Matematik för två betyg

MATEMATIK FÖR TVÅ BETYG

150 MATEMATISKA PROBLEM
GIVNA VID TENTAMENSSKRIVNINGAR FÖR TVÅ BETYG
I FIL. KAND.– OCH FIL. ÄMBETSEXAMINA

Med svar och utförliga lösningar
utgivna av

SVEN H. HILDING

Fil. lic., amanuens vid Stockholms Högskolas
Matematiska Institut

Almqvist & Wiksells akademiska handböcker

HUGO GEBERS FÖRLAG

Uppsala 1946

Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB

Innehåll

Differentialräkning

Upprepade deriveringar

1. Beräkna $\dfrac{d^n}{dx^n}\Big(\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\log(1+x)\Big)$.

2. Bestäm en funktion $f(x)$, som satisfierar

$$e^x(x^2-6x+1)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{u}(u-t)f(t)e^t\,dt.$$

3. Bestäm antalet rötter till $\dfrac{d^n}{dx^n}\big(x^3e^{ax+b}\big)$.

Variabelbyten

4. Hur transformeras ekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$ om man inför nya oberoende variabler s och t genom

$$\begin{cases} x=e^s\cos t\\ y=e^s\sin t\end{cases}$$

5. z är en funktion av variablerna x och y, definierad genom $y=x\cdot f(z)+g(z)$. Beräkna uttrycket

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2.$$

6. (x,y) och (u,v) äro koordinaterna för samma punkt i två rätvinkliga koordinatsystem. F är en funktion av x och y. Om man i stället för x och y inför u och v i uttrycket

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}-\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Big)^2$$

vad erhålles då?

7. T är en funktion av x och y. I den införes nya variabler u och v genom $x+y=u$, $y=uv$. Beräkna

$$x\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+y\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}+\frac{\partial T}{\partial x}$$

uttryckt i u, v och derivatorna av T med avseende på u, v.

8. Transformera differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 y}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 z}=0$ genom införande av de nya oberoende variablerna $r=\dfrac{x}{z}$, $s=\dfrac{y}{z}$, $t=\dfrac{-1}{z}$ och den nya funktionen $f(r,s,t)=z\cdot V(x,y,z)e^{\frac{x^2+y^2}{4z}}$.

9. Ekvationen $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+(4x^2+5)y=x^3+x^2+\dfrac{9x}{4}+\dfrac{5}{4}$ kan integreras om man i stället för y inför variablen z genom $y=ze^{-x^2}$. Bestäm den allmänna integralen.

10. Lös differentialekvationen $(1-x^2)y''-xy'+a^2y=b+cx$ genom att införa en ny oberoende variabel genom $x=\cos t$.

11. I ekvationen $x^4\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=(x^3+2xy)\dfrac{dy}{dx}-4y^2$ införes t som ny oberoende variabel och z som ny beroende variabel genom $x=e^t$ och $y=ze^{2t}$. Härled den nya ekvationen och integrera den.

Differentialekvationer

12. Integrera differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} \cdot \cos x \cdot \cos(y - x) = \cos y$.

13. Visa att det finnes en för all positiva x (ändlig och) kontinuerlig funktion av y av x, som satisfierar

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy + 1 = 0.$$

14. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = e^x + x^2$ som antager värdet 0 för $x = 0$ och $x = \dfrac{\pi}{2}$.

15. Bestäm en funktion $f(x)$ som satisiferar

$$4f(x) + 8 + 12x - 4x^2 - 2x^3 = \int_0^x (x - t)f(t)\,dt.$$

16. Bestäm funktionen f så, att $y = \displaystyle\int_0^x (x - t)f(t)\,dt$ satisfierar ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2.$$

17. Bestäm en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter, som satisfieras av funktionen $\cos^5 x$.

18. Bestäm de funktioner $u = f(r)$ $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, som satisfierar ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0.$$

19. Man skall bestämma $f(x)$ så, att ekvationen

$$y'' + f(x)y' + xy = 0$$

får en lösning $y = g(x)$ med $g(0) = 1$ och en annan lösning $y = e^{g(x)}$. Bestäm $f(x)$ och den allmänna integralen.

20. Bestäm de funktioner y och z av x, som satisfiera

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{5y}{3} - 2z &= xe^x \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} - 2\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{y}{3} + z &= e^x \end{cases}$$

21. Om konstanten a väljes lämpligt, blir uttrycket

$$\left(4x^3 + 2xy^3 + ay^2\right)dx + \left(3x^2y^2 + 2xy + 3y^2\right)dy$$

totala differentialen av en funktion $f(x, y)$ som skall bestämmas.

