Sven Gellerstedt

800 Övningsuppgifter i matematik

800 ÖVNINGSUPPGIFTER I MATEMATIK

För universitet och högskolor

Med svar och anvisningar
utgivna av

Sven Gellerstedt

Almqvist & Wiksell

Stockholm

PRINTED IN SWEDEN BY

Almqvist & Wiksells
Boktryckeri AB

Uppsala 1954

Innehåll

Algebra

1) Visa att polynomet $(x-1)^{2n} - x^{2n} + 2x - 1$ är delbart med polynomet $2x^3 - 3x^2 + x$. (I)

2) Visa att division av polynomet $x^{3m} + x^{2m} + x^m + 1$ med polynomet $x^3 + x^2 + x + 1$ ger resten 0 när m är udda, resten 4 när $m = 4k$ och resten $2(x^2+1)$ när $m = 4k - 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. (I)

3) För vilka hela tal m $(m > 1)$ är polynomet $(x+y)^m - x^m - y^m$ delbart med polynomet $x^2 + xy + y^2$? När är polynomet delbart med $(x^2 + xy + y^2)^2$? (I–II)

4) För vilka värden på a och b har polynomet $x^3 + ay^3 - 3axy + b$ en egentlig divisor? (I–II)

5) Bestäm alla värden på a för vilka polynomen $x^4 - x^2 - ax + 1$ och $x^3 + x^2 - x - a$ få en gemensam divisor, som ej är en konstant. Vilka bli då de gemensamma divisorerna? (I–II)

6) Visa, att det kubiska polynomet $x^3 + qx - r$, där q och r är hela tal, $r \neq 0$, saknar rationella nollställen för $q \geq |r|$ och för $q \leq -2 - r^2$. (I–II)

7) Bestäm koefficienterna a, b och c i ekvationen

$$x^5 - 10ax^2 + 5bx - c = 0$$

så att den får en trippelrot och dessutom roten $x = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{15})$. Angiv ekvationens samtliga rötter. (I)

8) Bestäm det reella talet λ så att ekvationen

$$(\lambda + 3)x^3 - \lambda x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda = 0$$

får en komplex rot av absoluta beloppet 1. Lös sedan ekvationen. (I)

9) För vilka värden på a har ekvationen

$$x^4 - 4x^3 + 4ax - 1 = 0$$

en dubbelrot? Lös ekvationen för dessa a-värden. (I–II)

10) Låt x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vara rötterna till ekvationen

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + ax - 4 = 0.$$

Bestäm a så att $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$. Lös sedan ekvationen. (I–II)

11) Man vet att ekvationen
$$4x^4 - 45x^2 + 20x + 21 = 0$$
har två rötter vilkas skillnad är lika med $\frac{3}{2}$. Lös ekvationen. (I–II)

12) Vilken relation måste finnas mellan koefficienterna i ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, för att summan av två rötter må vara lika med summan av de båda andra? (I–II)

13) Man vet att ekvationen
$$x^5 + 6x^3 + 27x + 54 = 0$$
har två rötter x_1 och x_2 som uppfylla villkoret $2(x_1 + x_2) = x_1 x_2$. Visa att ekvationen har endast en reell rot och framställ denna med radikaler. (II)

14) Bevisa att ekvationen
$$x^5 + 45x + 54 = 0$$
har tre rötter vilkas summa är lika med 3; solvera ekvationen. (II)

15) Om ekvationen
$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = 0$$
vet man att den har tre rötter vilkas produkt är lika med -1. Lös ekvationen. (II)

16) Beräkna summan av kvadraterna på inversa värdena av rötterna till ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. (I–II)

17) Låt x_1, x_2, x_3 beteckna rötterna till ekvationen
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$
Uppskriv den tredjegradsekvation som har rötterna
$$\frac{1}{x_2^2 + x_3^2}, \frac{1}{x_3^2 + x_1^2}, \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$
(I–II)

18) x_1, x_2, x_3 är rötterna till ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Uppskriv den tredjegradsekvation vars rötter är
$$x_2x_3 + \frac{1}{x_1},\ x_3x_1 + \frac{1}{x_2},\ x_1x_2 + \frac{1}{x_3}.$$
(I–II)

19) Om x_1, x_2, x_3 är rötterna till den kubiska ekvationen $x^3 + ax + b = 0$ och man har $x_1^2 - x_2^2 = c$, vilken relation måste då finnas mellan talen a, b och c? (II)

20) $F(x)$ och $G(x)$ är två polynom som satisfiera identiteten
$$\sqrt{1 - F^2} = G\sqrt{1 - x^2}.$$
I polynomet $F(x)$, som är av graden n, är koefficienten för x^n positiv. Visa att man då måste ha identiskt $F'(x) = nG(x)$. (I–II)

21) Låt $f(x)$ vara ett polynom av graden n ($n \geq 3$) med enkla reella nollställen, av vilka a och b ($a < b$) är två på varandra följande. Enligt Rolle's sats har då $f'(x)$ ett enda nollställe c mellan a och b. Bevisa att
$$a + \frac{b-a}{n} < c < b - \frac{b-a}{n}. \qquad \text{(I–II)}$$

22) Låt $f(x)$ vara ett reellt tredjegradspolynom med tre distinkta nollställen. Visa att ekvationen
$$(f'(x))^2 - 2f(x)f''(x) = 0$$
har två och endast två reella och distinkta rötter. (I–II)

23) Låt $f(x)$ vara ett polynom med nollställena $x_1, x_2, \ldots, x_n$, av vilka x_1 är ett enkelt nollställe, som gör $f''(x) = 0$. Visa att man då har
$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{x_1 - x_i} = 0. \qquad \text{(I–II)}$$

24) Bevisa följande sats: Om $f(x)$ är ett polynom med exakt ν rella nollställen och sådant att $f'(x)$ har exakt μ reella nollställen, så måste $\mu + 1 - \nu$ vara ett jämnt tal ≥ 0. Varje nollställe räknas med sin multiplicitet. (II)

25) Bevisa att ekvationen
$$nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + (n-2)z^{n-3} + \ldots + 3z^2 + 2z + 1 = 0$$
saknar reella rötter, om n är udda, och har endast en reell rot $z = z_0$ om n är jämnt. Visa att för $n \geq 4$ gäller olikheterna
$$\frac{1}{n} - 1 < z_0 < -\frac{1}{2}. \qquad \text{(II)}$$

26) Visa att varje rot till ekvationen
$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$$
där $a_n \neq 0$, satisfierar olikheterna
$$\frac{1}{2M'} < |z| < 2M.$$
där M är maximum av $\sqrt[p]{|a_p|}$ och M' maximum av $\sqrt[p]{\left|\frac{a_{n-p}}{a_n}\right|}$, då p genomlöper talen $0, 1, 2, \ldots, n$ ($a_0 = 1$). (I–II)

27) Hur många reella rötter har den kubiska ekvationen
$$x^3 + 2ux + 1 - 10u + u^2 = 0,$$
där u är en reell parameter? För vilket värde på u har ekvationen sin största rot? Beräkna denna rot. (II)

28) För vilka reella värden på u har ekvationen

$$x^3 - 3u^2x + 2u^3 - u + 1 = 0$$

tre reella rötter? (II)

29) För vilka värden på u har ekvationen

$$x^3 - 3ux + 2 - 2u + 2u^2 = 0$$

en dubbelrot? (II)

30) Hur många rella lösningar x har ekvationen

$$\arctan\frac{1}{a + x^2} + \arctan\frac{a + 1}{a + 1 + x} = \frac{\pi}{4},$$

där a är ett positivt tal? Visa att lösningarna ligger i ett av a oavhängigt intervall $[b, b + \frac{1}{2}]$. Lös ekvationen för $a = \frac{254}{25}$; lösningen är då rationell. (II)

31) Hur många reella rötter har den kubiska ekvationen

$$4ax^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0,$$

där a är en reell parameter $\neq 0$. Separera rötterna i det fall då alla tre är reella och distinkta. Visa att $a \geq \frac{1}{2}$ är det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att den mellersta roten ska vara $\geq \frac{1}{2}$. (II*)

32) Hur många rätvinkliga trianglar finns det, i vilka höjden över hypotenusan har längden h och bissektrisen till en av de spetsiga vinklarna har längden b? Angiv nödvändiga och tillräckliga villkor för talen h och b. (II*)

33) Hur många reella rötter har ekvationen

$$x^5 + x^3 - a^2x + a^3 = 0$$

där a är ett reellt tal? För vilka värden på a har ekvationen en dubbelrot? (II)

34) Hur många reella (positiva resp. negativa) rötter har ekvationen

$$x^5 + ax^2 - (2a + 5)x + a + 5 = 0,$$

där a är ett reellt tal ≥ -10? (II)

35) Bestäm antalet positiva resp. negativa rötter till ekvationen

$$x^7 + 7ax^4 + (28a - 7)x + 6 - 3a = 0$$

för olika värden på den reella parametern a. Beräkna de reella multipelrötterna. (II)

36) Hur många reella rötter har ekvationen

$$3x^4 + 4ax^3 - 12a^2x^2 + 12c = 0,$$

där a och c äro rella parametrar? (II)

37) Vilka villkor måste de reella talen b och c uppfylla för att polynomet

$$x^4 + (2b - 2)x^2 + 4bx + c = 0$$

må vara ≥ 0 för alla reella x? (II)

38) Betrakta ekvationen

$$(x^2 - x + 1)^3 - yx^2(x - 1)^2 = 0,$$

där y är en parameter. För ett visst värde på y är $x = a$ en rot. Vilka äro då ekvationens övriga fem rötter? För vilka y äro alla rötterna reella? (II)

39) Ekvationen $z^5 - 2z^4 + 11z^3 - 14z^2 + 34z - 10 = 0$ har en rot $z = x + iy$ som ligger på räta linjen $y = x + 1$ i det gaussiska talplanet. Bestäm ekvationens samtliga rötter. (II)

40) För vilka reella a och b har ekvationen

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = a + ib$$

n st reella rötter? Bestäm dessa rötter. (I)

41) Vilken andragradsekvation med rationella koefficienter har roten

$$\text{(a)} \qquad x = \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}$$

och vilken har roten

$$\text{(b)} \qquad x = \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}$$ (II)

42) Följande tal x, y och z äro rötter i var sin fjärdegradsekvation med rationella koefficienter:

$$\text{(a)} \qquad x = 2\cos\frac{\pi}{10};$$

$$\text{(b)} \qquad y = 2\sin\frac{\pi}{12};$$

$$\text{(c)} \qquad x = \cos\frac{\pi}{15}.$$

Bestäm ekvationerna och uppskriv deras samtliga rötter. (II)

43) Talen

$$\text{(a)} \qquad x = \tan\frac{\pi}{9},$$

$$\text{(b)} \qquad x = 2\sin\frac{\pi}{9}$$

är rötter i var sin sjättegradsekvation med rationella koefficienter. Bestäm ekvationerna och uppskriv samtliga deras rötter. (II)

44) Vilken sjättegradsekvation med rationella koefficienter har roten

$$\text{(a)} \qquad x = 2\cos\frac{2\pi}{9} + 4\cos\frac{2\pi}{5} + 1,$$

och vilken har roten

$$\text{(b)} \qquad x = 2\cos\frac{2\pi}{7} + 4\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2?$$

Uppskriv ekvationernas samtliga rötter. (II)

45) Bestäm den sjättegradsekvation med rationella koefficienter som har roten

$$x = y + \xi - 2,$$

där y är en rot till ekvationen $y^3 - 3y + 1 = 0$ och $\xi = \tan\frac{\pi}{12}$. Uppskriv ekvationens samtliga rötter. (II)

46) Bevisa likheterna

$$\text{(a)} \qquad \tan\frac{3\pi}{7} - 4\sin\frac{\pi}{7} = \sqrt{7}$$

$$\text{(b)} \qquad \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(II)

47) Bestäm talen

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)^{-2};\\
\omega_2 &= \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin\frac{2\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)^{-2};\\
\omega_3 &= \left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin\frac{2\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin\frac{4\pi}{9}\right)^{-2}
\end{aligned}$$

(II)

48) Bevisa medelst fullständig induktion formeln

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\binom{n-m}{p-r} = \binom{n}{p}.$$

Man kan anta $n \geq m$, $n \geq p$. (I)

49) Verifiera identiteten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

(I)

50) Låt $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ vara ett homogent polynom i $x_1, x_2, \ldots, x_r$ av graden n. Bevisa medelst fullständig induktion från r till $r+1$ Eulers identitet

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_r\frac{\partial f}{\partial x_r} = nf.$$

Visa att denna kan bestå endast om f är homogent. (I–II)

51) I en aritmetisk serie av tredje ordningen, vars alla termer

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n,\ \dots$$

äro positiva, känner man fyra konsekutiva termer:

$$323,\ 489,\ 703,\ 971.$$

Bestäm y_n så att y_0 får minsta möjliga värde. (I)

52) Man uppdelar de udda positiva talen 1, 3, 5, 7, 9, 11, … i grupper, av vilka den 1:sta består av talet 1, den 2:dra av de två talen 3 och 5, den 3:dje av de tre talen 7, 9 och 11, osv. Beräkna summan av de n talen i den n:te gruppen. (I)

