna kurva relationen $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + x^2$. Beräkna linjeintegralen $\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx$ längs parabeln från origo till punkten $(1, 1)$.

Differentialekvationer

197. Differentialekvationen $y' + yf(x) + g(x) = 0$ är given. Visa, att tangenterna till samtliga integralkurvor i punkter med samma x-värde går genom en punkt.

198. Bestäm den fullständiga lösningen till differentialekvationen $x(x-1)\frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{1-x}$ i intervallet $0 < x < 1$. Visa, att varje partikulärlösning har ett och endast ett minimum. Upprita den genom punkten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ gående integralkurvan.

199. Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + y = xe^x$.

200. Bestäm de λ-värden, för vilka ekvationen $y'' - 2y' + \lambda y = 0$ får en icke försvinnande lösning, vilken blir $= 0$ för $x = 0$ och $x = 1$. Vilka är motsvarande lösningar?

201. Bestäm de lösningar till differentialekvationen

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

som är begränsade för alla x och går genom punkten $(0, 0)$.

202. Bestäm den fullständiga lösningen till differentialekvationen

$$y^{(n)} - \binom{n}{1}\alpha y^{(n-1)} + \binom{n}{2}\alpha^2 y^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n\alpha^n y = e^{\beta x},$$

där α och β är konstanter.

203. Lös differentialekvationen $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x\sin x$.

204. Lös differentialekvationen $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = \log x$.

205. Ekvationen $y'' + f(x)y' + xy = 0$ har en lösning $y = \phi(x)$ med $\phi(0) = 1$ och en annan lösning $y = e^{\phi(x)}$. Bestäm $f(x)$, $\phi(x)$ och den fullständiga lösningen.

206. Bestäm de funktioner y och z av x, som uppfyller differentialekvationerna

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + y - 2z = 0 \\ &\frac{dz}{dx} + y + 4z = e^{-x}. \end{aligned}$$

Bestäm speciellt den lösning, för vilken $y = z = 0$, då $x = 0$.

207. Bestäm alla funktioner u av $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vilka satisfierar ekvationen $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Bestäm därefter alla funktioner $u(r)$, vilka satisfierar ekvationen $\Delta u = \varrho$, där ϱ är en konstant.

---

208. Bestäm ortogonaltrajektorierna till kurvskaran $e^x \cos y + x = C$, där x och y är rätvinkliga koordinater.

209. Bestäm ortogonaltrajektorierna till hyperbelskaran $x^2 - 4xy - y^2 + Cx = 0$. (Rätvinkliga koordinater.)

---

210. Det finns en funktion $f(t)$ så att

$$f(x - y)\big((x + 3y)dx - (3x + y)dy\big)$$

blir totala differentialen av en funktion $F(x, y)$. Bestäm $f(t)$ och $F(x, y)$.

211. Lös differentialekvationen $1 + y'^2 + 2yy'' = 0$. Upprita den lösning, som för $x = 0$ har $y = 1$ och $y' = 0$.

212. Bestäm de funktioner $f(x)$, som har egenskapen att för varje x följden $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ består av termerna i en aritmetisk serie.

213. Bestäm alla funktioner $f(x)$, som är kontinuerliga jämte första och andra derivatorna och som uppfyller ekvationen

$$f''(x) + 2f(x) = \int_0^x (2f''(t) + f'(t) + 2e^t)\,dt.$$

Angiv speciellt den funktion, för vilken $f(0) = f'(0) = 0$.

214. Bestäm den kontinuerliga funktion $f(x)$, som uppfyller ekvationen

$$f(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2)f(t)\,dt.$$

215. Funktionen f, som är två gånger kontinuerligt deriverbar, uppfyller funktionalekvationen $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$. Bestäm funktionen f.

---

216. Funktionen $y = \sqrt{1+x^2}\log(x + \sqrt{1+x^2})$ satisfierar en lineär differentialekvation av första ordningen. Använd denna till härledning av MacLaurins serie för y. När konvergerar serien?

217. Bestäm en potensserie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som satisfierar differentialekvationen $xy'' + y' - y = 0$ med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Bevisa, att de operationer, som utförts med den oändliga serien vid koefficientberäkningen, är tillåtna för alla värden på x.

Maxima och minima

218. Undersök den extremala karaktären i punkten $x = y = z = 0$ av funktionen $2\cos(x+y+z) + e^{xy} + e^{yz} + e^{zx}$.

219. Bestäm extremvärdena av funktionen $(x+y+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

220. Vilket plan genom linjen $x = 1$, $y + z = 2$ avskär av positiva oktanten en tetraeder av minimal volym?

221. Sök största och minsta värdet av funktionen $3 + x - x^2 - y^2$ i området $2x^2 + y^2 \leq 1$.

222. Bestäm de punkter på ytan $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$ (n positivt heltal), som ligger på minsta och största avstånd från origo O i det rätvinkliga systemet $Oxyz$.

223. Sök maximum av avståndet mellan origo och en variabel normal till ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (Rätvinkliga koordinater.)