Differentialgeometri

22. Bestäm en integralkurva till

$$4y''' + 8y'' - y' - 2y = 25\sin x$$

som går genom $(0,0)$ och där har krökningscirkeln

$$32x^2 + 32y^2 + 15x + 20y = 0.$$

23. Sök de kurvor vilkas tangenter ha den egenskapen, att tangeringspunkten och tangentens skärningspunkt med linjen $y = b$ bilda ett harmoniskt punktpar med tangentens skärningspunkter med cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

24. Beteckna med A, B, C punkterna $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Sök och diskutera de kurvor Γ som är så beskaffade, att linjerna PA och PB bilda ett harmoniskt linjepar med PC och tangenten till Γ i P, där P betyder en godtycklig punkt på Γ.

25. Sök en plan kurva med den egenskapen att krökningscirkeln i en godtycklig punkt P på kurvan avskär en tredejedel av radius vektor OP (O = origo).

26. Låt $x\cos v + y\sin v = p(v)$ vara ekvationen för en godtycklig tangent till en given kurva. Bevisa att krökningsradien till kurvan i tangeringspunkten är given genom formeln $R = \pm\left(p + \dfrac{d^2p}{dv^2}\right)$. Sök den kurva, som har krökningsradien $\left(\sin^2 v + 1\right)$ och som är symmetrisk med avseende på x-axeln och y-axeln. Beräkna den area som omslutes av denna kurva.

27. Bestäm krökningsradien till en ellips såsom funktion av radii vectores r_1 och r_2 från brännpunkterna.

28. En hyperbel konstrueras så, att den tangerar en given ellips och går genom ellipsens centrum samt har sina asymptoter parallella med ellipsens axlar. Bevisa att krökningscentrum till ellipsen i kontaktpunkten är beläget på hyperbeln.

29. P_n är krökningscentrum för den punkt på kurvan $y = x^n$, där krökningen är störst. Visa att P_n närmar sig ett gränsläge, då $n \to \infty$.

30. Betrakta en kurva C given av

$$\begin{cases} x = g(s) \\ y = h(s) \end{cases} \qquad (s = \text{båglängden})$$

Avsätt i tangentens positiva riktning (svarande mot växande s-värden) et segment av konstant längd L. Ändpunkten av denna sträcka beskriver en kurva T, då s varierar. Bevisa, att krökningen K till T sammanhänger med krökningen k till C i motsvarande punkt enligt formeln

$$K = \frac{k + Lk' + k^3L^2}{(1 + L^2k^2)^{3/2}} \qquad \left(k' = \frac{dk}{ds}\right)$$

31. Från en given punkt på en cirkels periferi drages normalen mot en rörlig tangent till cirkeln. Orten för normalens fotpunkt är en kardioid. Bestäm kardioidens evoluta, visa att den är en kardioid, och konstruera de båda kurvorna.

32. Parallella ljusstrålar reflekteras vid en cirkel. Visa, att enveloppen för de reflekterade strålarna är en kurva, som beskrives av en punkt på en cirkel, då denna rullar utanpå en annan cirkel med dubbelt så stor radie.

33. Ljusstrålar, parallella med x-axeln, reflekteras vid kurvan $y = a \cdot \log\dfrac{x}{a}$. Sök enveloppen för de reflekterade strålarna, och konstruera den.

34. C är en sluten konvex kurva, vars tangenter ha ekvationen

$$x \cos V + y \sin V - F(V) = 0$$

där $F(V)$ är en given funktion. Från en punkt A i det inre av C fälles perpendikeln mot en variabel tangent till C. Orten för perpendikelns fotpunkt är en kurva K. Den av K inneslutna arean beror på A:s läge. Visa, att de punkter A, för vilka denna area får ett givet värde, ligga på en cirkel.

Maxima och minima

35. Konstruera och diskutera kurvan

$$y = \frac{(3 + x^2) \arctan x - 3x}{x^3}.$$

Undersök speciellt kurvans förhållande för $x \to 0$ och $x \to \infty$. Bevisa, att kurvan för positiva x har ett och endast ett maximum.

36. Undersök kurvan $y^5 + y^3 + y - x^5 = 0$. Visa, att mot varje reellt värde på x svarar ett och endast ett reellt y-värde. Detta är en funktion $y = f(x)$, som är ständigt växande. Bestäm inflexionspukterna. Asymptoter?