53) Beräkna

$$F(n) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3.$$

Solvera sedan ekvationen $F(x) = 0$. (II)

54) För vilka a är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 7y - 6z + 7 = 0, \\ 4x + ay + 3z + 2 = 0, \\ 3x + 27 + az + 2 = 0, \\ 5x + 2y + 3z + a = 0 \end{cases}$$

lösbart? Bestäm lösningarna för dessa a-värden. (II)

55) Lös ekvationen

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & b & c & x \\ b & c & x & a \\ c & a & x & b \end{vmatrix} = 0$$ (II)

56) Beräkna förhållandet $\dfrac{A}{B}$, då

$$A = \begin{vmatrix} a^6 & a^4 & a^2 \\ b^6 & b^4 & b^2 \\ c^6 & c^4 & c^2 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

och a, b och c äro rötterna till ekvationen $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. (II)

57) Beräkna numeriska värdet av determinanten

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

där $s_k = a^k + b^k + c^k$ och a, b, c äro rötterna till ekvationen

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$ (II)

58) Beräkna

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}^2,$$

där a, b, c äro rötterna till ekvationen $x^3 + px + q = 0$. (II)

59) Låt a, b, c $(a < b < c)$vara rötterna till ekvationen $x^3 + 4x^2 - 1 = 0$ och sätt $f(x) = x^5 + 2x^2 + 1$, $g(x) = 4x^4 - 8x$, $h(x) = 3x^2 - 1$. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix}. \qquad \text{(II)}$$

60) Åtskilj med användande av Sturms teorem de reella rötterna till ekvationen

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0 \qquad \text{(II–III)}$$

61) Solvera ekvationen

$$x^4 - 5x + 5 = 0$$

genom att bilda den kubiska resolventen. (II–III)

62) Uppskriv rötterna till ekvationen

$$x^8 + x^6 + 6x^5 - 2x^4 + 6x^3 + x^2 + 1 = 0. \qquad \text{(II–III)}$$

63) I ekvationen $\cos^3 x + a\cos x + b = 0$ betraktas a och b som koordinater för en punkt i ab-planet. Bestäm det område i vilket punkten (a, b) måste ligga, för att ekvationen må ha tre reella rötter x. (II)

64) På vilken kurvbåge i det komplexa z-planet ligga de imaginära rötterna till ekvationen $z^3 - qz + q = 0$, när den positiva parametern q varierar så att diskriminanten är negativ? (II)

65) Rötterna till ekvationen $z^3 + az + b = 0$, där a och b är reella, $b \geq 0$ och diskriminanten negativ, ligga på en cirkel med radien 1 i det komplexa z-planet. Uppskriv relationerna mellan a och b. Om a och b betraktas som cartesiska koordinater för en punkt, definiera dessa relationer en kurvbåge B, tillhörande en kurva C i ab-planet. Bestäm kurvan C och bågen B. (II)

66) På vilken kurva i det komplexa z-planet ligga de imaginära rötterna till ekvationen $z^4 + pz - 3p = 0$, när den reella parametern p varierar? (II)

67) Bestäm de nödvändiga och tillräckliga villkoren för att ekvationen med reeella koefficienter $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ må representera tre (rella) linjer i 120° vinkel med varandra, när koordinaterna äro rätvinkliga. (I)

68) Visa att de båda liksidiga hyperblerna $x^2 - y^2 = a^2$ och $xy = \frac{1}{2}a^2$ ha exakt två gemensamma reella normaler. Bestäm deras ekvationer. (II)

69) Undersök huru antalet gemensamma reella normaler till kägelsnitten $xy = c^2$ och $y^2 = 2p(x+p)$ varierar med p och c. (II)

70) Visa att kägelsnitten $x^2 - 2p(y-p) = 0$ och $16xy + ap^2 = 0$ ha exakt två gemensamma reella tangenter för alla positiva eller negativa värden på p och a. Beräkna den spetsiga vinkeln mellan dem, när $a = 9$. (II–III)

71) Visa att kurvan

$$y = \frac{x^{11} - 1}{x - 1}$$

icke har någon reell inflexionspunkt på ändligt avstånd. (II)

72) Visa detsamma för kurvan

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y} = 1. \qquad \text{(II)}$$

73) Bestäm antalet gemensamma reella normaler till ytorna

$$x^2 + y^2 - 2px = 0 \quad \text{och} \quad y^2 - xz - p^2 = 0. \qquad \text{(II)}$$

74) Hur många gemensamma reella normaler har ytorna

$$x^2 - y^2 - 2pz = 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 - z^2 + a^2 = 0?$$

Diskussion för olika positiva värden på a och p. (II)

75) Visa att paraboloiderna $x^2 - y^2 = 2pz$ och $y^2 - z^2 = 2px$ ha exakt tre gemensamma reella normaler. Bestäm deras ekvationer. (II)

Differentialkalkyl

Funktioner; maxima och minima; gränsvärden m.m.

76) Bevisa följande olikheter: (I)

(a) $x < \frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x$ för $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

(b) $3x\cos x < \sin x + \sin 2x$ för $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$.

(c) $\dfrac{x(x+6)}{4x+6} - \log(1+x) < \dfrac{x^4}{4(1-x)}$ för $0 < x < 1$.

77) För vilka x gälla olikheterna

(a) $\dfrac{(x-3)(x-4)}{x-2} + \dfrac{5x+13}{x+2} < 0$. (I)

(b) $f(x) = e^{(x-1)/x} - x^2 \leq 0$. (I–II)

78) För vilka vinklar x i 1:sta kvadranten gäller olikheterna

(a) $4\sin x(3\sin x - \sin 3x - 2) + 3 > 0$. (I)

(b) $f(x) = e^x \cos x - 1 > 0$. (I–II)

79) Visa att funktionen

$$f(x) = x - \tan x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2}$$

är positiv, ändlig och icke avtagande för $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$. (I)

80) Undersök hur funktionen

$$\text{(a)} \qquad f(x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x$$

varierar i intervallet $[0,\ 2\pi]$ och hur funktionen

$$\text{(b)} \qquad f(x) = x(\tan x + \cot \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{8}x)$$

varierar i intervallet $[0,\ \frac{1}{2}\pi]$. (I)

81) Undersök hur funktionen

$$f(x) = x\cos x - \sin x + 1 + \tfrac{1}{2}\cos^2 x - \tfrac{3}{2}\cos x$$

varierar i intervallet $[0,\ \frac{1}{2}\pi]$. Uppskatta med 1 säker decimal det x-värde x_0, för vilket $f(x)$ är maximum. (I–II)

82) För vilka x i intervallet $[0,\ 2\pi]$ har funktionen

$$f(x) = e^x \sin x$$

maximum, minimum resp. inflexion? (I)

83) Funktionen $y = x^a e^{-x}$ studeras i intervallet $0 < x < \infty$. Bestäm för varje reellt värde på a gränsvärdena av n:te derivatan $y^{(n)}$, när $x \to \infty$ och när $x \to +0$. Beskriv hur y varierar i intervallet för $a < 0$, för $a = 0$, för $0 < a \le 1$ och för $a > 1$. Angiv eventuella maxima, minima och inflexioner. (I)

84) Bestäm för var och en av följande funktioner $f(x)$ det största värde på den reella parametern α för vilket funktionen är monotont växande i angivet intervall

(a) $f(x) = \tan x - x - \alpha x^3$ i intervallet $[0,\ \frac{1}{2}\pi]$. (I)

(b) $f(x) = x - \sin x - \frac{1}{2}\alpha(1 - \cos x)\sin x$ i intervallet $[0,\ \frac{1}{2}\pi]$. (I)

(c) $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1 + x^2} - \dfrac{\alpha x^3}{(1 + x^2)^2}$ i intervallet $[0,\ \infty)$. (I)

(d) $f(x) = \arcsin x - x - \alpha x^3$ i intervallet $0 < x < 1$. (I–II)

85) Bestäm maximum och minimum av funktionen

$$f(x) = \frac{9x + 7x^3}{(1 + x^2)(9 + x^2)} - \arctan x.$$

Huru många reella rötter har ekvationen $f(x) = 0$? Angiv en övre och en undre gräns för dessa rötter. (I–II)

86) Visa genom att studera kurvan $y = x^5 + bx - a$, där a och b äro positiva tal, att ekvationen $x^5 + bx - a = 0$ har exakt en reell rot $x = \xi$. Låt a variera, under det att b hålles konstant. Visa att ξ då är en kontinuerlig och monotont växande funktion av a. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\xi^5}{a}. \qquad \text{(I–II)}$$

87) Visa att funktionen

$$f(x) = \arctan x - \frac{ax}{(1 + x^2)^2}$$

icke har något positivt nollställe för $a \leq 1$, men exakt ett sådant $x = \xi$ för $a > 1$. Visa att ξ är en kontinuerlig och monotont växande funktion av a, som går $\to \infty$, när $a \to \infty$, men så att

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\xi^3}{a}$$

är en ändlig storhet. Beräkna denna. (II)

88) Visa att ekvationen $x \cot x = \alpha$, där $0 < \alpha < 1$, har en och endast en lösning x i intervallet $[0, \frac{1}{2}\pi]$ och att denna satisfierar olikheterna

$$\arcsin \frac{2\alpha}{\pi} < \tfrac{1}{2}\pi - \alpha < \arcsin \alpha. \qquad \text{(II)}$$

89) För vilka reella värden på parametern α har ekvationen

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{2\alpha^2 + 2}{\alpha^2 + 3}$$

lösningar x i intervallet $0 < x < \frac{1}{2}\pi$? (II)

90) Visa medelst fullständig induktion att $\dfrac{d^n \tan x}{dx^n}$ kan skrivas som ett polynom i $y = \tan x$. Av vilken grad är detta polynom $P_n(y)$? Bestäm polynomet för $n = 1, 2, 3, 4,$ och 5. Visa att det innehåller endast jämna potenser av y när n är udda, och endast udda potenser av y när n är jämnt. Visa att ekvationen $P_n(y) = 0$ saknar reella rötter, bortsett från roten $y = 0$ för jämnt n. Beräkna koefficienten för högsta potensen av y som funktion av n. (I–II)

91) Visa att funktionen $f(x) = \log(e + ax) - \sin x$ har ett och endast ett minimum $m(a)$ i intervallet $[0, \pi]$, när $0 < a < e$. Beräkna sedan

$$\lim_{a\to 0} \frac{m(a)}{a}. \qquad \text{(II)}$$

92) Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ vara n positiva tal sådana att $\sum_1^n a_k = 1$. Bevisa att

$$\sum_1^n a_k \log a_k + \log n \geq 0. \qquad \text{(II)}$$

93) Bestäm maximum och minimum av funktionen

$$u = (ax + by + cz)e^{-\alpha^2x^2 - \beta^2y^2 - \gamma^2z^2},$$

där a, b, c och α, β, γ äro reella tal. (II)

Beräkna gränsvärdena 94–108. (I)

94. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(\tan x) - \arctan(\sin x)}{x^3}.$

95. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arcsin x) - \sin(\arctan x) + 2(\arctan x - \arcsin x)}{x^5}$.

96. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\log(1-x))^2 - \log(\log(1+x))^2}{x}$.

97. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - x\cot x + x\cos x \cot x}{x \log(1+x)\arctan(x^2)}$.

98. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cot x - \frac{1}{x} + \frac{x}{3}}{\sin(x^2)\log(1+x)}$

99. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{e}{2x} - e + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

100. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 3\cos 2x + 3\cos x - 1}{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - \frac{1}{3}(\sin x)^2}$

101. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{k^2 \sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 kx}\right)$.

102. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{k\tan x - \tan(kx)}{x(\arctan x)^2}$.

103. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdots \sin mx}{\log(1 + \arctan x^m)}$.

104. $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \sqrt[3]{1+n^3}\log\left(1 + \frac{3}{\sqrt{1+n+n^2}}\right)$.

105. $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)^{\log(1+e^n)}$.

106. $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \left(1 + \log\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)^{\cot\frac{\pi}{n}}$.

107. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x - \sum_{k=1}^n \cos(4k-2)x}{e^{x\sin x} - 1}$.

108. $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{k}{n}\right)^4 - \frac{1}{5}\right]$.

109. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(n+1) - f(n)$, där $f(n) = n^{1+\frac{1}{n}}$. (I–II)

110. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-2x}{x^3}$ där $f(x) = \log(\log(1-x))^2 - \log(\log(1+x))^2$. (I–II)

111. En aritmetisk serie (av första ordningen) och en geometrisk serie har båda första termen = 2 och sista termen = 1 samt lika många termer. Vad blir förhållandet mellan seriernas summor, om termernas antal växer obegränsat? (I)

112. Vilken relation består mellan talen a och b, när

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 - ax^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - bx^1 + 1}\right) = \frac{1}{3}? \qquad \text{(I)}$$

113. Bestäm talet p så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - 2 + 2\cos x}{\sin^p x - x^p}$$

blir ändlig och $\neq 0$. Vad är då gränsvärdet? (I)

114. Bestäm talen a, b och c så att

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} + x}{(1-x)^3}$$

får ett ändligt värde (n helt tal ≥ 4). Beräkna detta värde. (I–II)

115. För vilka värden på a, b, c, a_1, b_1, c_1 existerar

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2 + bn + c}{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}\right)^n$$

med ett ändligt värde $\neq 0$? Angiv gränsvärdet i dessa fall. (I–II)

116. Låt $x = g(y)$ vara den rot till ekvationen

$$x^3 + ax^2 + bx - y = 0$$

som för $y = 0$ reduceras till $x = 0$. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{y\to 0} \frac{b^3 g(y) - b^2 y + ay^2}{y^3}. \qquad \text{(I–II)}$$

117. Visa att varken $\log(1 + e^x)$ eller $\arctan e^x$ äro rationella funktioner av x. (I)

118. Bevisa följande sats: Om funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ äro kontinuerliga för $a \leq x \leq b$ och $f(x) = g(x)$ för varje rationellt x i detta intervall, så är $f(x) = g(x)$ för alla x i intervallet. (I–II)

119. Visa att man för $x > 0$ kan skriva

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e + \frac{A}{x} + \frac{B+\theta}{x^2},$$

där A och B äro konstanter och där $\theta \to 0$, när $x \to \infty$. Beräkna A och B. (I–II)

120. Betrakta funktionen $f(x) = (\cos x)^{\cot^2 x}$. Visa att den är av formen $f(x) = a + x^p g(x)$, där $a \neq 0$, $p > 0$ samt $g(0) = b$ är ändlig och $\neq 0$. Beräkna a, p och b. (I–II)

121. Vilka hopningsvärden har funktionen

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2 - n}\right)$$

då det hela talet n växer obegränsat? (II)

122. Vilket är det största gränsvärdet för

$$\sin\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\pi,$$

då det hela talet n går $\to \infty$? (II)

Geometriska tillämpningar

123. Vilken likbent triangel av arean T har den minsta omkretsen s? Beräkna denna. (I)

124. I vilken likbent triangel har förhållandet mellan den inskrivna cirkelns periferi och triangelns omkrets sitt största värde? Bestäm detta. (I)

125. I en triangel ABC är vinkeln A given. R är den omskrivna, r den inskrivna cirkelns radie. Sök maximum av förhållandet $\dfrac{r}{R}$, och angiv för vilken triangel detta maximum uppnås. (I)

126. I en triangel är en vinkel ($= 2\alpha$) och den inskrivna cirkelns radie ($= r$) givna. Sök minimum av triangelns area T, och angiv för vilken triangel detta minimum uppnås. (I–II)

127. I en variabel triangel ha två sidor längderna a och b. Beräkna den tredje sidan (c), när förhållandet mellan den inskrivna cirkelns area och triangelns area är maximum. (I–II)

128. Vilken av alla trianglar med arean T och en vinkel $= \alpha$ har den minsta omkretsen? Beräkna triangelns sidor som funktioner av T och α. (I–II)

129. Vilken av alla trianglar med omkretsen s och en vinkel $= \alpha$ har den största arean? Beräkna maximiarean som funktion av s och α. (I–II)

130. Bestäm en fyrsiding med tre sidor av längden a och den fjärde variabel, så att arean blir maximum. (II)

131. Man betraktar en i en given cirkel inskriven n-hörning vars sidor icke skära varandra. Om en sådan n-hörnings omkrets betecknas med s och dess area med A, vad blir då minsta möjliga värdet av förhållandet $\dfrac{s^2}{A}$? (II)

132. Bestäm förhållandet mellan höjd och basradie i en rät cirkulär kon av given volym, när den omskrivna sfärens volym är minimum. (I)

133. Bestäm förhållandet mellan höjd och basradie i den räta cirkulära kon av minsta volym som är omskriven kring en given sfär. (I–II)

134. I en stympad kon (rotationskon med cirkulära basytor), är den större basradien dubbelt så stor som den mindre. Sök maximum av konens volym V, när dess totala yta hålls konstant $= F$. (I–II)

135. Bestäm det minsta värde som kvoten $\dfrac{F^3}{V^2}$ kan ha, när V betecknar volymen och F totala ytan av en regelbunden n-sidig pyramid. Vad blir resultatet, om n växer över alla gränser? (I–II)

136. En pyramid av höjden h har som bas en likbent rätvinklig triangel med hypotenusan a. Beräkna minimum av totala sidoytan som funktion av a och h. (II)

137. I en stympad kon (rotationskon med cirkulära basytor), är summan av den buktiga ytan och den mindre basytan given $= S$. Bestäm konens höjd h så att volymen blir maximum. (II)

138. På räta linjen L äro två punkter A och B givna. På den med L parallella linjen L' är punkten C given. En rät linje genom B skär linjen AC i X och linjen L' i Y. Sätt $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$ och $\overline{AX} = x$. När är summan av areorna av trianglarna ABX och CXY minimum? (I)

139. Genom punkten $P(a, b)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem (där O är origo) drages en variabel rät linje, som skär x-axeln i A, y-axeln i B. Sök minima ($\neq 0$)

1:o av sträckan AB,

2:o av triangeln AOB,

3:o av den kon som uppstår, när AB roterar omkring y-axeln. (I)

140. Cirkeln C_a tangeras innantill i O av cirkeln C_b. Beräkna maximiarean av triangeln OAB, då A är en punkt på C_a och B en punkt på C_b. (II)

141. En triangel har ett fast hörn i punkten $(0, 4)$; de båda andra äro variabla och ligga på var sin av de båda cirklar med centrum i origo som ha radierna $\sqrt{5+\sqrt{7}}$ och $\sqrt{5-\sqrt{7}}$. Beräkna maximum av denna triangels area. (II)

142. Beräkna arean av den största triangel som har ett fast hörn i punkten $(0, b)$, medan de båda andra variera på cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$. (II)

143. Sök maximiarean av triangeln ABC, då punkterna A och B variera på cirkeln $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$ och C är en variabel punkt på y-axeln. (II)

144. En vinkel α $(0 < \alpha < \pi)$ och en punkt P i vinkelfältet är givna. En rät linje genom P skär vinkelbenen i punkterna A och B. Visa att det finnes ett enda minimum av sträckan AB, när linjen AB varierar. (II)

145. Låt $A(a, 0)$ vara en punkt på positiva x-axeln i iett rätvinkligt koordinatsystem, där O är origo. Från den variabla punkten P på parabeln $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ ser man linjestycket OA under vinkeln φ; när P faller i origo, definieras $\varphi = \dfrac{1}{2}\pi$. Bestäm maximum och minimum av φ, när P

rör sig på parabeln. (I–II)

146. Låt F och F' vara brännpunkterna till ellipsen $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$, och låt M vara en punkt på kurvan sådan att perpendikeln i F' mot räta linjen MF' träffar fokalradien MF i Q. Beräkna maximiarean av triangeln FQF'. (I)

147. Bestäm maxima och minima av avståndet $\overline{PM}$ från punkten $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ till en punkt M på ellipsen $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = \sin t$. (I)

148. Låt FM och FM' vara två mot varandra vinkelräta fokalradier i ellipsen

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\left(v - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Sök maximi- och minimiareorna av triangeln FMM'. visa huru arean variera med v. (I)

149. Beräkna maxima och minima av summan av två mot varandra vinkelräta fokalradier i en ellips med parametern p och excentriciteten e. (I–II)

150. En ellips med parametern p och excentriciteten e är given. Bestäm längderna av den största och den minsta korda som från en av brännpunkterna synes under rät vinkel. (II)

151. Låt $P(t)$ och $M(u)$ vara punkter på ellipserna $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ resp. $x = b\cos u$, $y = a\sin u$. Beräkna maximum av avståndet $\overline{PM}$. (II)

152. I den slinga som bildas av kurvan $y^2 = x^3 + x^2$ inskrives en rektangel så att dess sidor blir parallella med koordinataxlarna. Sök maximum av rektangelns area. (I–II)

153. Låt $(x,\ y)$ vara en punkt på kurvan

$$(2x^2 + y^2)^2 - 2a^2(2x^2 - y^2) - 8a^4 = 0.$$

Beräkna arean av den största rektangel vars hörnpunkter äro $(x,\ y)$, $(-x,\ y)$, $(x,\ -y)$ och $(-x,\ -y)$. (I–II)

154. I den krokliniga konvexa tvåsiding vars högra sida är en båge av ellipsen $x^2 + 3y^2 = 3$ och vars vänstra sida är en båge av hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ inskrives en rektangel så att dess sidor blir parallella med koordinataxlarna. Beräkna maximum av denna rektangels area. (II)

155. Beräkna arean av den största triangel som kan inskrivas i en slinga av lemniskatan $r^2 = a^2\cos 2v$ så att en hörnpunkt faller i origo. (II)

156. Beräkna arean av den största triangel som kan inskrivas i den till kurvan $y^2 = x^3 + x^2$ hörande slingan (a) så att ett hörn faller i origo, (b) så att ett hörn faller i punkten $(-1,\ 0)$. (II)

157. Bevisa, att av alla trianglar som kunna inskrivas i en given cirkel har den liksidiga den största arean.[1] (II)

[1] Med hjälp av de i uppgifterna 157 och 158 framställda satserna erhålles enkla lösningar till följande problem: att

158. Bevisa, att av alla trianglar som kunna omskrivas kring en given cirkel har den liksidiga den minsta arean. (II)

159. Bevisa, att av alla månghörningar som kunna inskrivas i en given cirkel har den regelbundna den största arean. (II)

160. Bevisa, att av alla månghörningar som kunna omskrivas kring en given cirkel har den regelbundna den minsta arean. (II)

161. Sök maximi- och minimilängderna av en korda genom origo i kurvan $x^{2n} + y^{2n} = 1$, där n är ett helt tal ≥ 2. (I)

162. Bestäm den över huvud taget längsta kordan i kurvan $x^{2n} + y^{2n} = 1$, där $n \geq 2$. (II)

163. I kurvan $x^{2n} + y^{2n} = 1$, $(n \geq 2)$, drages en korda från punkten $(0,\ 1)$. Visa att kordans längd blir maximum för $x = \pm x_0$ $(y < 0)$, där

$$\left(\frac{1}{2n+2}\right)^{\frac{1}{2n}} < x_0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \qquad \text{(II)}$$

164. Sök maximi- och minimilängderna av en korda K genom origo i kurvan $x^4 + by^2 = c$, där b och c äro positiva tal. (I–II)

165. Man betraktar alla kordor i kurvan $x^4 + by^2 = c$, där b och c äro positiva tal. Visa att de båda längsta kordorna gå genom origo. (II)

166. Man betraktar alla kordor i kurvan $x^{2n} + y^2 = 1$, $(n \geq 2)$, som äro parallella med en given riktning. Visa att den längsta kordan går genom origo. (II)

167. I kurvan $x^4 + y^2 = 1$ drages en korda från punkten $(0,\ 1)$. Visa att kordans längd blir maximum för $x = \pm x_0$ $(y < 0)$, där

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < x_0 < \frac{1}{2}. \qquad \text{(II)}$$

168. Vilken är den längsta korda som kan dragas i cardioiden

$$r = 1 + \cos v$$

och huru lång är den? (II)

169. Beräkna längden av den längsta kordan i kurvan $y^3 = x^4 + y^4$. (II)

170. På tangenten i en variabel punkt M på en kurva C avsättes en konstant längd $\overline{MP}$. Orten för P är en viss kurva C'. Visa att normalen i P till kurvan C' går genom krökningscentrum i M till kurvan C (I)

---

bestämma arean av den största (resp. minsta) triangel som kan inskrivas i (resp. omskrivas kring) en ellips med given area. Om dessa och andra mera speciella extremuppgifter för kägelsnitt se kap. V, §1. – Om maximi- och minimiproblem i kombination med integraler se kap. III, §3.