224. I en rektangel med sidorna a och b inskrives en fyrhörning med ett hörn på varje sida i rektangeln. Visa, att de fyrhörningar som har minsta möjliga omkrets, är parallellogrammer med sidorna parallella med den givna rektangelns diagonaler. Beräkna den minsta omkretsen.

225. eräkna största avståndet från en punkt på ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ till planet $x + y + z = 1$. (Rätvinkliga koordinater.)

226. Beräkna minimivärdet av arean av triangeln OPQ, då hörnet O ligger i origo, hörnet P är punkten $(1, 1, 1)$ och hörnet Q genomlöper skärningslinjen mellan planen $x + 2y + z = 5$ och $y - x + 1 = 0$. (Rätvinkliga koordinater.)

Geometriska användningar av differential- och integralkalkylen

Om ej annat framgår av formuleringen förutsättes att alla koordinatsystem i detta avsnitt är rätvinkliga.

227. Bestäm orten för fotpunkterna av normalerna från origo mot tangenterna till kurvan $y = x^2$. Konstruera orten och beräkna ytan som begränsas av orten och dess asymptot.

228. Konstruera kurvan $(x^2 + y^2)^2 = axy^2$ och beräkna den inneslutna ytan.

229. C är krökningscentrum till punkten P på ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Q är en punkt sådan att $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PC}$, där O är origo. Bestäm ytan av den slutna kurva, som Q beskriver, då P beskriver ellipsen.

230. P är en fix och Q en variabel punkt på en två gånger kontinuerligt deriverbar kurva. Kordan PQ och kurvbågen PQ begränsar en yta Y. Bevisa, att $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{Y}{s^2} = \dfrac{K}{12}$, där s är bågen PQ och K är kurvans krökning i punkten P.

231. $y = f(x)$ är ekvationen för en kurva i ett snedvinkligt koordinatsystem, vars basvektorer har längden 1 och bildar vinkeln α med varandra. Bestäm krökningen i en punkt (x, y).

232. C är en sluten konvex kurva med kontinuerligt varierande krökningsradie R. Längden av C är L. Visa, att $\dfrac{L}{2\pi} \leq$ maximum av R och att likhet endast inträffar om C är en cirkel.

233. Visa, att ytan av en ellips är mindre än eller lika med $\pi R_1 R_2$, där R_1 och R_2 är ellipsens krökningsradier i ändpunkterna av två konjugatdiametrar.

---

234. Från medelpunkten till en liksidig hyperbel $xy = k^2$ drages radius vektor till en rörlig punkt på lurvan. Med radius vektor som diameter konstrueras en cirkel. Sök enveloppen till alla så uppkommande cirklar.

235. Sök ekvationen för och upprita enveloppen till de cirklar, som går genom origo och vilkas medelpunkter ligger på parabeln $y^2 = 2px$.

236. Sök enveloppen för polarerna till punkterna på kurvan $y = x^a$ $(a > 1)$ med avseende på parabeln $2y = x^2$. Bestäm också orten för polerna till tangenterna.

237. Sök enveloppen till de räta linjer, för vilka summan av kvadraterna på avstånden till punkterna $(-1, 0)$ och $(1, 0)$ är $= 4$.

238. Betrakta alla ellipser, som har två givna punkter F_1 och F_2 som brännpunkter. Sök enveloppen för sammanbindningslinjerna mellan krökningscentra till lillaxelns och storaxelns ändpunkter.

239. Sök enveloppen till de ellipser $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, vilkas yta är konstant $= A$.

240. Visa, att enveloppen till alla parabler med fix styrlinje och med brännpunkterna belägna på en fix cirkel är två parabler med brännpunkterna i cirkelns medelpunkt.

---

241. Beräkna den volym, som inneslutes mellan de tre ytorna

$$z = 0, \qquad z = \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} \quad \text{och} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

242. Axlarna till två cirkulära cylindrar med radien r skär varandra under vinkeln α. Beräkna den gemensamma volymen.

243. Beräkna volymen av den kropp, som begränsas av ytan $x^2 + y^2 = 5z$ och planet $x + y + z = 1$.

244. Beräkna de båda volymer, som inneslutes mellan andragradsytorna $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$ och $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 1$.

245. En yta alstras av en variabel ellips, som har sitt centrum i origo, sin konstanta storaxel av längden $2a$ utefter z-axeln och ständigt skär cirkeln $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$. Sök ytans ekvation och storleken av den volym, som den innesluter.

246. Med V betecknas den del av rymden, där koorinaterna uppfyller olikheten $|z| \leq (x^2 + y^2 + z^2)^a$. Angiv de värden på a, för vilka volymen av V blir ändlig, och beräkna volymen för sådana värden på a.

Plan geometri

247. P_1, P_2 och P_3 är tre punkter på en parabel. Ytan av den triangel, vars hörn är P_1, P_2 och skärningspunkten mellan tangenterna i P_1 och P_2 kallas T_{12} och analogt definieras T_{23} och T_{13}. Visa, att om P_3 ligger mellan P_1 och P_2 så är

$$\sqrt[3]{T_{13}} = \sqrt[3]{T_{12}} + \sqrt[3]{T_{23}}$$

248. En rät linje l_1 vrider sig kring en punkt P_1, och en rät linje l_2 vrider sig med samma vinkelhastighet kring en punkt P_2. Vilken är orten för skärningspunkten mellan l_1 och l_2

a) om linjerna vrider sig i samma riktning
b) om linjerna vrider sig i motsatt riktning?