37. Bestäm kortaste avståndet från en punkt på kurvan $x^2y + a^3 = 0$ till en punkt på kurvan $5x^2 = 12ay$.

38. I ena öglan av en lemniskata $\big($ekvation $r^2 = 2a^2 \cos 2v$ eller $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\big)$ inskrives en rektangel, vars sidor äro parallella med axlarna. Bestäm dess hörn, då dess area är så stor som möjligt.

39. Betrakta

$$f(x) = \frac{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}.$$

Bevisa, att $f(x) \leq n$, då $1 \leq x \leq \infty$.

40. Beräkna, med två decimaler, ytan till den största triangel som har sina hörn belägna på tre koncentriska cirklar med radierna 1, 2 och 3.

41. Sök maximum av $x_1x_2x_3$, då $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1x_2x_3$, och $0 < x_p < 1$ för $p = 1, 2, 3$.

42. Sök eventuella maximi- och minimivärden av $x^2 + y^2 + z^2$, då mellan variablerna råda sambanden

$$x + y + z - 1 = 0, \qquad xyz + 1 = 0.$$

43. Bestäm maxima och minima av xyz, då

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

44. Sök maxima och minima av $P(u) + P(v)$, då $u^2 + v^2 = 1$, om

$$P(x) = \begin{vmatrix} 4x^3 & 1 & 0 \\ u^4 & u & 1 \\ v^4 & v & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x & 0 \\ u^3 & u^2 & 1 \\ v^3 & v^2 & 1 \end{vmatrix}$$

45. Bestäm maxima och minima hos

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ y & x & 0 & z \\ z & 0 & x & y \\ 0 & z & y & x \end{vmatrix}$$

då $x + y + z = S$ och S är en konstant.

46. a och b äro reella eller komplexa tal, som satisfiera $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Sök maximum av absoluta beloppet av $a^2 - b^2 + 2ab$.

47. I en cirkel med radien 1 är inskriven en reguljär n-hörning. En punkt P rör sig från medelpunkten O längs en radie till cirkeln. För vilket läge av P blir produkten av avstånden från P till polygonens hörn minst? Hur stor är den då?

Integraler

Enkelintegraler

48. Vilket är det minsta värden som integralen

$$\int_0^1 \left|t + x^2 - x\right| \, dx$$

kan få för något värde på t?

49. $f(x)$ är deriverbar i $(0, 1)$ och $f'(x)$ är där > 0. Bestäm a så, att

$$\int_0^1 \left|a - f(x)\right| \, dx$$

blir så litet som möjligt.

50. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1 + x^2)^4} \, dx$.

51. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 x \cdot |1 - 2x| \cdot e^{x(1-x)} \, dx$

52. Kurvan $y = \displaystyle\int_0^\infty e^{-at} \sin xt \, dt$ roterar kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym. (a en konstant > 0)

53. $P_4(x)$ är ett polynom av 4:e graden i x. På den kurva det representerar väljas punkterna $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, så att deras abskissor bilda aritmetisk serie. En annan kurva $y = P_5(x)$, där P_5 är ett polynom av 5:e graden, går genom alla punkterna A_i. Visa, att

$$\int_{x_1}^{x_5} \left(P_5(x) - P_4(x)\right) dx = 0.$$

54. Bestäm polynom P, Q så, att $\displaystyle\int \frac{Q}{\sqrt{R}} \, dx = \log\left(P + (x + a)\sqrt{R}\right)$, då R är ett polynom givet av $R = \left(x^2 + ax\right)^2 + px$.

55. Bestäm det värde x för vilket

$$\int_0^x \frac{du}{(1 + u^2 y^2)\sqrt{1 + u^2}} = \int_x^\infty \frac{du}{(1 + u^2 y^2)\sqrt{1 + u^2}}$$

då y är ett givet tal > 0.

56. Hur många termer ur serien $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25} - \cdots$ måste medtagas för att erhålla seriens summa med ett fel numeriskt mindre än 10^{-5}?

57. Betrakta $F(a) = \int_0^{k\pi} e^{ax} \cdot \dfrac{\sin 3x}{\sin x}\,dx$. Visa att $F(a) > 0$ för alla reella a och alla positiva hela tal k.

58. Visa, att om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion och

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx = b$$

så måste $b \leq 1$. Om $b = 1$ så är $f(x) \equiv 1$.