171. Låt M vara en godtycklig punkt på kurvan

$$r = \frac{1}{1 + \cos v}.$$

Om O är origo, C det till M hörande krökningscentrum och P den punkt där perpendikeln i O mot OM råkar MC, bestäm då förhållandet $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{MP}}$. (I)

172. Bestäm krökningscirkeln till kurvan $y^2 = \dfrac{ax(x-3a)}{x-4a}$ i de punkter där kurvan skär x-axeln. (I–II)

173. Låt M vara en punkt på cardioiden $r = a(1 - \cos v)$. Man betraktar den cirkel som tangerar kurvan i M och går genom dess spets. Visa att förhållandet mellan denna cirkels radie och cardioidens krökningsradie i M är en konstant, och bestäm dess värde. (I–II)

174. Låt P vara den punkt i första kvadranten, där evolutan till ellipsen $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ skäres av räta linjen $ax = by$ ($a > 0$, $b > 0$). Bestäm maximum och minimum av radiusvektor $\overline{PM}$, då punkten M genomlöper ellipsen. (I–II)

175. Bevisa att krökningsradien i en punkt $(x,\ y)$ på kägelsnittet

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

kan skrivas

$$R = \frac{(f_x'^2 + f_y'^2)^{3/2}}{8|\Delta|}$$

där

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & F \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$ (II)

176. Studera krökningen hos kurvorna
   (a) $y = x^2$,
   (b) $9y = x^3 + 6x$,
   (c) $y = x^4 + x^2$.

För vilka x är krökningen maximum resp. minimum? Bestäm maximi- och minimivärdena. (I)

177. Studrea krökningen av kurvan

$$y = a\log x - bx,$$

där a och b äro positiva tal. För vilka x är krökningen maximum resp. minimum? (I)

178. Bestäm maxima och minima av krökningen hos kurvan

$$y = ae^x + be^{-x},$$

där a och b äro positiva parametrar. (I–II)

179. För vilka x är krökningen maximum resp. minimum på kurvorna

$$\text{(a)} \qquad y = a\tan(bx),$$

där a och b äro rella tal? (II)

$$\text{(b)} \qquad y = a\tan x - bx,$$

där a och b äro reella parametrar, förbundna medelst relationen $2a^2 + ab - b^2 - 1 = 0$? (II)

180. Bestäm maximum och minimum av krökningen hos följande kurvor, där a och b äro rella parametrar:

$$\text{(a)} \qquad y = b\arctan x - ax,$$

där $2a^2 + ab - b^2 + 2 = 0$. (II)

$$\text{(b)} \qquad y = ax - b\sin^2 x,$$

där $a^2 - 3b^2 + 1 = 0$. (II)

181. Låt M och M' vara två närbelägna punkter på en kurvbåge med kontinuerligt varierande krökning $\neq 0$. Genom M och M' och genom skärningspunkten mellan tangenterna i dessa punkter lägges en cirkel. Bestäm förhållandet mellan denna cirkels radie och krökningsradien i M, när $M' \to M$. (I)

182. Tangenterna i två närbelägna punkter M och M' på en kurvbåge (med kontinuerligt varierande krökning $\neq 0$) skära varandra i en punkt P. Bestäm gränsläget av höjdernas skärningspunkt i triangeln $MM'P$ när $M' \to M$. (I)

183. Normalerna i två närbelägna punkter M och M' på en kurvbåge (med kontinuerligt varierande krökning $\neq 0$) skära varandra i en punkt N. Bestäm gränsläget av medianernas skärningspunkt i triangeln $MM'N$, när $M' \to M$. (I)

184. Låt $y = f(x)$ vara ekvationen i rätvinkliga koordinater för en kurva, som tangerar x-axeln i origo O; $f(x)$ antages ha kontinuerliga derivator upp till 2:dra ordningen i omgivningen av $x = 0$. Normalerna i O och i en närbelägen punkt P på kurvan skära varandra i N. I triangeln OPN betraktas 1:o medianernas skärningspunkt O, 2:o den omskrivna cirkelns centrum C, 3:o medelpunkten M till den cirkel som tangerar PN samt förlängningarna av OP och ON. Låt Q_0, C_0 och M_0 vara vara gränslägena av Q, C och M, när $P \to O$. Visa att ordinatorna för M_0, C_0 och Q_0 äro konsekutiva termer i en harmonisk serie. (I–II)

185. Kurvan $y = f(x)$ tangerar x-axeln i origo O med kontakt av 1:sta ordningen; $f(x)$ antages ha kontinuerliga derivator av alla ordningar i omgivningen av $x = 0$. Låt M vara en annan punkt på kurvan och sätt bågen $OM = s$ ($s > 0$). M antages ligga så nära origo att dess koordinater x och y kunna utvecklas i potensserier av s. På x-axeln tages en punkt N, vars abscissa är lika med s. Räta linjen NM träffar y-axeln i P. Beräkna $\lim\limits_{s\to 0} \overline{OP}$. (II)

186. En kurvbåge definieras för $x_1 < x < x_2$ av ekvationen $y = f(x)$, där $f(x)$, $f'(x)$ och $f''(x)$ antagas kontinuerliga. En rät linje skär bågen i exakt tre punkter med abscissorna a, b, c ($x_1 < a \leq b \leq c < x_2$). Visa att kurvan har åtminstone en inflexionspunkt vars abscissa ligger i intervallet $[a, c]$. Verifiera satsen

1:o för kurvan $x^2y + y - 2 = 0$ och räta linjen $x - 5y + 4 = 0$.

2:o för kurvan $(x + y)^2 - 4xy^2 = 0$ och räta linjen $x - 9y + 8 = 0$. (II)

187. Bevisa följande satser:

I. Genom en (reell) inflexionspunkt på en kurva kan en rät linje dragas, som skär kurvan i minst två andra (reella) punkter.

II. Om en tredjegradskurva har en sluten gren, kan ingen inflexionspunkt ligga på denna gren.

188. Konstruera kurvan

$$y = \frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 1}.$$

Huru många tangenter med vinkelkoefficienten m kunna dragas till kurvan. Diskussion för olika värden på m. (I)

189. Konstruera kurvan

$$y^2 = x^5 + ax,$$

där $a \neq 0$, med angivande av extrem- och inflexionspunkter. (I)

190. Visa att kurvan $xy - \sin x = 0$ har oändligt många inflexionspunkter som allaligga på en algebraisk kurva C av sjätte graden. Uppskriv ekvationen för C och bestäm dess inflexionspunkter. (I)

191. Konstruera kurvan

$$y(e^x - 1) - xe^x = 0.$$

Visa att kurvan ej har någon tangent parallell med x-axeln. (I)

192. Konstruera kurvan

$$y = e^x + ax$$

för olika värden på a. Angiv för vilka a kurvan råkar x-axeln. (I)

193. Konstruera kurvan

$$\log y - \sqrt[3]{x} = 0.$$

Bestäm inflexionspunkterna. (I)

194. Konstruera kurvan $x = te^t$, $y = (t + 1)e^t$. (I–II)

195. Konstruera kurvan

$$(1 - x^2)\log y - x = 0.$$

Har kurvan asymptoter? Bestäm tangenterna i de punkter där kurvan råkar x-axeln. Undersök kurvans konkavitet. (II)

Integralkalkyl

Obestämda och bestämda integraler

Bestäm integralfunktionerna $F(x)$ i uppgifterna 196–2014 (I)

196) $F(x) = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

197) $F(x)) \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

198) $F(x) = \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

199) $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$.

200) $F(x) = \int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{4}}}$, där a och b äro rella tal.

201) $F(x) = \int x^{a-1}(\log x)^n\,dx$, där a är ett reellt tal och n ett helt tal ≥ 0.

202) $F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$, där a är ett reellt tal.

203) $F(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)(x^2+a)}$, där a är ett reellt tal.

204) $F(x) = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx)^3}}$, där a och b äro reella tal.

205) Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ till

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+2)\sqrt{x(x-1)(x-4)}}$$

genom att göra substitutionen $\dfrac{x-2}{x+2} = y$. Beräkna sedan integralerna $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$ och $I_2 = \int_4^\infty f(x)\,dx$. (I)

206) Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ till

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

Beräkna sedan integralen $I = \int_0^\infty f(x)\,dx$. (I)

207) Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ till

$$f(x) = \arcsin x \log x.$$

Beräkna sedan integralen $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. (I)

Evaluera följande bestämda integraler (uppg. 208–222): (I)

208. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$.

209. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3x^4\,dx}{(1+x^3)^3}$.

210. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$, där a och b äro positiva tal.

211. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(ax^3 + bx^2 + cx + e)\,dx}{(1+x^2)^3}$, där a, b, c och e äro godtyckliga reella tal.

212. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arctan 3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

213. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

214. $\displaystyle\int_0^1 x^{-\log x - 1}\log x\,dx$.

215. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\cos x}\,dx$.

216. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x\sqrt{4 - 5\sin^2 x}}\,dx$.

217. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos x - \cos 3x} + \sqrt{\sin x + \sin 3x}\right) dx.$

218. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \log \sin x \, dx.$

219. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\pi - \arctan x^2\right) dx.$

220. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

221. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1+x)\log x}{\sqrt{1-x}} \, dx.$

222. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - 8x + 3x^2 + 2x^3 - x^4} \, dx$

223. Bestäm funktionen

$$g(t) = \int_x^{\infty} \frac{4t\,dt}{t^4-1}.$$

Beräkna sedan $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx.$ (I)

Evaluera följande bestämda integraler (uppg. 224–228): (I–II)

224. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}.$

225. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{\log(1-\sin x)}{\sin^2 x}\right) dx.$

226. $\displaystyle\int_0^{1} \log x \, \log(x + \sqrt{x^2+1}) \, dx.$

227. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1-x^2)\log(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \, dx.$

228. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x \log x}{(1-x)[2-x]} \, dx.$

229. Beräkna

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{6x^2 - x^4 - ax + b}},$$

då man vet att ekvationen $x^4 - 6x^2 + ax - b = 0$ har en negativ trippelrot. (II)

Evaluera följande bestämda integraler (uppg. 230–232): (II)

230. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^6)^{1/6}}.$

231. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\log(1+x^2)-\arctan x}{x(1+x^2)}\,dx.$

232. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ där n är ett helt positivt tal.

Beräkna integralerna 233–234 som funktioner av den reella parametern a. (II)

233. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(a^2+\tan^2 x)\,dx.$

234. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(a^2+x^2)x}\,dx.$

Beräkna integralerna 235–237, där a, c och $4ac-b^2$ äro positiva. (II)

235. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4}.$

236. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx^2+cx^4)^2}.$

237. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^2}.$

238. Bevisa likheten

$$\int_0^\pi \log(1+\cos x)\,dx = -\pi\log 2. \qquad \text{(II)}$$

239. Bevisa likheten

$$\int_0^\infty e^{-x^2} + big(e^{2x}+e^{-2x}\big)\,dx = e\sqrt{\pi}. \qquad \text{(II)}$$

Evaluera följande dubbelintegraler (uppg. 240–244): (II)

240. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2+2)(x^2+y^1+1)^3}}.$

241. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}.$

242. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y\,dx\,dy}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$

243. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ där D är det område som begränsas av kurvorna $x^2+y^2=5$ och $y^2=4x$.

244. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x(1-y^2)\sqrt{1-x^2}}$, där D är det av $0 \le y \le x \le 1$ definierade området.

245. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

där r är avståndet från punkten (x, y, z) till origo och D är det område som omslutes av sfäroiden $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b)$. (II)

Diverse integrationsproblem

246. Bestäm alla deriverbara funktioner $f(x)$ sådana att

$$f(x)+f(y)=f(xy). \qquad \text{(I)}$$

247. Bestäm ett polynom $P(x)$ av femte graden sådant att $P(x)+10$ är delbart med $(x+2)^3$ och $P(x)-10$ med $(x-2)^3$. (I)

248. Bestäm ett polynom $P(x)$ av den jämna graden n sådant att $P'(x)$ är delbar med $P''(x)$, $P(-1)=0$ och $P(0)=P(2)=-1$. (I)

249. Bestäm ett polynom $P(x)$ av graden $2n+1$ sådant att $P(x)+1$ är delbart med $(x-1)^{n+1}$, $P(x)-1$ med $(x+1)^{n+1}$. Huru många reella rötter har ekvationen $P(x)=0$? (I–II)

250. Man skall bestämma alla polynom $P(x)$ med följande egenskaper: 1:o $P(x)$ är delbart med $P''(x)$; 2:o $P'(x)$ är delbar med $P'''(x)$; 3:o $P(x)$ har endast enkla nollställen. Bevisa först att gradtalet måste vara 4 eller 3. Bestäm sedan polynomens allmänna former, varvid koefficienten för högsta potensen av x kan sättas $=1$. (II)

251. Låt m, n och p vara hela tal ≥ 0. Visa att polynomet

$$x^{3m+1}+x^{3n+2}+x^{3p+3}$$

är delbart med x^2+x+1. Beräkna med hjälp härav integralen

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)(x^3+3x^2+5x+1)}{x^5+x+1}\,dx. \qquad \text{(I)}$$

252. Uppdela polynomet

$$P(x)=x^4-4x^3\cos a\,\cos b+2x^2(1+\cos 2a+\cos 2b)-4x\cos a\,\cos b+1$$

i reella faktorer av 2:dra graden. Beräkna sedan integralen

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{P(x)}. \qquad \text{(II)}$$

253. Visa att för $u > b > e^2$ gäller olikheten

$$\int_{u}^{b} \frac{dx}{\log x} < \frac{2u}{\log u} - e^2. \qquad \text{(I)}$$

254. Låt $F(x)$ vara primitiva funktionen till $f(x)$ och låt $x = g(y)$ vara den till $y = f(x)$ inversa funktionen. Framställ den till $g(y)$ primitiva funktionen $G(y)$ medelst funktionerna F och g. (I)

255. Beräkna $F'(a)$, när $F(x) = \int_0^1 f(xt + a(1-t))\,dt$ och $f(x)$ är en för $x \geq a$ kontinuerlig funktion, deriverbar för $x = a$. (I)