249. Betrakta de parabler, som går genom hörnen i en triangel ABC. Bestäm orten för tangeringspunkten på den tangent, som är parallell med AC.

250. En cirkel går genom vertex av en parabel och skär den i ytterligare tre punkter. Visa, att parabelnormalerna i dessa punkter råkas i en punkt.

251. Konstanterna a och b har sådana värden, att kurvorna $y = x^2$ och $xy = ax + b$ skär varandra i tre reella punkter. Bestäm ekvationen för den cirkel, som går genom dessa punkter. (Rätvinkliga koordinater.)

---

252. Visa, att om två av en liksidig hyperbels skärningspunkter med en cirkel är diametrala på hyperbeln, så är de båda andra diametrala på cirkeln.

253. Tre icke urartade kägelsnitt går genom två punkter P_1 och P_2. Två och två har kägelsnitten ytterligare en gemensam korda. Visa, att dessa kordor går genom en punkt eller är parallella.

254. Visa, att orten för centrum till de kägelsnitt, som går genom fyra givna punkter, är ett kägelsnitt genom mittpunkterna på de sex sammanbindningslinjerna mellan de fyra punkterna, tagna två och två.

255. Visa, att varje kägelsnitt, som går genom hörnen i en rätvinklig triangel och i den räta vinkelns spets tangerar höjden mot hypotenusan, är en liksidig hyperbel. Sök orten för medelpunkten.

---

256. En parallellogram är given. Visa, att skärningspunkterna mellan två godtyckliga ellipser, som tangerar alla parallellogrammens sidor, bildar hörn i en parallellogram med fixa sidoriktningar.

257. Bevisa, att två ellipser med samma medelpunkt alltid har ett par gemensamma konjugatdiametrar.

258. En ellips tangerar en hyperbels asymptoter och skär hyperbeln i fyra punkter. Visa, att två av de kordor som förenar dessa fyra skärningspunkter är parallella.

259. P och Q är två yttre punkter till ett kägelsnitt. R är skärningspunkten mellan tangentkordorna till P och Q. Visa, att konjugatdiametern till riktningen PQ går genom R.

260. Två kägelsnitt har en brännpunkt F gemensam, l är en rät linje genom F. Visa, att polerna till l med avseende på de båda kägelsnitten ligger på en rät linje genom F.

261. Sidorna i en triangel ABC tangerar ett kägelsnitt i punkterna A', B' och C' (A' på BC osv.). P är skärningspunkten mellan linjerna AB och $A'B'$. Q är skärningspunkten mellan $A'B'$ och CC'. visa, att PQ och $A'B'$ är harmoniska punktpar.

262. Visa, att ett kägelsnitt är entydigt bestämt, om man känner polarerna till två punkter i planet och antingen en punkt på kägelsnittet eller en tangent till det.

263. En cirkel C har sin medelpunkt i en parabels brännpunkt. Visa, att polarerna till parabelns punkter i avseende på C tangerar en fix cirkel.

264. Två koncentriska ellipser är givna. Visa, att om P är en variabel punkt på den ena ellipsen så tangerar dess polar med avseende på den andra ellipsen en fix ellips.

---

265. Konstruera asymptoterna till en hyperbel, om man känner deras riktningar och tre punkter på kurvan.

266. Till en hyperbel känner man tre tangenter och en asymptot. Konstruera den andra asymptoten.

267. Ett kägelsnitt är givet genom fem punkter. Konstruera skärningen mellan kägelsnittet och en rät linje genom en av dessa punkter. Använd detta för att konstruera polaren till en godtycklig punkt.

268. Ett kägelsnitt är givet genom fem tangenter. Konstruera dess medelpunkt.

269. Ett kägelsnitt är givet genom tre tangenter och på två av dem tangeringspunkterna. Konstruera tangeringspunkten på den tredje tangenten.

Rymdgeometri

Om ej annat framgår av formuleringen förutsättes att alla koordinatsystem i detta avsnitt är rätvinkliga.

270. En ljusstråle med riktningstalen $(1,\ 2,\ 2)$ reflekteras mot planet $3x + 4y + z = 0$. Sök riktningstalen för den reflekterade strålen.

271. Bestäm de räta linjer, som skär linjerna $x = y = 0$ och $x = 1$, $z = 0$ under $60°$:s vinkel.

272. Positiva axlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem projiceras ortogonalt på ett plan. När kommer projektionerna att bilda lika vinklar med varandra?

273. Enhetssträckorna på de tre axlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem i rymden projiceras på ett plan. Visa, att summan av projektionernas kvadrater är 2.

274. u_1, u_2, u_3 och u_4 är de vinklar, som en rät linje bildar med rymddiagonalerna i en kub. Visa, att $\sum_1^4 \cos^2 u_k$ är konstant $= \frac{4}{3}$.