59. $f(t)$ är en given funktion, som för $0 \leq t \leq 1$ är kontinuerlig och > 0. Man betraktar funktionen

$$G(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x \cdot f(t) + (1-x) \cdot f(1-t)}$$

för $0 \leq x \leq 1$. Visa, att antingen är $G(x) > G(1/2)$ för $x \neq 1/2$, eller också är $G(x)$ konstant. När inträffar det sista fallet?

Dubbelintegraler

60. Genom varje punkt i det inre av första kvadranten i ett rätvinkligt koordinatsystem gå två cirklar, som tangera koordinataxlarna. Deras radier betecknas med R och r ($R > r$). Man betraktar integralen

$$J = \iint \frac{dx\,dy}{(1 + rR)(R - r)}$$

utsträckt över första kvadranten. Visa, att $J = \dfrac{\pi L}{8\sqrt{2}}$, där L är omkretsen av lemniskatan $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$ (ϱ, φ polära koordinater).

61. Beräkna $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^4+x^2y^2+y^4)} xy\,dx\,dy$.

62. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint \left(\frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) dx\,dy$$

utsträckt över ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

63. Beräkna $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ utsträckt över en reguljär n-hörning, då $f(x,y) =$ kortaste avståndet från (x,y) till n-hörningens begränsning.

64. K är en kvadrat i xy-planet med sidan a. Från punkten (x,y) fällas perpendiklarna mot kvadratens sidor. $F(x,y)$ är den längsta av dem, $f(x,y)$ den kortaste. Beräkna

$$\iint_K \sqrt{F(x,y) \cdot f(x,y)}\,dx\,dy.$$

65. Ett rektangulärt fält med sidorna $2a$ och $2b$ skall bevattnas från en brunn i diagonalernas skärningspunkt. Kostnaden per ytelement är proportionell mot dess storlek och mot dess avstånd från brunnen. För ytenheten på avståndet 1 är den k kr. Beräkna kostnaden för hela fältet.

66. I xy-planet är givet en cirkel med radien a. Från den variabla punkten (x, y) dragas tangenterna till cirkeln; de bilda med varandra vinkeln V. Beräkna

$$\iint (V - \sin V)\, dxdy$$

utsträckt över den del av planet som är utanför cirkeln.

67. I ett rätvinkligt koordinatsystem betraktas parabeln $P : \; y^2 - 2px = 0$ med brännpunkten F. Q är en annan parabel, likställd med P i avseende å F. Beräkna $\iint \frac{dxdy}{R^2}$ utsträckt över området mellan P och Q, då $R =$ avståndet från punkten (x, y) till F.

68. Visa, att områdena $A : \; 0 < x < y$ och $B : \; \xi > 0$, $\eta > 0$ svara punkt för punkt mot varandra genom sambanden

$$2x = \left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right) \cdot \eta, \qquad 2y = \left(e^{\xi} + e^{-\xi}\right) \cdot \eta.$$

Använd denna transformation för att beräkna

$$\iint_A \frac{(y - x)\, dxdy}{(x + y)(1 + y^2 - x^2)^2}$$

69. Beräkna $\iint \frac{xy}{(x^2 + y^2)^3}\, dxdy$ utsträckt över ett område D i första kvadranten som begränsas av kurvorna $xy = 1$, $xy = 4$, $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$.

70. S är en kroklinjig fyrhörning i halvplanet $y > 0$, begränsad av parablerna $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = 2x + 1$, $y^2 = 9 - 6x$, $y^2 = 4 - 4x$. Beräkna

$$\iint_S \frac{y\, dxdy}{(1 + x)\sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Konvergens

71. För vilka värden är integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin kx}{x}\, dx$$

konvergent? Vad är då dess värde?

72. $a_1, \, a_2, \dots$ är en följd av positiva, avtagande tal med $a_n \;\to\; 0$. I ett rätvinkligt koordinatsystem sammanbindas punkterna $(n, 0)$ och $(n + 1, 0)$ med en parabelbåge, som har toppen i $(n + \frac{1}{2}, a_n)$. Denna konstruktion göres för $n = 0, 1, 2, \dots$. Då erhålles kurvan $y = f(x)$. Undersök konvergensen hos

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin \pi x\, dx.$$

Gränsvärdesproblem

Oändliga talföljder

73. Undersök konvergensen av talföljden $a_1, \, a_2, \dots, \, a_n, \, \dots$ då

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big), \quad a_1 = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{1}{a}\Big), \quad \text{och} \quad a > 0.$$

Bestäm det eventuella gränsvärdet.