256. Bestäm ett polynom $P(x)$ av lägsta möjliga grad sådant att

$$F(x) = \int \frac{P(x)}{(x^3-1)^2(x^2-1)^3}\,dx$$

blir en rationell funktion av x. (I)

257. Vilka tredjegradspolynom $P(x)$ ha den egenskapen att

$$F(x) = \int \frac{x\,dx}{P^2(x)}$$

är en rationell funktion av x? (I)

258. Beräkna $G = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x^5}$, där

$$F(x) = \int_0^{\arcsin x} y \tan y\,dy - \int_0^{\arctan x} y \sin y\,dy. \qquad \text{(I)}$$

259. Betrakta integralerna

$$I_1 = \int_0^x \cos^2 t \cos 3t\,dt, \quad I_2 = \int_0^x \cos 2t \cos^3 t\,dt.$$

Bestäm talet λ så att differensen $I_1 - \lambda I_2$ blir oändligt liten av största möjliga ordning p, när $x \to 0$. Beräkna sedan

$$\lim_{x\to 0} \frac{I_1 - \lambda I_2}{x^p}. \qquad \text{(I)}$$

260. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^b f(x)e^{n(x-b)}\,dx,$$

där $0 \le a < b$ samt $f(x)$ och $f'(x)$ äro kontinuerliga i intervallet $[a, b]$. (I–II)

261. Visa att relationen

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

representerar en algebraisk ekvation i x och y. Framställ den i rationell form. (I–II)

262. Låt $f(x)$ vara en för alla reella x kontinuerlig funktion, som satisfierar villkoren $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = B$. Existerar integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big[f(x+1) - f(x)\big]\,dx$$

och vad är i så fall dess värde? (II)

263. Bestäm en funktion $f(x)$ sådan att

$$F(a) = \int_0^a f(x)(a-x)^{-1/3}\,dx$$

blir oberoende av a (= en given konstant C). (II)

264. Visa att integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)(1+|x-a|)}$$

är konvergent för alla a. (II)

265. För vilka reella värden på a och b är integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{|\sin x|^a(1+x^b)}$$

konvergent? (II)

266. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{\pi}\right)^n \int_0^{\sqrt{3}} f(x)(\arctan x)^n\,dx,$$

där $f(x)$ och $f'(x)$ äro kontinuerliga för $1 \le x \le \sqrt{3}$. (II)

267. Sätt

$$\int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(\lambda-x)}} = F(\lambda).$$

Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{\lambda\to 1+0} F(\lambda) = G \quad \text{och} \quad \lim_{\lambda\to 1+0} \frac{G - F(\lambda)}{\lambda - 1} = H. \tag{II}$$

Beräkna gränsvärdena 268–271. (I)

268. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{nx+ky} \text{ där } x \text{ och } y \text{ äro positiva tal.}$$

269. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\cos\dfrac{k\pi}{4n}\right)^4}.$$

270. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\tan\frac{k\pi}{4n}\right)^4.$$

271. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+p)(n+2p)\dots(n+np)}.$$

272. I ett rätvinkligt koordinatsystem är B en punkt på y-axeln med ordinatan b samt A och A_n två punkter på x-axeln med abscissorna a och $-a$. Linjestycket AA_n delas i n lika delar av punkterna A_1, A_2, ...A_{n-1}. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{BA_k}. \tag{I}$$

273. Genom ena brännpunkten F i en ellips av givna dimensioner dragas n angulärt ekvidistanta räta linjer, vilka skära ellipsen i punkterna M_1, M_2, ..., M_n. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \overline{FM_k}. \tag{I}$$

274. A är en punkt på avståndet a från medelpunkten till en cirkel med radie r ($a < r$). Av punkterna M_1, M_2, ..., M_n delas cirkeln i n lika delar. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{AM_k}^2. \tag{I–II}$$

275. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right). \tag{I–II}$$

276. Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sqrt[m]{m}. \tag{II}$$

277. Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{n+k}\right),$$
där x är ett positivt tal. (II)

278. Existerar
$$\lim_{x\to+0} x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+x}}$$
och vad är i så fall dess värde? (II)

279. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ och sätt definitionsvis $f(0) = 0$. Visa att för alla reella x är $|f^{(n)}(x)| \leq$ det minsta av talen $\dfrac{1}{n+1}$ och $\dfrac{2}{|x|}$. (II)

280. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x}$ och sätt definitionsvis $f(0) = 1$. Visa att för alla $x \geq 0$ gälla olikheterna
$$\frac{n!\log(1+x)}{(n+1)x\log(1+x)^n} \leq (-1)^n f^{(n)}(x) \leq \frac{n!}{(n+1)(1+x)^n}. \tag{II}$$

281. Bevisa att det existerar en identitet av formen
$$\int_0^x e^{-t^2} t^{2n}\,dt = C\int_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x^2}P(x),$$
där C är en konstant och $P(x)$ är ett polynom. Bestäm C och $P(x)$. (II)

282. Visa att man har
$$\int x^n \arcsin x\,dx = P_n(x)\arcsin x + Q_n(x)\sqrt{1-x^2} + C,$$
där $P_n(x)$ och $Q_n(x)$ äro polynom i x. Bestäm sedan dessa polynom (genom derivering). (II)

283. Bestäm polynomen $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ i identiteten
$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos zx\,dx = \frac{n!}{z^{2n+1}}\big(P_n(z)\sin z + Q_n(z)\cos z\big). \tag{II}$$

Båglängder, areor och volymer

284. Beräkna båglängden av kurvan $y = \log \tan \frac{1}{2}x$ mellan $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{3\pi}{4}$. (I)

285. Beräkna båglängden $s(x)$ av kurvan $8a^2y = x^4 + 6a^2x^2$ från origo till en punkt med abscissan x. (I–II)

286. Beräkna totala längden av kurvan

$$x = (1 + \cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t \cos t. \tag{II}$$

287. Låt A och O vara de punkter på kurvan $r^2 = \cos 2v$, vilkas polarvinklar äro 0 och $\frac{\pi}{4}$. Låt vidare M_1 och M_2 vara två punkter vilkas polarvinklar uppfylla villkoren

$$0 < v_1 < v_2 < \frac{\pi}{4}, \quad \cos v_1 \cos v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bevisa att bågen AM_1 är lika lång som bågen OM_2. (I)

288. Betrakta cissoiden $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$. Låt s vara båglängden, räknad från spetsen till den punkt i övre halvplanet vars ordinata är y. Beräkna

$$\lim_{y\to\infty} (s - y). \tag{I}$$

289. Beräkna längden av den minsta båge som en korda genom punkten $\left(\frac{5p}{4}, \frac{4p}{3}\right)$ avskär av parabeln $y^2 = 2px$. (II)

290. Bestäm ekvationen $y = f(x)$ för den kurva vars båglängd är $s = \frac{1}{2}\log \tan y$, räknad från punkten $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Konstruera kurvan. (I)

291. Undersök om det finnes någon kurva $f(x, y) = 0$ med följande egenskaper: 1:o Kurvan skall gå genom punkten $A(a, 0)$; 2:o om M är en punkt på kurvan och O är origo, så skall längden av kurvbågen AM ha samma mätetal som arean av sektorn $OAMO$. (I–II)

292. Vilken kurva har den naturliga ekvationen $s^2 + 4R^2 = 36a^2$, där s = båglängden, R = krökningsradien och a = konstant? (II)

293. Låt $F(x, y)$ vara en algebraisk form av graden p och sådan att kurvan $F(x, y) = 1$ gör en slinga. Om dennas area är A_0, beräkna då arean av den motsvarande slingan på kurvan $F(x, y) = a$. (I)

294. Låt M och M' vara två punkter på kurvan $(x+y)^2 = 2a(x-y)$ med de positiva ordinatorna AM och $A'M'$. Beräkna maximiarean av det område $AMM'A'$ som begränsas av dessa ordinator, bågen MM' och linjestycket AA', när detta hålles konstant och = a. (I)

295. Beräkna arean av det område i 1:sta kvadranten som begränsas av kurvan $y^3 - x^3 + x^6 = 0$ och x-axeln. (I–II)

296. Beräkna arean av det område i 1:sta kvadranten som begränsas av kurvorna $xy + y = 1$ och $y\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. (I–II)

297. Från medelpunkten O i en ellips med halvaxlarna a och b ($a > b$) dragas räta linjer OP till storlek och riktning lika med ellipsens krökningsradier. Sök orten för P. Bestäm ellipsens excentricitet (e) så att ortkurvans area blir dubbelt så stor som ellipsens. (I–II)

298. Beräkna $\int_{-a}^{a} y\,dx$, när (x, y) är en punkt på kurvan

$$y^3 = (x-a)^2(x+a). \qquad \text{(I–II)}$$

299. I en likbent triangel med basen $2a$ och höjden h mot basen är inskriven en parabel, som tangerar triangelns ben och vars axel ligger utefter höjden. Beräkna maximiarean av det område som begränsas av parabeln och triangelns bas. (I)

300. M är en punkt på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, A och B de närmaste ändpunkterna av axlarna. När är sammanlagda arean av ellipssegmenten BMB och MAM minimum? (I)

301. Två föränderliga parabler äro underkastade följande villkor: 1:o De ha parallella axlar på avståndet $2b$ från varandra; 2:o de skära varandra vinkelrätt i två punkter. Beräkna minimiarean av det område som omslutes av de båda parablerna. (I–II)

302. Den givna ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ skäres av den variabla cirkeln $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ i fyra punkter, varigenom fyra månskärsformade områden uppstå. Beräkna största och minsta värdet av dessa områdens totala area, då $b \le r \le a$. (II)

303. Vilken ellips med given omkrets har den största arean? (II*)

304. Beräkna medelst en integral volymen av den rotationskropp som uppstår när kurvan $(bx + ay - ab)^2 - abxy = 0$ roterar omkring y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. (I)

305. Bestäm ekvationen $y = f(x)$ för den kurva som går genom punkten $(0,\ 1)$ och vars tangent har vinkelkoefficienten $y\sqrt{1 - y^2}$ i punkten $(x,\ y)$. Konstruera kurvan med angivande av inflexionspunkterna. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan och x-axeln samt volymen av den rotationskropp som uppstår, när kurvan roterar omkring x-axeln. (I)

306. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår, när kurvan $x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^2y + y^2 = 0$ roterar omkring x-axeln. (I–II)

307. Visa att fotpunktskurvan med avseende på centrum till en ellips med storaxeln $2a$ och excentriciteten e har ekvationen i polära koordinater

$$r^2 = a^2(1 - e^2 \sin^2 v).$$

Beräkna volymen V av den rotationskropp som uppstår, när denna kurva roterar 1:o kring ellipsens storaxel (linjen $v = 0$); 2:o kring ellipsens lillaxel (linjen $v = \frac{1}{2}\pi$). (II)

308. Ett cirkelsegment har som korda sidan i den liksidiga triangel som är inskriven i cirkeln (vars radie är $= R$). Segmentet roterar kring kordan, varigenom en rotationskropp uppstår. Beräkna arean av dennas buktiga yta. (I)

309. Parabeln $y^2 = 2px$ skäres av linjen $3y - 4x = 0$ i punkterna O och A. Parabelbågen OA roterar kring kordan OA. Beräkna arean av den genererade rotationsytan. (I–II)

310. Beräkna arean av den buktiga yta som genereras, när den slutna grenen av kurvan $4y^2 = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ roterar kring x-axeln. (II*)

311. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av xy-planet och den del av ytan $z = xy\sqrt{1 - x - y}$ för vars punkter x och y äro positiva. (II)

312. Beräkna volymen av den kropp i 1:sta oktanten ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) som ligger utanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och som begränsas av planen $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ och ytan $z = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$. (II)

313. Ett prisma, vars sidor äro planen $x = 0$, $y = 1$ och $y = x$, är upptill avskuret av ytan $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$ och nedtill av planet $z = 0$. Beräkna prismats volym. (II)

314. Ett variabelt prisma, vars sidor äro planen $y = 0$, $x = \cos\alpha$ och $y = x\tan\alpha$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$), är upptill och nedtill avskuret av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bestäm det värde på α för vilket prismats volym blir maximum. (II)

315. Beräkna volymen av den del av 1:sta oktanten ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) som begränsas av koordinatplanen och ytan

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1,$$

där a, b och c äro positiva tal. (II)

316. Beräkna volymen av den del av ellipsoiden $E = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ som ligger inom cylindern $C = b^2x^2 + a^2y^2 - axb^2 = 0$ (så at $E < 0$, $C < 0$). (II)

317. Beräkna volymen av den del av cylindern $C = x^2 + y^2 - ax = 0$ som ligger inom konen $K = y^2 + z^2 - k^2x^2 = 0$ (så att $C < 0$, $K < 0$). (II)

318. Beräkna volymen av cylindern $x^2+y^2 = b^2$, då den upptill och nedtill är avskuren av ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c$). (II)

319. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ellipsoiderna $E_1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ och $E_2 = \dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} - 1 = 0$ ($a > b > c$), så att $E_1 < 0$, $E_2 < 0$. (II)

320. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ och $H = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$ $(a > b > c)$, så att $E < 0$, $H < 0$. (II)