275. De två räta linjerna $z = 0,\ 2x - y - 1 = 0$ och $z = 0,\ 3x - y - 2 = 0$ projiceras centralt från punkten $(1,\ 0,\ 1)$ på yz-planet. Bestäm projektionernas ekvationer.

276. Finns det något värde på a, för vilket planen $4x + 7y + z = 3$, $x + ay - 2z = 2$ $7x + 10y + az = 4$ går genom samma räta linje?

277. F_1, F_2, F_3 och F_4 är sidoytorna i en tetraeder. Vektorn $\boldsymbol{n}_k$ är yttre normal till F_k och har storleken lika med ytan av F_k. Bevisa, att $\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 + \boldsymbol{n}_4 = 0$

---

278. Från en punkt P på ytan av en sfär drages tre kordor PA, PB och PC vinkelräta två och två. Visa att $PA^2 + PB^2 + PC^2$ är konstant.

279. Från vilka punkter i xy-planet kan man se hela den räta linjen $y = 0$, $z = c$, om sfären $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(r < c)$ är ogenomskinlig.

280. Angiv i determinantform ekvationen för den sfär, som är omskriven kring en tetraeder med hörnpunkterna $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

281. Bestäm ett klot som är ortogonalt mot de fyra kloten

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, & x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2y + 4z &= 3,\\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z &= 9, & x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 4z &= -3. \end{aligned}$$

282. Bestäm ekvationen för den sfär, som går genom cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ och skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ längs en storcirkel.

283. Visa, att punkterna $(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 3,\ 0)$ och $(0,\ 0,\ 6)$ med en kongruenstransformation kan överföras i $(1,\ 2,\ -1)$, $(3,\ 3,\ 1)$ och $(-1,\ -2,\ 3)$. Bestäm de båda möjliga transformationerna.

284. $(x',\ y',\ z')$ är spegelbilden av punkten $(x,\ y,\ z)$ i planet $ax + by + cz + d = 0$. Uttryck x', y', z' i x, y, z.

285. $\dfrac{x-a}{l} = \dfrac{y-b}{m} = \dfrac{z-c}{n}$ är en linje i ett rätvinkligt koordinatsystem. Angiv analytiskt den kongruenstransformation, som består av vridning ett halvt varv kring denna linje.

286. För vilka värden på parametern a är området

$$|ax + 2y + z| \leq 3, \quad |(1 + a)x - 3y + z| \leq 2, \quad |x - 5y - az| \leq 1$$

ändligt, och vad är då dess volym?

287. Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ skäres längs en ellips av planet $Ax + By + Cz = 0$. Beräkna ellipsens yta.

288. Visa, att orten för mittpunkterna av de kordor i en ellipsoid, vilka går genom en fix punkt, är en ellipsoid.

289. Visa, att tangentplanen till en tvåmantlig rotationshyperboloid skär asymptotkonen i en ellips med konstant lillaxel.

290. Beräkna volymen mellan ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ och tangentkonen från en punkt (x_0, y_0, z_0) utanför ellipsoiden.

291. Visa, att tangentplanen till en tvåmantlig hyperboloid begränsar en konstant volym tillsammans med asymptotkonen.

---

292. Sök vinkeln mellan de tangentplan till ellipsoiden $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 14$, vilka innehåller linjen $\frac{x-8}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{2}$.

293. Bestäm ekvationen för den kon, som genereras av normalerna från origo mot de gemensamma tangentplanen till ellipsoiderna $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ och $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$.

294. Genom en fix punkt O på snittlinjen mellan två givna plan drages två mot varandra vinkelräta linjer OA och OB, en i vardera planet. Visa, att normalen i O mot planet OAB genererar en andragradskon.

295. Två rätvinkliga koordinatsystem har samma origo. Visa, att de sex axlarna ligger på en andragradskon.

296. Visa, att varje rotationskon med centrum i origo skär ytan $3x^2 - y^2 - z^2 - 12x + 9 = 0$ i plana sektioner.

---

297. En rotationshyperboloid har z-axeln till axel och linjen $x = az + b$, $y = cz + d$ som generatris. Skriv upp dess ekvation.

298. Sök ekvationen för den yta som uppkommer, då kurvan $xz = a^2$, $y = 0$ roterar kring linjen $x = y = z$.

299. En ellips har storaxeln $2a$ och lillaxeln $2b$. Dess medelpunkt ligger i origo och dess storaxel utefter linjen $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Sök ekvationen för den yta, som uppkommer, om ellipsen roterar kring storaxeln.

300. Vilken yta alstras av en rät linje, som rör sig så, att den skär z-axeln och hyperbeln $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ samt tangerar den hyperboliska paraboloiden $4z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$?

Svar och anvisningar

Ekvationsteori och komplexa tal

2. Cirkeln $|w - 2 + i| = 2$.

3. Sträckan från 1 till -1 beskriven två gånger.

4. $f(f(z)) = z$.

5. $\operatorname{Re}\log(1+z) = \frac{1}{2}\log 3$, $\operatorname{Im}\log(1+z) = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

6. Betrakta den ekvation, vars rötter är z_1, z_2 och z_3.

7. $a = 24$, $b = 32$.