74. I följden av positiva tal $u_1, u_2, u_3, \dots$ är $u_1 = a > 0$ och $u_{n+1}^2 = 1 + u_n$. Visa, att talföljden har ett gränsvärde och bestäm detta.

75. Utför ett bevis för att talföljden $x_1, x_2, \dots$ har ett gränsvärde, då

$$x_1 = \sqrt{7}, \quad x_n = \sqrt{7 + x_{n-1}}.$$

76. a_0 och a_1 äro givna tal. Man definierar $a_2, a_3, \dots$ genom $a_{n+1} = (1-k)a_n + ka_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ där $|k| < 1$. Visa, att $\lim_{n\to\infty} a_n = Z$ existerar. Om $k = r(\cos v + i \sin v)$, $0 < r < 1$ och v genomlöper intervallet $(0, 2\pi)$, samt $Z = x + iy$, så ligga punkterna (x, y) också på en cirkel.

77. Betrakta talföljden $s_0, s_1, s_2, \dots$ definierad genom

$$s_0 = 2, \quad s_{2n+1} = \frac{1}{s_{2n}}, \quad s_{2n} = 2 + \frac{1}{s_{2n-1} - 2}.$$

Bevisa, att $\lim_{p\to\infty} s_p$ existerar, samt undersök, huruvida serien $\sum_{n=1}^{\infty} (s_{2n} - 1)$ konvergerar.

78. Betrakta de två talföljderna $a_1, a_2, \dots$ och $b_1, b_2, \dots$, som definieras genom

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)$$
$$b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-1}}\right)$$

$n = 1, 2, 3 \dots$. där a_0 och b_0 äro två givna positiva tal. Bevisa, att talföljderna konvergera mot samma gränsvärde.

79. Visa, att talföljden $u_1, u_2, , \dots$ har ett ändligt gränsvärde, då

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

80. Undersök, om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} - \log\log n\right)$$

existerar.

81. Undersök konvergensen hos serien $\sum u_n$, då

$$u_n = (-1)^n\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right).$$

82. Serien $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$, vars summa är $\log 2$, omordnas så, att 2 positiva termer gå före en negativ:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Visa, att denna serie är konvergent och beräkna dess summa.

83. I serien $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots$ har en grupp termer ett visst tecken. På den följer en grupp med motsatt tecken, vars antal är 1 större än föregående grupps, o.s.v. Är serien konvergent?

84. Undersök konvergensen av serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n(\log n)^2}.$$

85. Undersök, huruvida serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

konvergerar.

86. Skärningspunkterna mellan kurvan $y = \tan x$

87. Bevisa, att talföljden

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}, \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \ldots$$

konvergerar.

88. Undersök den absoluta konvergensen av den oändliga produkten

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{16n^{5/2}}{3\pi} \int_0^n \frac{dx}{(x^2 + n)^3} \right\}.$$

89. Undersök huruvida $\displaystyle\prod_{2}^{\infty}(1 - u_n^2)$ är konvergent, när

$$u_n = \sum_{v=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-v}}{v^a}$$

90. Om $-\dfrac{1}{2} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$ och $\sum a_n^2$ är konvergent, så äro serierna $\sum a_n$ och $\sum \left(\sqrt{1 + a_n} - \sqrt{1 - a_n}\right)$ samtidigt konvergenta eller divergenta.

Potensserier

91. Om $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ så är $-Bx^2 < \log(1 + x) - x < -Ax^2$, där A och B äro konstanter. Visa detta och angiv siffervärden för A och B. Härled som följdsats: om a_ν äro reella tal, alla > -1 och sådana, att $\sum a_\nu^2$ är konvergent, så äro serierna $\sum a_\nu$ och $\sum \log(1 + a_\nu)$ konvergenta eller divergenta samtidigt.

92. Visa att $\left| \sin x - \dfrac{8x}{3} + \dfrac{x}{3}\sqrt{25 + 5x^2} \right| < \dfrac{x^7}{1200}$ för $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

93. Visa, att $\dfrac{x}{\sin x} > 1 + \dfrac{x^2}{6}$, $0 < x \leq \pi$.

94. I uttrycket $y = \sqrt{z + 1000}$ är z endast approximativt känt; man vet att $z = x + \delta$, där $|\delta| < 0{,}005$. Dessutom vet man, att $|z| \leq 8$. Bestäm ett polynom i x, som giver värdet av y med ett fel numeriskt mindre än $5 \cdot 10^{-4}$.