321. Sfäroiden $c^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 - a^2c^2 = 0$ $(a > c)$ avskäres av planet $az = c(x - a)$. Beräkna volymen av det avskurna (mindre) sfäroidsegmentet. (II)

322. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiderna $x^2 + y^2 = 2z$ och $y^2 + z^2 = 2x$. (II)

323. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiderna $P_1 = x^2 + y^2 + z - 2 = 0$ och $P_2 = x^2 - y^2 - z = 0$ samt xy-planet, så att i varje inre punkt $P_1 < 0$, $P_2 < 0$, $z > 0$. (II)

324. Beräkna volymen av den kropp som nedtill begränsas av sfären $S = x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ och upptill av paraboloiden $P = x^2 - y^2 - z = 0$ (så att $S < 0$, $P > 0$). (II)

325. Beräkna volymen av den del av cylindern $C = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ som ligger inom sfären $S = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ (så att $C < 0$, $S < 0$). (II)

326. Beräkna volymen av den del av sfären $S = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$ som ligger inom cylindern $C = (x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ (så att $S < 0$, $C < 0$). (II)

327. Man betraktar en rät cylinder, vars spår i xy-planet är den till kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ hörande slingan. Cylindern begränsas nedtill av xy-planet och upptill av planet $y - z = 0$. Beräkna volymen. (II)

328. En rät cylinder, vars spår i xy-planet är den trespetsiga hypocykloiden $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, är upptill och nedtill avskuren av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9a^2$. Beräkna volymen. (II)

329. En rät cylinder, vars spår i xy-planet är cirkeln $x^2 + y^2 - ax = 0$, avskäres av konen $c^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0$. Beräkna volymen av den sålunda stympade cylindern. Beräkna även arean av dess buktiga yta. (II)

330. Beräkna arean av den del av den sfäriska ytan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ vars projektion i xy-planet omslutes av kurvan
$$2(x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 + y^2). \qquad \text{(II–III)}$$

331. Beräkna arean av den del av ytan $cx^2 = (x + y)^3$, som avskäres av xz-planet, yz-planet och planet $x + y = \frac{2c}{3}$. (II–III)

Differentialekvationer

Bestäm den allmänna integralen till differentialekvationerna 332–340 (alla uppgifter om differentialekvationer äro för två betyg; kursbeteckningen (II) har därför icke utsatts).

332. $$x^2y' - y = x^2 - x + 1.$$

333. $$y' = \frac{ax + y}{x - ay}.$$

334. $$xy' + my + (n - m)x^n y^2 = 0.$$

335. $$x^2 y'' + xy' = 1.$$

336. $$y'' + n^2 y = x^2 \cos ax.$$

337. $$y''' - y'' - y' + y = x^2 e^x.$$

338. $$y'' + y = \log \sin x.$$

339. $$x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = 1.$$

340. $$x^2 y'' + xy' - y = x^m.$$

341. Betrakta differentialekvationen

$$y'' - y' \cot x + y \sin^2 x = 0.$$

Inför $u = u(x)$ som ny oberoende variabel och bestäm funktionen $u(x)$ så att koefficienten för $\frac{dy}{du}$ försvinner. Integrera sedan ekvationen.

342. Integrera differentialekvationen

$$xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$$

genom att medelst relationen $x = ye^z$ införa z som ny och av y beroende variabel.

343. Bestäm den integralkurva till differentialekvationen $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$ som i origo tangerar kurvan $x^4 + 4x^3 - 3y = 0$ med kontakt av 3:dje ordningen.

344. Bestäm konstanterna a och b så att differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = xe^x$$

får partikulärlösningen $y = xe^x$. Bestäm sedan allmänna integralen till den sålunda erhållna ekvationen.

345. Uppskriv de lineära differentialekvationer av 3:dje ordningen med konstanta koefficienter som ha partikularintegralen $e^x \sin x$.

346. Uppskriv en lineär differentialekvation av 2:dra ordningen med konstanta koefficienter, vars högra membrum är en lineär funktion av $\sin x$ och $\cos x$ och vilken har $\cos^3 x$ som partikularintegral. Integrera denna ekvation.

347. Framställ polynomet

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!x + n!$$

under integralform genom att integrera den lineära differentialekvation av 1:sta ordningen som $P(x)$ satisfierar. Visa med hjälp härav, att $P(x)$ icke har något reellt nollställe, när n är jämnt, och endast ett, när n är udda.

348. Betrakta differentialekvationen (E) $P(x)y' - P'(x)y = Q(x)$, där P och Q äro polynom, av vilka P har endast enkla nollställen. För att integralerna till (E) må vara polynom, är det nödvändigt och tillräckligt att polynomet $P'Q' - P''Q$ är delbart med P. Visa detta.

349. I formeln för medelvärdessatsen

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

är storheten θ i allmänhet beroende av såväl x som h. Bestäm alla (tre gånger deriverbara) funktioner $f(x)$, för vilka θ är oberoende av x.

350. Visa att integralen

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,dt$$

är en för $x \geq 0$ kontinuerlig funktion, som satisfierar differentialekvationen $(E) : xy'' + xy = 1$ samt villkoren:

$$y(0) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \lim_{x\to+0} \frac{y'(x)}{\log x} = 1.$$

Undersök om $y(x)$ är den enda integral till (E) som satisfierar dessa villkor.

351. Genom en godtycklig ordinär punkt P på en kurva C i ett cartesiskt koordinatsystem drages en rät linje parallell med *y-axeln*, och genom origo drages en rät linje parallell med kurvtangenten i P. Låt Q vara den punkt, där dessa linjer skära varandra, och låt M vara mittpunkten av linjestycket PQ. Bestäm kurvan C så att orten för M blir en kurva med ekvationen $y = f(x)$, där $f(x)$ är en given integrabel funktion.

352. Samma uppgift som i föregående, när linjen genom P drages parallell med *x-axeln.*

353. Tangenten i en punkt M på en kurva i ett rätvinkligt koordinatsystem skär x-axeln i T, och normalen i samma punkt skär x-axeln i N. Bestäm kurvan så att mittpunkten av linjestycket NT faller i origo och så att kurvan skär y-axeln för $y = a$.

354. Bestäm alla kurvor med följande egenskap: Om MT är tangenten i en punkt M på en av kurvorna och M' är skärningspunkten mellan MT och polaren till M med avseende på parabeln $y^2 = 2px$, så ligger punkten M' alltid på räta linjen $x = a$.

355. Uppskriv ekvationen i rätvinkliga koordinater för en kurva som uppfyller följande villkor: 1:o Låt O vara origo och M en punkt på kurvan. Om N är den punkt där kurvnormalen i M skäres av perpendikeln i O mot radiusvektor OM, så skall mittpunkten av MN vara det till M hörande krökningscentrum. 2:o Kurvan skall skära x-axeln för $x = a$ och tangenten skall där bilda en vinkel av 135° med positiva x-axeln.

356. Bestäm de ortogonala trajektoriorna till ellipserna

$$\frac{x^2}{a^2+1} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

där a är en parameter.

357. Bestäm de ortogonala trajektoriorna till parablerna

$$y^2 = 2ax + a^2$$

där a är en parameter.

358. Integrera differentialekvationen

$$x(x-a)y' - (x+a)y + b^2 = 0.$$

Visa att integralkurvorna äro hyperbler med ena asymptoten fix och den andra gående genom en fix punkt.

359. Visa att allmänna integralen till differentialekvationen

$$y'\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$$

kan skrivas under formen $f(x, y, c) = 0$, där c är en integrationskonstant och f är ett polynom i x, y och c. Studera integralkurvorna och bestäm deras envelopp.

Talföljder, serier och produkter

Talföljder och serier med konstanta termer

360. Om $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ äro växande tal sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = g,$$

vad kan då sägas om konvergensen av talföljden a_n? (I)

361. Låt $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ vara en talföljd sådan att både $\lim a_n$ och $\lim n(a_{n+1} - a_n)$ äro ändliga och bestämda för $n \to \infty$. Visa att det senare gränsvärdet då måste vara lika med noll. (I)

362. För vilka reella värden på a och b konvergerar talföljden

$$u_n = \sum_{m=1}^{n} m^{a-1} + bn^a \quad (n = 1, 2, \dots)? \qquad \text{(I–II)}$$

363. Visa att $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ existerar med ett ändligt värde. (I–II)

364. Visa att gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right)$$

existerar och ligger mellan $-\dfrac{3}{2}$ och -1. (II)

365. Visa att gränsvärdet

$$G = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \dots + \frac{1}{n\log n} - \log\log n \right)$$

existerar. Angiv en undre och en övre gräns för G. (II)

Konvergera eller divergera de oändliga *serier* vilkas allmänna termer u_n ha följande värden: (uppg. 366–369): (I)

366. $\qquad u_n = 1 - \dfrac{1}{n}\cot\dfrac{1}{n}.$

367. $$u_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1.$$

368. $$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\log \frac{n+1}{n}}.$$

369. $$u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Äro de serier konvergenta eller divergenta vilkas allmänna termer ha följande värden (uppg. 370–375): (I)

370. $$u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}\log(n+1)}.$$

371. $$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n}.$$

372. $$u_n = \frac{1}{n}\left(1 - \sqrt[n]{\sin \frac{\pi}{n}}\right).$$

373. $$u_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)\sqrt{\log\left(1 + \arctan \frac{1}{n}\right)}.$$

374. $$u_n = \cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} + \cos \frac{n\pi}{2n+1}.$$

375. $$u_n = \frac{e^{-\sqrt{\log\log(2+n)}}}{n\log(1+n)}.$$

Konvergera eller divergera de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 376–379): (II)

376. $$u_n = \frac{\sqrt[n]{\sin \frac{\pi}{n}}}{n^2 \log n \log(1+\sqrt{n}) \log\left(1 + \tan \frac{\pi}{n}\right)}$$

377. $$u_n = \frac{(1+e^n)^{\log\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}}{n\log(1+\sqrt{1+n^2})}.$$

378. $$u_n = 1 + \sin(\pi\sqrt{4n^2-2n}).$$

379. $$u_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2}.$$

380. Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\log n},$$

där

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)? \qquad \text{(II*)}$$

381. Bestäm talen p och q så att funktionen

$$F(x) = \int_x^{\infty} (x^2 + px + q)e^{-x}\,dx$$

får det dubbla nollstället $x = 1$. Konvergerar eller divergerar den serie vars allmänna term är $u_n = F(n)$? (I)

Konvergerar eller divergerar de serier vilkas allmänna termer u_n definieras av följande bestämda integraler (uppg. 383–388): (I–II)

383. $$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{\log^2 x}.$$

384. $$u_n = \int_n^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^5}}.$$

385. $$u_n = \int_n^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

386. $$u_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin^2 x}{1 + x^2}\,dx.$$

387. $$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$

388. $$u_n = \int_1^{n} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\sqrt{\log x}}\,dx.$$

389. Konvergerar eller divergerar den serie vars allmänna term är

$$u_n = \frac{\cot(\pi/n)}{f(n)}, \quad \text{där} \quad f(n) = \int_0^{n} \sqrt[3]{\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}}\,dx? \qquad \text{(I–II)}$$

390. Konvergerar eller divergerar den serie vars allmänna term är

$$u_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{m \log(1+n)}{k^2 + n^2 m^2}? \qquad \text{(I–II)}$$

Äro de serier absolut konvergenta, betingat konvergenta eller divergenta, vilkas allmänna termer u_n ha följande värden (uppg. 391–395): (I–II)

391. $u_n = \sin \dfrac{(n^2+n+1)\pi}{n+1}$.

392. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\left(\dfrac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos na\right)$, där a är ett reellt tal.

393. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$.

394. $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1\pi)} \frac{\sin x}{\log x}\, dx$.

395. $u_n = \sin(\pi e n!)$.

396. Bevisa utan användande av kriterier att serien

$$1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n(2n+1)} + \ldots$$

är konvergent. (II)

397. Låt $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ vara de av kurvan $xy = \sin x$ och x-axeln inneslutna areorna i intervallen $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ... Visa att serien

$$u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^n u_n + - \ldots$$

är konvergent. (I–II)

För vilka reella värden på a konvergera de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 398–399): (I)

398. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}$.

399. $u_n = n^a \displaystyle\int_0^{\pi/n} \sin^3 x\, dx$.

För vilka reella värden på a konvergera de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 400–401): (I–II)

400. $u_n = \left(\cos\dfrac{a}{n} + \sin\dfrac{a}{n}\right)^n - e^{n-\frac{1}{n}}$.