9. Satsen är riktig även för en allmän ekvation av 3:e graden med komplexa koefficienter.

10. $2a^3 - 9ab + 27c = 0$, $3b - a^2 > 0$.

11. Använd partialbråksuppdelningen av $\frac{P'(z)}{P(z)}$.

12. $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\phi + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$.

13. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. – Bilda först den ekvation, vars rötter är $y_k = e^{\frac{2\pi ik}{7}}$, $k = 1, \ldots, 6$, och observera att $y_k + \frac{1}{y_k}$ är rötterna till den sökta ekvationen!

14. 8. – Skriv $\frac{1}{\left(\sin\frac{k\pi}{7}\right)^2} = \frac{2}{1 - \cos\frac{2k\pi}{7}}$ och använd föregående uppgift.

15. $(1 \pm z)^n = 1$.

16. Utgå från uppdelningen av $\frac{z^n - 1}{z - 1}$ i lineära faktorer.

18. $P(a) + (x - a)P'(a)$.

20. För $n = 3(2k+1)$, där $k = 0, 1, 2, \ldots$ har ekvationen dubbelrötterna $= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

21. 7.

22. $y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0$. – Visa först, att $(x_1 - x_2)^2 = \frac{3q}{x_3} - p$.

23. $x^3 + 16x + 9 = 0$.

24. $-p^3q(1+p+q)$.

25. $c(a-1)^2+(b-c)^2=0$.

26. $a^2d=c^2$.

27. $c=\pm 1$, $|a-c|\le 2$, $b=ac$.

30. Bilda t.ex. derivatan av funktionen $e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$.

31. $p+1>|q|$.

33. Derivera!

34. Använd partialbråksuppdelningen av $\frac{P'(x)}{P(x)}$.

35. Inför $\xi=x+a$.

38. Använd partialbråksuppdelningen av $\frac{P'(x)}{P(x)}$.

40. $n=0$, $x=0$ eller $n=4$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$. – Observera, att ekvationen är reciprok.

Determinanter och lineära ekvationsssystem

42. $\prod_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$.

44. $\left(x+\sum_{1}^{n}a_j\right)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

45. Multiplicera determinanten med sig själv.

46. Determinanten är en Vandermondes determinant.

47. Induktionsbevis.

49. $\prod_{i=1}^{n}\left(a_1+a_2\epsilon_i+\ldots+a_n\epsilon_i^{n-1}\right)$, där ϵ_i är de n:te enhetsrötterna. Ledning: Visa först, att alla dessa parenteser är faktorer.

50. Värdet är $\frac{n![(n-1)!\ldots 1!]^3}{(2n)!\ldots(n+1)!}$. – Detta bevisas med induktion genom att man subtraherar rader och kolonner.

51. Värdet är 1. – Beviset analogt med föregående problem, om man använder Pascals triangel.

52. $m=\frac{n}{2}+1$ om n är jämnt, $m=\frac{n+1}{2}$, om n är udda.

55. Likhet då vektorerna (x_i, y_i, z_i) är vinkelräta mot varandra eller någon är noll.

56. En lösning för $a \neq -2, 2, 3$, ingen lösning för $a = \pm 2$, $b \neq 0$, oändligt många lösningar för $a = 3$ och för $a = \pm 2$, $b = 0$.

58. Om $a \neq b$, $b \neq 1$ endast lösningen $x = y = z = w = 0$.
Om $a \neq b$, $b = 1$ lösningarna $x = 0$, $y = w$, $z = -2w$.
Om $a = b \neq 1$ lösningarna $y = x$, $z = -(4a + 1)x$, $w = 3ax$.
Om $a = b = 1$ lösningarna $x = z + 2w$, $y = -2z - 3w$.

Derivator

60. $f^{(n)}(0) = 0$ för alla n.

61. $F'(0) = 0$.

62. $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$.

63. $s^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} - 2st \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} + t^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + s\dfrac{\partial z}{\partial s} + t\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

66. Funktionaldeterminanten är $= \xi_1^{n-1} \xi_2^{n-2} \ldots \xi_{n-1}$.

67. Funktionaldeterminanten är $= r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3} \ldots \sin\theta_{n-2}$.

Olikheter

68. Då alla a_i är lika.

69. Då alla a_i är lika. – använd Cauchy-Schwarz' olikhet.

70. Nej. – Visa att $x_1x_2x_3(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \leq \dfrac{1}{64}$.

73. Visa att $f(a)$ är konvex och symmetrisk med avseende på $a = \dfrac{1}{2}$.

74. Använd Cauchy-Schwarz' olikhet för integraler.

75. För godtyckligt b är

$$\cos b \int_0^1 f(x) \cos ax\, dx + \sin b \int_0^1 f(x) \sin ax\, dx = \int_0^1 f(x) \cos(ax - b)\, dx \leq 1.$$

Bestäm maximum av första ledet, då b varierar.

Gränsvärden

76. $\dfrac{1}{2}$.

77. $b = \frac{3}{2}$.

79. $e^{3/2}$.

80. $a = -\frac{1}{2}$. Gränsvärdet = 2.

81. Visa först, t.ex. med hjälp av figur, att $a_n \to 0$.

82. $\frac{1}{2}$.