95. Undersök konvergensen hos serierna $\sum_1^\infty a_n x^n$ och $\sum_1^\infty b_n x^n$, då

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}; \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}.$$

96. Utveckla i MacLaurins serie

$$f(x) = x \cdot \log\frac{1+x}{1-x} - 2x \arctan x + \log(1 - x^4).$$

När konvergerar serien?

97. Utveckla $(1 - x^2) \cdot \log\frac{1+x}{1-x}$ i MacLaurins serie, och angiv de x-värden för vilka utvecklingen gäller.

98. Funktionen $y = (\arcsin x)^2$ satisfierar en lineär differentialekvation. Använd den för att härleda MacLaurins serie för y. När konvergerar serien?

99. Bestäm den lösning till ekvationen $y' + 2xy = 1$ som blir $= 0$ för $x = 0$. Visa, att för denna lösning har xy ett gränsvärde, då $|x| \to \infty$. Utveckla y i MacLaurins serie och undersök konvergensen.

100. Bestäm summan av serierna

$$S(x) = 1 + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{8!} + \frac{x^6}{12!} + \ldots$$

och

$$T(x) = 1 + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{9!} + \frac{x^6}{13!} + \ldots$$

101. Beräkna $\sum_{n=1}^{m} x^{n-1} \cos nz$, därav $\sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1} \cos mz$ och slutligen $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \cos mz$. Härled härav att i en triangel ABC, i vilken $a > b$ gäller $\log\frac{c}{a} = -\sum_1^\infty \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^m \cos mC$.

102. l och m äro två räta linjer som råkas under rät vinkel i A. B är en punkt på l och P_1 en punkt på m så vald, att ABP_1 har en given storlek v. Genom P_1 drages normalen P_1P_2 till BP_1; P_2 ligger på l. Genom P_2 drages normalen P_2P_3 till P_1P_2; P_3 ligger på m. Så fortsättes konstruktionen obegränsat.Om alla sträckor räknas positiva, skall man undersöka när

$$AP_1 - \frac{1}{3}AP_3 + \frac{1}{5}AP_5 - \frac{1}{7}AP_7 + \ldots$$

får en ändlig summa och bestämma den.

103. Visa att för $-1 \leq x \leq 1$ är $e^x - 1 = x + \theta x^2$, där $|\theta| \leq e - 2$. Använd detta för att undersöka om serien $\sum u_n$ är konvergent, då $u_n = \left(e^{\frac{\cos n\pi}{n}} - 1\right)$.

Andra funktionsserier

104. Undersök konvergensen hos $\sum u_n$, då

$$n \cdot u_n = 1 + \frac{\log\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)}.$$

105. Visa, att serien $\sum_1^\infty \frac{x}{(x(n-1)+1)(xn+1)}$ är konvergent för $x \geq 0$. Beräkna seriens summa. Visa, att serien är likformigt konvergent för $x \geq k$, om k är ett godtyckligt tal > 0, men däremot ej likformigt konvergent för $x \geq 0$.

106. Undersök konvergensen hos $\sum u_n$, då

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - e^{-x}\right].$$

107. Bevisa likheten

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \cdots + \cos(2n-1)x - \cos 2nx = \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(2n-\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{1}{2}x}.$$

Härled härav att likheten

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots = \frac{x}{2}$$

gäller för $-\pi < x < \pi$.

Obestämda uttryck

108. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^x + (\arcsin x)^x - 2x^x}{x^5}$.

109. Betrakta Taylorutvecklingen

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)$$

Bevisa att $\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

110. En funktion $f(x)$ har kontinuerliga derivator av till och med fjärde ordningen. Betrakta en kurva av formen $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$, som tangerar kurvan i punkterna med abskissorna $x = a$ och $x = b$ ($a < b$); låt dess ekvation vara $y = g_{a,b}(x)$. Sök

$$\lim_{b\to a}(b-a)^{-5} \cdot \int_a^b \left(f(x) - g_{a,b}(x)\right) dx.$$

111. Beräkna $\lim_{a\to 0} \frac{1}{a^4} \iint \left(2e^x \sin y - e^y \sin x\right) dxdy$ då integralen är utsträckt över området $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq a$.

112. Visa, att serien $\sum u_n$ är konvergent, när

$$u_n = e^{-n^2} \cdot \int_0^n e^{x^2}\, dx.$$

113. Visa, att $\sum_{v=1}^{n} \left(1 - \frac{2v}{n^2}\right)^{n^2}$ har ett gränsvärde för $n \to \infty$, och bestäm detta.