401. $$u_n = 1 - \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\log(an)}{n}.$$

För vilka reella värden på a konvergera de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 402–403): (I)

402. $$u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}.$$

403. $$u_n = \sqrt{n + a} - \sqrt[4]{n^2 + bn}.$$

För vilka reella värden på a och b konvergera de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 404–405): (I–II)

404. $$u_n = a + \frac{b}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

405. $$u_n = a + b\arctan\frac{1}{n} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)^n.$$

406. Bestäm talen a, b och c så att den serie konvergerar vars allmänna term är

$$u_n = \left[na + b + \frac{c}{n} - n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]e^{-\sqrt{\log(2+\log n)}}. \qquad \text{(I–II)}$$

407. Betrakta den serie vars allmänna term är

$$u_n = (-1)^n n^a \left(\log\frac{n+1}{n-1}\right)^b.$$

För vilka reella värden på a och b är serien konvergent resp. absolut konvergent? (I–II)

408. I den konvergenta serien $\sum_1^\infty a_n$ äro alla a_n positiva och $\neq (k + \frac{1}{2})\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Visa att även serien $\sum_1^\infty \tan a_n$ konvergerar. (I)

409. Om $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ är en reell talföljd sådan att serien $\sum_1^\infty a_n^2$ är konvergent, konvergerar eller divergerar då den serie vars allmänna term är

$$u_n = \left(a_n - \arctan a_n\right)^{2/3}? \qquad \text{(I)}$$

410. Om $\sum_1^\infty a_n$ är konvergent och alla $a_n > 0$, konvergerar eller divergerar då den serie vars allmänna term är

$$u_n = 2^{-|\cot a_n|}? \qquad \text{(I)}$$

411. Om $\sum_1^\infty a_n$ är konvergent och alla $a_n > 0$, konvergerar eller divergerar då den serie vars allmänna term är
$$u_n = \sqrt[3]{a_n a_{n+1} \sin a_n}? \qquad \text{(I–II)}$$

412. Låt $\sum_1^\infty$ vara en konvergent serie med positiva och monotont avtagande termer. Bevisa att $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Visa med hjälp härav att även serien $\sum_1^\infty \sqrt{a_n} n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ konvergerar, om ε är positivt. Visa med ett exempel att satsen icke gäller allmänt för $\varepsilon = 0$. (II)

413. Bevisa Cauchys olikhet
$$\sum_1^n a_k^2 \sum_1^n b_k^2 \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2,$$
där a_k och b_k äro reella tal. Bevisa med hjälp härav följande sats: Om serien $\sum_1^\infty a_n^2$ är konvergent, så konvergerar även serien
$$\sum_2^\infty a_k k^{-\frac{1}{2}} (\log k)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$
absolut för $\varepsilon > 0$. (II)

414. Visa att varje naturligt tal p kan på ett och endast ett sätt skrivas under formen
$$p = a_n 2^n + a_{n-1}2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0,$$
där $a_n = 1$ och $a_i = 0$ eller 1 för $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Sifferkonstellationen $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ är då det entydiga uttrycket för talet p i detta *dyadiska* system. Uppskriv uttrycken för de åtta första naturliga talen. Låt $P_0, P_1, P_2, \ldots$ vara de naturliga tal, ordnade efter växande storlek, som i systemet framställas med enbart ettor. Konvergerar eller divergerar serien
$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{P_n}? \qquad \text{(I)}$$

415. Låt $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ vara en oändlig följd av positiva växande tal med följande egenskap: om antalet q_i som äro $\leq x$ betecknas med $A(x)$, så är för $x \geq x_0$: $A(x) < \dfrac{kx}{\log^2 x}$, där k är en positiv konstant. Konvergerar eller divergerar serien
$$\sum_1^\infty \frac{1}{q_n}? \qquad \text{(II)}$$

416. Man betraktar en serie av positiva termer $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ där $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ för alla $n \neq 2^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, men $a_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ för $n = 2^m$. För vilka α och β är denna serie konvergent? För vilka α och β är villkoret $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ uppfyllt? Giv exempel på konvergenta positiva serier, för vilka $\limsup_{n\to\infty} na_n$ är ändlig och $\neq 0$ resp $= +\infty$. (II)

417. För vilka värden på r konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho_n}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^r,$$

där ϱ_n betecknar den reella roten till ekvationen $x^3 + nx - n^2 = 0$? (II)

418. Visa att ekvationen $x^n + x - 1 = 0$ (n naturligt tal) har en och endast en positiv rot ϱ_n. Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varrho_n}{\log(1+n)}? \qquad \text{(II)}$$

419. Visa att ekvationen $x\cot x = \frac{1}{n}$ $(n > 1)$ har en och endast en lösning $x = \varrho_n$ i intervallet $[0,\ \frac{1}{2}\pi]$. För vilka rella m och n konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)^{\frac{1}{m}} - n^{\frac{1}{m}}\right)\left(\tfrac{1}{2}\pi - \varrho_n\right)^{\frac{1}{r}}? \qquad \text{(II)}$$

Visa att serierna 420–422 äro konvergenta och beräkna deras summor S. (I)

420. $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}.$$

421. $$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

422. $$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccot}(n^2+n+1).$$

423. Låt y_n vara allmänna termen i den aritmetiska serie av 3:dje ordningen vars fyra första termer $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ äro $1,\ 4,\ 10,\ 20$. Bevisa att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y_n}$$

är konvergent och beräkna dess summa S. (I)

424. För vilka värden på det naturliga talet p konvergerar serien $\sum_{1}^{\infty} u_n$ där

$$u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1^p+2^p+\cdots+n^p}?$$

Beräkna seriens summa S för $p = 3$. (I–II)

425. Betrakta serien $\sum_{0}^{\infty} u_n$, där $u_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x\, dx$. Visa att serien är konvergent och att dess summa är integralen $\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du$. (II)

426. Låt $y = f(x)$ vara den integral till differentialekvationen

$$2y'' - 5y' + 2y = 0$$

som satifierar villkoren $f(0) = 3$, $f'(0) = 9/2$. Bevisa att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{f^{(n)}(0)}$$

är konvergent och beräkna dess summa S. (II)

427. Bevisa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{n - \frac{1}{2}}{n}$$

är konvergent och beräkna dess summa S. (II)

428. Bevisa formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}(\log 2)^2. \qquad \text{(II)}$$

429. Bevisa att identiteten

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m} = \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^m}{m} \sum_{n=m}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$$

gäller även för $N \to \infty$. Beräkna med hjälp härav summan

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m},$$

då man vet att

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \text{(II*)}$$

430. Bevisa formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\log z)^2}{1 - z}\, dz. \qquad \text{(II)}$$

Funktions- och potensserier

431. Beräkna

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2nx}{(2n)!}\, dx. \qquad \text{(I)}$$

Undersök för alla reella x konvergensen av de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 432–433): (I–II)

432. $$u_n = \frac{3n+4}{n^2}\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)^n.$$

433. $$u_n = \frac{n^{2x}}{x^n + \log n}.$$

För vilka reella x och y konvergera resp. divergera de serier vilkas allmänna termer u_n äro (uppg. 434–435): (II)

434. $$u_n = x^n\left(1+\sin\frac{y}{1}\right)\left(1+\sin\frac{y}{2}\right)\dots\left(1+\sin\frac{y}{n}\right).$$

435. $$u_n = \frac{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)}{(y+1)(2y+1)\dots(ny+1)}.$$

436. Visa att serien
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$
är likformigt konvergent för $x \geq \delta - 1$, där δ är ett godtyckligt litet men fixt positivt tal. Bestäm seriens summa i form av en definit integral med x som parameter. (II)

437. Bevisa att serien
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
är likformigt konvergent i varje reellt intervall av x (där termerna äro ändliga) och lika med funktionen $\dfrac{1}{x} - 2\cot 2x$. (II)

438. Betrakta serien $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} u_n(x)$ där
$$u_n(x) = \frac{\log(1+x)\log\left(1-\dfrac{x}{1+nx}\right)}{\log(1+nx)\log(1+(n-1)x)}.$$
Visa att serien konvergerar för varje positivt x och att även serien $\displaystyle\sum_{2}^{\infty}\lim_{x\to 0} u_n(x)$ är konvergent. Beräkna seriens summa S. Undersök om konvergensen är likformig i intervallet $0 \leq x \leq 1$. (II)

För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum a_n x^n$, där (uppg. 439–441)

439. $$a_n = \frac{1}{n^2}\int_2^n \frac{dy}{\log y}$$ (I–II)

440. $$a_n = \int_0^1 (y\log y)^n\,dy.$$ (II)

441. $$a_n = \frac{(n-1)!}{n^n \log n}.$$ (II)

442. Bestäm konvergensradien R för serien $\sum a_n x^n$, där
$$a_n = \left(\cos(\tfrac{1}{2}n\pi\sqrt{n^2+n})\right)^{2n}.$$ (II)

443. Beräkna $\left(\dfrac{d^n x}{dy^n}\right)_{y=0}$, när $y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$. (I)

444. Bestäm koefficienten c_n i potensserien $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ så att
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
och så att mot varje reellt värde på y svarar ett rellt värde på x. (I–II)

445. För vilka reella x kan polynomet $2x^3 + 6x^2 + x + 1$ utvecklas i en geometrisk serie vars första term är $2x$? (II)

446. Funktionen
$$f(x) = \frac{9}{(x-7)(x-1)(x+2)}$$
kan på två olika sätt utvecklas efter både stigande och fallande potenser av x. Skriv upp serierna och abgiv för vilka reella x utvecklingarna gälla. (II)

447. Utveckla funktionen
$$y = \frac{1}{x}(1+x^2)\arctan x$$
i serie efter stigande potenser av
$$z = \frac{x^2}{1+x^2}.$$
Bestäm konvergensradien. (II*)

Utveckla följande funktioner $f(x)$ i serie efter stigande potenser av x (uppg. 448–452). Bestäm koefficienten c_n för x^n som funktion av n. För vilka reella x gäller utvecklingen? (II)

448. $$f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}.$$

449. $$f(x) = (\arctan x)^2.$$

450. $$f(x) = \log(1+x)\arctan x.$$

451. $$f(x) = \log(1-x+x^2).$$

452. $$f(x) = \log\left(\sin(\arctan x) + \sqrt{1+x^2}\right)$$

453. Utveckla funktionen

$$y(x) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

i Maclaurin-serie genom att först söka den differentialekvation av 2:dra ordningen som y satifierar. För vilka rella x gäller utvecklingen? (II)

454. Beräkna summan $y(x)$ av potensserien

$$1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \ldots \qquad \text{(II)}$$

455. Summera potensserien

$$s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4m}}{4m} + \frac{x^{4m+1}}{4m+1} - \frac{x^{4m+2}}{4m+2} - \frac{x^{4m+3}}{4m+3} \right).$$

Visa sedan att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}}{k}$$

är konvergent och beräkna dess summa S. (II)

456. Betrakta potensserien $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$, där

$$a_n = \frac{16}{16n^4 - 40n^2 + 9}.$$

Bestäm den funktion $f(x)$ som serien representerar. Beräkna med hjälp härav $\sum_{0}^{\infty} a_n$. (II)

457. visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{4} \frac{x^n}{n}$$

är konvergent för $|x| \leq 1$. Bestäm den funktion $f(x)$ som serien representerar. Beräkna seriens summa för $x = 1$ och för $x = -1$. (II)

458. Betrakta potensserien $\sum_{r=1}^{\infty} r^n x^{r-1}$, där n är ett fixt naturligt tal. Visa att när denna serie konvergerar är dess summa $f_n(x)$ av formen

$$f_n(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

där P_{n-1} är ett polynom i x. Sök en lineär relation mellan P_n, P_{n-1} och P'_{n-1}. Bestäm P_1, P_2, P_3 och P_4. Av vilken grad är P_n? Beräkna koefficienten för högsta potensen av x samt koefficienterna för x^0, x^1 och x^2. Visa att P_n är ett reciprokt polynom. Bevisa att polynomet P_n har n distinkta negativa nollställen. (II)

Rekurrenta talföljder och serier. Oändliga produkter.