83. Multiplicera med $\sin \frac{\alpha}{2^n}$.

84. $\lim a_n = 1$. – Visa, att talföljden är monoton.

85. $\lim x_n = 2$. – Visa, t.ex. att x_{2n} är monoton.

86. Använd $\lim a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$.

87. Inför $b_n = na_n$.

88. $p \geq 0, q \geq 0, p + q - 2 > 0$.

91. Bilda funktionsföljden $z_n(x) = e^x y_n(x)$.

92. $\lim_{x\to 0} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 1$, $\lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to 0} f_n(x)) = 0$. Alltså är följden $f_n(x)$ ej likformigt konvergent för $0 \leq x < \infty$, däremot för $0 < \delta \leq x < \infty$.

93. $\frac{1}{p}$.

94. 1.

95. $a = 1$. Gränsvärdet = $\frac{1}{2}$.

96. $p!$.

97. Partialintegrera två gånger!

98. $\frac{1}{2}$.

99. $f(x) = 1$ för $0 \leq x < 1, f(1) = \frac{1}{2}, f(x) = 0$ för $1 < x$. Då $f(x)$ är diskontinuerlig är konvergensen inte likformig.

Oändliga serier

104. $a > 1$.

105. $a < \frac{1}{e}$.

106. $x + |y| < -1$.

107. $a \leq 1$.

108. a) konvergent. b) divergent.

109. Antalet termer i den angivna summan, vilkas nämnare inte innehåller någon nia är $= 8 \cdot 9^m$. Summan av dessa termer är då mindre än $8 \cdot 9^m \cdot \frac{1}{10^m}$.

110. Serien är divergent.

111. $a > 0$.

112. Serien är divergent.

113. Serien är konvergent.

114. Divergent för $p \neq q$, men konvergent för $p = q$.

115. Använd Abels lemma!

116. $|x| \leq 1$.

117. $|x| < \frac{1}{e}$.

118. $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$.

120. Visa först att $na_n \to 0$.

121. Visa, att termernas absolutbelopp går monotont mot noll.

122. Motexempel till 119: $a_{2k} = \frac{1}{k}$, $a_{2k+1} = \frac{1}{k^2}$. (Gränsvärdet = 0).
Motexempel till 120: $a_{k^3} = \frac{1}{k^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ för $n \neq k^3$.
Motexempel till 121: $a_{2k+1} = 0$, $a_{2k} = \frac{k+1}{\log 2(k+1)} - \frac{k}{\log 2k}$.

124. Använd $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$.

127. Använd $\frac{u_n}{1+u_n^2} = u_n - \frac{u_n^3}{1+u_n^2}$.

128. Använd Abels lemma.

130. $|x| < 1$. Summan $= \dfrac{\log(1-x)}{x-1}$.

131. $\dfrac{1+x}{x^2-x+1}$.

132. $r < 1$. Summan $= \dfrac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}$.

133. Summan $= (-1)^n\dbinom{a-1}{n}$. – Använd $f(x) = (1-x)^a$.

134. $\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)$.

135. 1.

136. $\dfrac{\pi^2}{3} - 3$.

137. $\dfrac{1}{8}$ och $\dfrac{3}{2} - 2\log 2$.

138. $\dfrac{5}{2}$.

140. Serien är inte likformigt konvergent för $|x| < 1$ resp. $|x| > 1$.

141. Bevisa, att serien är likformigt konvergent.

142. $f(x)$ är kontinuerlig och $f'(x)$ existerar och är kontinuerlig.

144. $-\dfrac{\pi^2}{6}$.

Integraler

146. Konvergens för $-2 < a < 0$ och absolut konvergens för $-2 < a < -1$.

147. $p + 2q + 1 > 0$ och $p + 1 > 0$.

148. $-2 < a < 2$.

149. $p = 0$, $-2 < q < 0$ eller $p < 0$, $-2 < q$.

150. Divergent. – Uppskatta $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x(2-\sin x)}\,dx$.

151. $a < -1$ eller $a > 1$.

152. Påståendet följer av $\displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \geq f(x)\cdot\frac{x}{2}$. Att omvändningen är fel, visar t.ex. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\log(x+2)}$.

154. $-\log 2$.

155. $\dfrac{2\pi}{|r^2-1|}$.

156. $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}$ resp. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

157. $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\log|a|}{|a|}$.

158. $-\pi\log 2$ resp. $-\dfrac{\pi^2}{2}\log 2$.

159. a) π, b) $\dfrac{\pi}{2}$, c) $\dfrac{2\pi}{3}$.

160. $\dfrac{e\sqrt{\pi}}{2}$.

162. $P_n(x) = x^{2n-1} + \dfrac{2n-1}{2}x^{2n-3} + \ldots + \dfrac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}x$, $C = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}$.

163. Frullanis integral blir $f(0)\log\dfrac{b}{a}$. Den sista integralen $= \log 2$ (sätt t.ex. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $b = 2a = 2$).

165. Tydligen byter $f(x)$ tecken i minst en punkt a. Bilda integralen av funktionen $(x-a)f(x)$. – Allmännare: om

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx = 0,\ (k = 0, 1, \ldots, n),$$

så byter $f(x)$ tecken i minst $n+1$ punkter.