114. Man betraktar en plan kurva och två närbelägna punkter P och Q på denna; tangenterna i P och Q råkas i T. Man betraktar vidare cirkeln, vidskriven triangeln PTQ, som tangera PQ och förlängningarna av TP och TQ. Sök gränsvärdet för denna cirkels radie, då $Q \to P$.

115. A är arean av cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$, B är arean av den yta som begränsas av $a^2y^2(x-b)^2 = (a^2 - x^2)(a^2 - bx)^2$, $b > a$. Sök

$$\lim_{b \to a} \frac{A - B}{b - a}.$$

116. C_1, C_2,…är en följd av cirklar med växande radier som tangera en given parabel i två punkter; C_{n+1} tangerar C_n. Beräkna förhållandet mellan arean av $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ och arean av det område som begränsas av parabeln och tangenten till C_n i dess beröringspunkt med C_{n+1}. Sök limes för detta förhållande, då $n \to \infty$.

Algebra

Determinanter

117. Om $x_1 < x_2 < x_3$ så är $\begin{vmatrix} x_1 & e^{x_1} & 1 \\ x_2 & e^{x_2} & 1 \\ x_3 & e^{x_3} & 1 \end{vmatrix} > 0$.

118. Beräkna $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-u \end{vmatrix}$.

119. I en determinant av ordningen 9 betecknas elementen på vanligt sätt med a_{ik}. Om

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a \text{ för } i + k = 5 \\ &= c \text{ för } i + k = 10 \\ &= b \text{ för } i + k = 14 \\ &= 0 \text{ för övriga } i,\ k, \end{aligned}$$

vad är då determinantens värde?

120. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & (n-1) & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & & (n-2) & (n-1) \end{vmatrix}$$

121. Betrakta determinanten av ordningen n

$$D_n = \begin{vmatrix} x & b & b & \dots & \dots & b \\ a & x & b & \dots & \dots & b \\ a & a & x & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & \dots & \dots & a & x & b \\ a & \dots & \dots & a & a & x \end{vmatrix}$$

Bevisa att $D_n = \dfrac{b(x-a)^n}{b-a} + \dfrac{a(x-b)^n}{a-b}$.

122. Låt $a_v \neq 0$ $(v = 1,\, 2,\, \dots,\, n)$. Bevisa

$$\begin{vmatrix} z + \dfrac{a_1}{a_0} & \dfrac{a_2}{a_1} & \dfrac{a_3}{a_2} & \dfrac{a_4}{a_3} & \dots & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\ -\dfrac{a_1}{a_0} & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_2}{a_1} & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & z & 0 \\ 0 & \dots & & & -\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & z \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0}\sum_{v=0}^{n} a_v z^{n-v}.$$

Symmetriska funktioner

123. Rötterna till ekvationen $x^3 + px + q = 0$ betecknas med a, b och c. Beräkna kvadraten på $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ uttryckt i p och q.

124. Angiv de reella värden på a för vilka

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7a - 6 \end{array}\right\}$$

satisiferas av reella lösningssystem $x,\, y,\, z$..

125. Lös ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 50 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -50 \end{array}\right.$$

126. Om $x^3 - 3px^2 + 3qx - r = 0$ har tre reella rötter, så kan skillnaden mellan två rötter aldrig överstiga $\sqrt{12(p^2 - q)}$, och skillnaden mellan den största och minsta roten är minst $3\sqrt{p^2 - q}$.

127. I ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ är $a^2 d = c^2$. Visa, att ekvationen då har två rötter, vars produkt är lika med produkten av de andra två. Omvändningen?

128. Om ekvationen $x^n + nx^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_n = 0$ har uteslutande reella negativa rötter, så gäller relationerna

$$a_k \leq \binom{n}{k}; \quad k = 2, +, 3,\, \dots,\, n.$$

Bevisa detta.

129. Beräkna den symmetriska funktionen $\sum x_1^2 x_2^3$ då $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_8$ äro rötterna till $x^8 + px^3 + q = 0$.

130. $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_7$ äro rötterna till $x^7 + x + 10 = 0$. Beräkna $\displaystyle\prod_{v=1}^{7}(a^2 + x_v^2)$.

Rötternas antal och läge

131. $x_1,\, x_2,\, x_3$ äro rötterna till ekvationen $x^3 + yx^2 + 24x + 12 = 0$. Bestäm y så, att $\displaystyle\sum \frac{x_1}{x_2 + x_3} = 0$. Angiv för y exakta värden och närmevärden med två säkra decimaler.