166. Derivera med avseende på a (visa att detta är tillåtet). Den sista integralen $= \dfrac{n!}{2}$.

167. $-\sqrt{a\pi}$.

168. $\dfrac{\pi}{2}\log(1+a)$.

Multipelintegraler

170. $\dfrac{\pi^{3/2}}{2}$.

171. $\dfrac{\pi}{4}$.

172. $\dfrac{4}{3}(7-3\sqrt{3})$.

173. $\dfrac{\pi^2}{4}$.

174. $\pi\sqrt{2}$.

175. $\dfrac{\pi}{6}$.

176. Konvergent då $A,\ C > 0$ och $AC - B^2 > 0$. Värdet är då $\dfrac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$. – Inför t.ex. huvudaxlarna till $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ som nya axlar.

177. $\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{A + C}{(AC - B^2)^{3/2}}$.

178. $\dfrac{2\pi}{3} b(3a^2 - b^2)$. – Observera att integranden är konstant på de konfokala ellipserna.

179. $\pi\left(a^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.

180. $\dfrac{\pi}{3}$.

181. $\dfrac{a^4}{8}$.

182. $\pi^2 a^2$.

183. $p < -2$.

184. $\dfrac{\pi A}{4 + \pi|ab|}$.

185. $\dfrac{2}{k + 2}$.

Linjeintegraler

189. Linjeintegralen $= e - 1$.

190. a) 0. b) $-\pi$. c) -2π.

191. $\pm 2\pi$.

193. 0.

194. $e - 1 - \dfrac{1}{8}$.

195. 0.

196. $\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{8} \log 3$.

Differentialekvationer

198. Fullständiga lösningen: $y = \frac{x}{1-x}\log\frac{x}{1-x} + C\frac{x}{1-x}$. Integralkurvan går genom $(\frac{1}{2}, 0)$ då $C = 0$.

199. $y = e^x\left(\frac{x^3}{6} + Ax + B\right)$.

200. $\lambda = 1 + n^2\pi^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Motsvarande lösningar: $y = Ce^x \sin n\pi x$.

201. $y = C\sin x$.

202. $\beta \neq \alpha$: $y = \frac{e^{\beta x}}{(\beta-\alpha)^n} + e^{\alpha x}P(x)$, $\beta = \alpha$: $y = e^{\alpha x}\left(\frac{x^n}{n!} + P(x)\right)$, där $P(x)$ är ett polynom av graden $n - 1$.

203. $y = \left(A + Bx - \frac{x^3}{24}\right)\sin x + \left(Cx + D - \frac{x^2}{8}\right)\cos x$.

204. $y = -\frac{\log x}{2} - \frac{1}{4} + Ax + \frac{B}{x^2}$. Inför $t = \log x$ som ny oberoende variabel.

205. $\phi(x) = 1 + \frac{x^2}{9}, f(x) = -\frac{(x^3+15)}{3x}$, $y = A\left(1 + \frac{x^3}{9}\right) + Be^{\left(1+\frac{x^3}{9}\right)}$.

206. $y = e^{-x} + 2Ae^{-2x} - Be^{-3x}$, $z = Be^{-3x} - Ae^{-2x}$. Speciella lösningen: $y = e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}$, $z = e^{-2x} - e^{-3x}$.

207. $u = A + \frac{B}{r}$ resp. $u = \frac{\varrho r^2}{6} + A + \frac{B}{r}$.

208. $e^x \sin y + y = C'$.

209. $4x^3 + 3x^2y + y^3 = C'$.

210. $f(t) = \frac{A}{t^3}, F(x.y) = -A\frac{(x+y)}{(x-y)^2} + B$.

211. $\pm x = A \arcsin\sqrt{\frac{y}{A}} - \sqrt{y(A-y)} + B$. Speciella lösningen: $x = \arcsin\sqrt{y} - \sqrt{y(1-y)} - \frac{\pi}{2}$.

212. $f(x) = Ae^x + Bxe^x$.

213. $f(x) = e^x(x^2 + Ax + B) - \left(A + \frac{3}{2}B + 1\right)$. Speciella lösningen: $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2$.

214. $f(x) = e^x$.

215. $f(x) = \cos\lambda x$, där λ är ett godtyckligt komplext tal, eller $f(x) \equiv 0$.

216. Differentialekvationen: $(1 + x^2)y'' - xy' = 1 + x^2$. MacLaurin-serien:

$$y = x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},$$

konvergent för $-1 \leq x \leq 1$.

217. Rekursionsformeln $a_{n+1}(n+1)^2 = a_n$ ger $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$.

Maxima och minima

218. Funktionen har ett maximum = 5 för $x = y = z = 0$.

219. Funktionen har ett maximum = $\sqrt{\dfrac{3}{2e}}$ i $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ och ett minimum = $-\sqrt{\dfrac{3}{2e}}$ i $(\frac{1}{-\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

220. Planet $x + y + z - 3 = 0$.

221. Maximum = $\dfrac{13}{4}$ i $(\frac{1}{2}, 0)$. Minimum = $\dfrac{7}{4}$ i $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

222. Minsta avståndet = 1 i punkterna $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Största avståndet = $3^{\frac{n-1}{2n}}$ i punkterna $\pm x = \pm y = \pm z = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}$.