132. Vad är villkoret för att ekvationen med reella koefficienter

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

har en icke-reell rot med absoluta beloppet = 1?

133. Visa att ekvationen $x^5 + x + 1 = 0$ har en reell rot och beräkna den på 10^{-3} när.

134. Lös ekvationen $x^4 + 6x^2 + 11x + 9 = 0$ genom att bilda den kubiska resolventen.

135. Man kan finna sådana värden på p. att ekvationerna

$$x^6 - 10x^3 - 2 = 0$$
$$x^3 - px - 2 = 0$$

ha en gemensam rot. Bestäm dessa, och lös ekvationerna för dessa p-värden.

136. Undrsök antalet reella rötter till ekvationen

$$x^4 + 2ax^3 + 2bx + ab = 0$$

för olika värden på a och b.

137. Rötterna til $z^4 - 4a_3z^3 + 6a_2z^2 - 4a_1z + a_0 = 0$ utprickas i det komplexa planet. Vilka villkor måste koefficienterna uppfylla för att rötterna skola bilda en kvadrat?

138. I ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

äro a, b, c reella och $a^2 < b < a$. Visa att ekvationen har åtminstone en reell rot mellan 0 och 1.

139. Derivatan av ordningen n för funktionen $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ kan skrivas $y^{(n)} = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, där P_n är ett polynom av graden n. Härled relationen $P_{n+1} = (1+x^2)P'_n - 2(n+1) \cdot x \cdot P_n$. Visa att $P_n = 0$ har n stycken reella rötter, en mellan två konsekuttiva rötter till $P_{n-1} = 0$, en större än den största roten till $P_{n-1} = 0$ samt en mindre än den minsta.

140. Visa, att $P_(x) = e^x \cdot \dfrac{d^n}{dx^v}\left(x^n e^{-x}\right)$ är ett polynom i x av graden n med positiva och distinkta nollställen. Visa vidare, att

$$\int_0^\infty P_n(x) \cdot P_m(x) \cdot e^{-x}\, dx = 0 \quad \text{om } m \neq n.$$

Enhetsrötter

141. Uppdela polynomet $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$ i två faktorer av tredje graden, av vilka den ena har nollställena r, r^2, r^4, varvid $r^7 = 1$ och $r \neq 1$.

142. Bevisa, att om $x = \dfrac{2\pi}{7}$ så är

$$\cos x + \cos 2x + \cos 4x = -\frac{1}{2} \quad \text{och}$$
$$\sin x + \sin 2x + \sin 4x = \frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

Trigonometriska uttryck

143. Beräkna $\displaystyle\prod_{m=0}^{n-1} \cos\left(v + \frac{m\pi}{n}\right)$.

144. Om $\cos v = x$, så är $\cos(nv)$ ett polynom i x av graden n. Hur lyder motsvarande sats för $\sin(nv)$?

145. Man betraktar sådana ekvationer av formen

$$a + b\cos x + c\sin x + d\cos 2x + e\sin 2x = 0$$

som ha 4 rötter i intervallet $0 \leq x < 2\pi$. Visa, att om två sådana ekvationer satisfieras av samma 4 st. värden på x, så äro de identiska.

146. x och y äro två godtyckliga tal. Man sätter $x + \dfrac{1}{x} = a$, $y + \dfrac{1}{y} = b$, $xy + \dfrac{1}{xy} = c$. Vilken relation gäller mellan a, b och c? Visa, att om a, b, c äro reella, så äro a^2, b^2, c^2 antingen alla ≥ 4 eller alla ≤ 4.

147. Om $0 < a < 1$, $x > 0$, så är $\dfrac{x^a - x^{1-a}}{x-1} = (2a-1)\theta$, $0 < \theta \leq 1$.

Talteori

148. Om p och q förutsättes, att de äro hela positiva tal utan gemensam faktor och att intet av dem är kvadraten på ett helt tal.Man betraktar talen av formen

$$a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq}$$

där a, b. c och d äro rationella tal. Visa, att om

$$a_1 + b_1\sqrt{p} + c_1\sqrt{q} + d_1\sqrt{pq} = a_2 + b_2\sqrt{p} + c_2\sqrt{q} + d_2\sqrt{pq}$$

så måste $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$.

149. Summan av de n första termerna i följden $1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \ldots$ divideras med 5. Vad blir resten?

150. Talet $17^{2^{3^{4^5}}}$ divideras med 13. Vad blir resten?