223. Om $a \geq b \geq c$ är maximum = $a - c$.

224. Minsta omkretsen = $2\sqrt{a^2 + b^2}$. – Bevisas t.ex. med spegling i rektangelns sidor.

225. Största avståndet = $\dfrac{2 + \sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

226. Ytans minimivärde = $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Geometriska användningar av differential- och integralkalkylen

227. Orten är $y^3 + yx^2 + \dfrac{x^2}{4} = 0$, som har en asymptot $y = -\dfrac{1}{4}$. Ytan är $\dfrac{3\pi}{64}$.

228. Ytan är $\dfrac{\pi a^2}{32}$.

229. $\dfrac{\pi}{8ab}(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)$.

231. $$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \sin\alpha}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\cos\alpha\,\dfrac{dy}{dx}\right)^{3/2}}.$$

234. $(x^2 + y^2)^2 = 4k^2xy$.

235. $y^2 = -\dfrac{x^3}{x + p}$.

236. Orten och enveloppen är $y = (a-1)\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}$. – Bevisa direkt utan räkning, att orten måste sammanfalla med enveloppen.

237. $x^2 + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. –Använd ekvationen i linjekoordinater.

238. Den liksidiga hyperbeln med F_1F_2 som transversalaxel.

239. $xy = \pm\frac{A}{2\pi}$.

241. $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2}\right)$.

242. $\frac{16r^3}{3\sin\alpha}$.

243. $\frac{245\pi}{8}$.

244. $\frac{2}{3}\pi abc(3\sqrt{3} \pm 1)$.

245. Ekvationen blir $(x^2 + y^2)^2 + x^2(z^2 - a^2) = 0$. Volymen $= \frac{2\pi a^3}{3}$.

246. $a < -1$. Volymen blir då $\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2a-1}{a+1}$.

Plan geometri

248. a) En cirkel genom P_1 och P_2. b) En liksidig hyperbel med P_1P_2 som diameter.

249. En hyperbel med medianen från B som diameter och asymptoterna parallella med AB och BC.

251. $x^2 + y^2 - (a+1)y - bx = 0$.

255. En cirkel genom sidornas mittpunkter.

260. Linjen är vinkelrät mot l.

261. Visa, att CC' är polar till P.

262. Konstruera fem punkter respektive fem tangenter.

264. Välj lämpligt koordinatsystem (använd t.ex. uppgift 257).

266. Konstruera först två tangeringspunkter med hjälp av Brianchons sats.

Rymdgeometri

270. $(-2, -2, 1)$.

271. $x = \pm y\sqrt{2} = 1 \pm z\sqrt{2}$ (4 linjer).

272. Då planets ekvation är x+y+z=a.

275. $y + z + 1 = 0$ resp. $y + z + 2 = 0$.

276. $a = 4$.

277. Generalisera satsen till polyedrar.

279. $|y| \geq \dfrac{rc}{\sqrt{c^2 - r^2}}$.

280. $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \dots\dots & & & & \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

281. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$.

282. Ekvationen är $x^2 + y^2 + (z - a)^2 - a^2 - 1 = 0$ med $a = \dfrac{1 + D - 2(A^2 + B^2 + C^2)}{2C}$ såvida $C \neq 0$. Är $C = 0$ finns lösning endast om $1 + D - 2(A^2 + B^2) = 0$ och då är a godtyckligt.

283. $\begin{cases} x' = \pm\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1, \\ y' = \mp\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\ z' = \mp\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1. \end{cases}$

284. $x' = x - 2\dfrac{ax + by + cz + d}{a^2 + b^2 + c^2}a$ och analogt för y' och z'.

285. $x' = 2a - x + \dfrac{l(x - a) + m(y - b) + n(z - c)}{l^2 + m^2 + n^2} \cdot 2l$ och analogt för y' och z'.

286. Området är ändligt för $a \neq 0$ och $-\frac{2}{5}$, och volymen är då $\dfrac{48}{|5a^2 + 2a|}$.

287. $\dfrac{\pi abc(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2})}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}$.

290. $\dfrac{\pi abc}{3} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2}} - 1\right)^2}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2}}}$. (Avbilda affint på en sfär.)

291. Visa, att det finns en affin avbildning med determinanten = 1 som överför hyperboloiden i sig själv och två godtyckliga tangentplan i varandra.

292. $\arccos \dfrac{6}{\sqrt{85}}$.

293. $(A^2 - a^2)x^2 + (B^2 - b^2)y^2 + (C^2 - c^2)z^2 = 0$.

207. $x^2 + y^2 = z^2(a^2 + c^2) + 2z(ab + cd) + b^2 + d^2$.

298. $xy + yz + zx = a^2$.

299. $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2} + \dfrac{(xl + ym + zn)^2}{l^2 + m^2 + n^2}\Big(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\Big) - 1 = 0$.

300. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - (z + 1)^2 = 0 \Big(\text{samt området } z = 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} > 0\Big)$.