459. I den reella talföljden $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ gäller rekursionsformeln

$$u_{n+1} = \log(1 + u_n^2).$$

Existerar $\lim_{n\to\infty} u_n$, och vad är i så fall dess värde? (I)

460. I en oändlig följd av positiva tal $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ gäller rekursionsformeln

$$u_{n+1} = \frac{2}{\pi} \arcsin u_n.$$

Visa att varje sådan talföljd är konvergent, bestäm $\lim_{n\to\infty} u_n$ och angiv vilka värden u_1 kan ha. (I)

461. Betrakta talföljden $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$, där $u_0 = a$ (givet reellt tal) och de övriga talen bildas enligt rekursionsformeln

$$u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(u_n - u_n^2)}.$$

för vilka a existerar $\lim_{n\to\infty} u_n$? Bestäm gränsvärdet i de olika fallen. (I–II)

462. I den oändliga följden av positiva tal $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ gäller rekursionsformeln

$$u_{n+1} = \sqrt[m]{mu_n - m + 1},$$

där m är ett jämnt naturligt tal. Visa att talföljden är konvergent, bestäm $\lim_{n\to\infty} u_n$ och angiv vilka värden u_1 kan ha. (II)

463. Låt $f(x)$ vara en för alla x kontinuerlig (reell) funktion, satisfierande villkoret

$$|f'(x)| < k < 1.$$

Visa att ekvationen $x - f(x) = 0$ har en och endast en reell rot $x = a$. Man bildar talföljden

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \dots,\ x_n = f(x_{n-1}), \dots,$$

där x_0 är godtyckligt valt. Visa att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. (II)

464. Man betraktar en följd $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ där $0 < u_0 < \pi$ och $u_n = u_{n-1} \sin u_{n-1}$ för $n = 1, 2, \dots$. För vilka u_0 i det givna intervallet existerar $\lim_{n\to\infty} u_n$, och vad är då dess värde? (II)

För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_1^\infty a_n x^n$, när $a_1 > 0$ och de övriga a_n bildas enligt följande rekursionsformler (uppg. 465–466): (II)

465. $$a_{n+1} = \log(1 + a_n).$$

466. $$a_{n+1} = \arctan a_n.$$

För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$, när $a_1 > 0$ och de övriga a_n bildas enligt rekursionsformlerna 467–468? Diskussion för olika positiva värden på a_1. (II)

467. $$a_{n+1} = a_n \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)}.$$

468. $$a_{n+1} = a_n^2 \frac{\log(1 + a_n)}{\log 2}.$$

469. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$, där koefficienterna a_n äro positiva tal, bildade enligt rekursionsformeln

$$a_{n+1} = \frac{2}{\pi} \arcsin a_n? \qquad \text{(II)}$$

470. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$, där

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{\pi} \arctan a_n?$$

Diskussion för olika reella värden på a_1. (II)

471. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \ldots,$$

där a_0 är ett godtyckligt reellt tal och

$$a_1 = \cos a_0,\ a_2 = \cos a_1, \ldots, a_n = \cos a_{n-1}, \ldots? \qquad \text{(II)}$$

472. Betrakta potensserien $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, där $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$ och $a_{n+3} = a_{n+1} - a_{n-1}$ för $n = 1, 2, \ldots$. Bestäm den funktion $F(z)$ som serien representerar. Beräkna sedan a_n och angiv seriens konvergensradie R. (II)

473. Betrakta potensserien $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, där $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ och

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots$$

Bestäm a_n med hjälp av en integral $y = y(x)$ till differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 0$ (eller på annat sätt). Angiv konvergensradien R och beräkna den funktion som serien representerar. (II)

474. Låt r_1, r_2 och r_3 vara rötterna till ekvationen

$$x^3 + px + q = 0,$$

där p och q äro givna reella tal, och betrakta potensserien $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, där $a_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$. Visa att det existerar en lineär relation mellan fyra på varandra följande a_n. Bestäm den funktion $F(z)$ som serien representerar. Angiv de nödvändiga och tillräckliga villkor som talen p och q måste uppfylla för att seriens konvergensradie må vara = 1. (II)

Beräkna de oändliga produkterna 475–477. (I–II)

475. $$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n-1)}{\log n}.$$

476. $$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

477. $$\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{4}{n^4}\right).$$

478. Låt $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vara positiva icke växande tal sådana att

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

är konvergent. Visa att $\lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1$. (II–III)

479. Visa att produkten

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$$

är konvergent. (II–III)

480. Visa att en oändlig produkt vars allmänna faktor är

$$\cos\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n},$$

tenderar mot 0 för alla positiva x. (II–III)

Undersök för alla reella x följande produkter (uppg. 481–483) med avseende på konvergens och divergens: (II–III)

481. $$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{n}.$$

482. $$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \tan\frac{x}{n}\right).$$

483. $$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{x + x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

484. För vilka reella värden på a, b och c konvergerar produkten

$$\prod_{n=1}^{\infty} \tan \frac{an^2 + bn + c}{n^2}? \qquad \text{(II–III)}$$

485. För vilka reella värden på m och r konvergerar produkten

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(n+1)^m - n^m}{n^r}\right)? \qquad \text{(II–III)}$$

486. I vilka reella intervall av x är produkten

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right)$$

likformigt konvergent och vilken funktion representerar den? (II–III)

Plan geometri

Kägelsnitt

487. Vad slags kägelsnitt representerar ekvationen

$$x^2 - 2txy + ty^2 + 2x - 4y = 1$$

för olika värden på parametern t? Bestäm medelpunkt och axlar. (I)

488. Uppskriv ekvationen för det kägelsnitt som går genom punkterna $(0,\ 0)$, $(-1,\ 2)$ och $(a,\ a)$ och som tangerar linjen $2x + y - 5 = 0$ i punkten $(2,\ 1)$. Vad representerar ekvationen för olika värden på a? (I)

489. Uppskriv ekvationen för det kägelsnitt som tangerar x- och y-axlarna i punkterna $(1,\ 0)$ och $(0,\ -1)$ och som går genom punkten $(\xi,\ \eta)$ på räta linjen $3x - y - 1 = 0$. När är detta kägelsnitt en ellips? Bestäm dennas area som funktion av ξ. (I)

490. Uppskriv ekvationen för det kägelsnitt som tangerar linjen $y = 2$ i punkten $(0,\ 2)$ och linjen $x = 1$ i punkten $(1,\ 0)$ och som går genom punkten $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, där $0 < \alpha < 2\pi$. Vad representerar denna ekvation för olika värden på α? (I)

491. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem ett kägelsnitt K som tangerar y-axeln i origo, som går genom punkten $(a,\ 0)$ och vars medelpunkt M ligger på ellipsen (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Undersök huru kägelsnittet K varierar, när M genomlöper ellipsen E. (I)

492. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem de kägelsnitt som gå genom punkterna $(a,\ 0)$ och $(0,\ b)$ och som ha en brännpunkt F på cirkeln $x^2 + y^2 = c^2$ med den till F hörande styrlinjen gående genom origo. Bevisa att intet av dessa kägelsnitt kan vara en ellips. (I)

493. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem de liksidiga hyperbler som tangera x-axeln i origo och gå genom punkten $P(X,\ Y)$. Från punkten $(a,\ 0)$ drages den andra tangenten till var och en av dessa hyperbler. Visa att orten för tangeringspunkten är ett kägelsnitt (K) och angiv var punkten P måste ligga för att K skall vara en ellips, en parabel resp. en hyperbel. (I–II)

494. En cirkel C med centrum i origo och en annan cirkel C' äro givna. Låt T vara en tangent till C' och låt P vara polen till T med avseende på C. Sök geometriska orten för P och diskutera den för olika lägen av cirkeln C'. (I–II)

495. A är en punkt på positiva x-axeln, B en punkt på positiva y-axeln i ett cartesiskt koordinatsystem, där O är origo. 1:o Uppskriv allmänna ekvationen för de parabler som gå genom punkterna O, A och B. 2:o Visa att det genom varje annan punkt P i planet går i allmänhet exakt två sådana parabler, reella eller imaginära. 3:o Bestäm orten för de punkter P genom vilka endast en parabel går, och uppskriv ekvationen för denna parabel. 4:o Angiv de områden i planet som innehålla de punkter P genom vilka ingen reell parabel går. (I–II)

496. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem alla liksidiga hyperbler (H) som gå genom origo, som tangera linjen $x + 2 = 0$ och som ha en asymptot parallell med linjen $y - x = 0$. 1:o Uppskriv allmänna ekvationen för hyperblerna H. 2:o Visa att det genom varje punkt P i planet (som ej är origo) går i allmänhet exakt två sådana hyperbler, reella eller imaginära. 3:o Bestäm orten för de punkter P genom vilka endast en hyperbel går och uppskriv ekvationen för denna. 4:o Angiv de områden i planet som innehålla de punkter P genom vilka ingen reell hyperbel går. (I–II)

497. En romb med centrum i origo samt hörnpunkter i $(a, 0)$ och $(0, b)$ är given. 1:o Uppskriv allmänna ekvationen för en i romben inskriven ellips (E). 2:o Visa att det genom varje punkt P i det inre av romben går exakt två reella ellipser E: E_1 och E_2. 3:o Bestäm orten för de punkter P, där E_1 och E_2 skära varandra under en given vinkel α. 4:o Beräkna arean av det område som denna ort begränsar för det fall att romben är en kvadrat och $\alpha = 45°$. (II)

498. Man betraktar i ett cartesiskt koordinatsystem alla egentliga kägelsnitt (K) som gå genom punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ och som tangera linjen $L = x + y + 1 = 0$. 1:o Visa att kägelsnitten K tillhöra ett enparametrigt system, definierat av en enda andragradsekvation (E). 2:o Bestäm de värden på parametern för vilka ekvationen (E) representerar sönderfallande kägelsnitt (K'). 3:o Visa att exakt två distinkta kägelsnitt K, reella eller imaginära, gå genom varje punkt P i planet som icke ligger på linjen $L = 0$ eller på något av kägelsnitten K'. Bestäm orten för de punkter P genom vilka intet kägelsnitt K går. Var ligga de punkter P genom vilka endast ett kägelsnitt går? Uppskriv dess ekvation med P:s koordinater som parametrar. (II)

499. Uppskriv villkoren för att kägelsnittet

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + H = 0$$

må ha en brännpunkt i origo. (I)

500. Visa att två ellipser som ha en brännpunkt gemensam skära varandra i högst två reella punkter. (I)

501. Genom bägge brännpunkterna i en ellips lägges en cirkel. Vilket villkor måste ellipsen uppfylla och var på dess lillaxel skall cirkelns centrum placeras för att cirkeln må skära ellipsen i fyra reella punkter? (I)

502. Låt MAA' och MBB' vara två mot varandra vinkelräta tangenter till en ellips med centrum i O; A och B äro tangeringspunkterna, A' och B' äro de punkter, där tangenterna skära den geometriska orten för M. Bevisa att

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \qquad \text{(I)}$$

503. En triangel är inskriven i en ellips med halvaxlarna a och b. R är den omskrivna cirkelns radie; d_1, d_2 och d_3 äro de halvdiametrar i ellipsen som äro parallella med triangelns sidor. Visa att

$$R = \frac{d_1 d_2 d_3}{ab}. \qquad \text{(I)}$$

504. En kompassros med m streck eller radier R_0, R_1, R_2, ..., R_{m-1} placeras med sitt centrum i ena brännpunkten F till en ellips. Låt r_k vara avståndet från F till den punkt, där radien R_k skär ellipsen. Visa att

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{r_k}$$

är konstant, när rosen roterar omkring F. (I)

505. En triangel CDE är inskriven i en ellips med halvaxlarna a och b. Triangelns sidor betecknas med c, d och e, ellipstangenterna i triangelns hörnpunkter med t_c, t_d och t_e. Visa att om c och d äro parallella med t_c respektive td, så öro även e och t_e parallella. Beräkna triangelns area. (I)

506. Låt P_1, P_2 och P_3 vara tre godtyckliga men distinkta punkter på en parabel. Tangenterna i dessa punkter bilda då en triangel ABC. Visa att förhållandet mellan areorna av trianglarna $P_1P_2P_3$ och ABC är en konstant och angiv dess värde. (I)

507. Genom en fix punkt M i ett rätvinkligt koordinatsystem läggas två mot varandra vinkelräta linjer, som skära x-axeln i B och D, y-axeln i A och C. Man betraktar de båda parabler som tangera koordinataxlarna i A och B respektive i C och D. Visa att avståndet mellan parablernas brännpunkter är konstant, när det rätvinkliga linjeparet vrider sig kring M. (I)

508. A_1 och B_1 äro två diametralt motsatta punkter på en cirkel C, A_2 och B_2 två andra diametralt motsatta punkter på C. Cirkeln C_1 skär C i A_1 och B_1. Cirkeln C_2 skär C i A_2 och B_2. Cirklarna C_1 och C_2 skär varandra i punkterna P och Q. Visa att varje cirkel som går genom P och Q skär cirkeln C i diametralt motsatta punkter. (I)

509. Bevisa följande sats: När två av en liksidig hyperbels skärningspunkter med en cirkel äro diametrala på hyperbeln, så äro de båda andra diametrala på cirkeln. (I)

510. Bevisa följande sats: Om en cirkel tangerar en liksidig hyperbel utantill och dess diameter är lika med hyperbelns krökningsradie i tangeringspunkten, så går cirkeln genom hyperbelns centrum. (I)

511. I en punkt M på en hyperbel med centrum i O drages normalen, som skär konjugataxeln i N. Till den cirkel som har ON som diameter drages tangenten MT, där T är tangeringspunkten. Visa att $\overline{MT}$ är lika med hyperbelns halva transversalaxel. Använd detta för att konstruera normalen i en godtycklig hyperbelpunkt M, när man känner endast M och hyperbelns båda toppar A och A'. (I)

512. Uppskriv ekvationerna för de normaler till ellipsen

$$x = 13\cos t, \quad y = 12\sin t,$$

som kunna dragas från punkten (15/26, 5/6). (I–II)

513. Man betraktar en kroklinig triangel, vars sidor äro bågar av koncentriska och liksidiga hyperbler. Bevisa att vinkelsumman i denna triangel är lika med två räta. (I–II)

514. En parabel med variabel parameter har fokus i origo och räta linjen $ax+by+c=0$ som tangent. Visa att diametern genom tangeringspunkten går genom en fast punkt. Vilken? (I–II)

515. Betrakta de cirklar (Γ) som definieras av ekvationen

$$x^2 + y^2 + ax + by + Aa + Bb + C = 0,$$

där A, B och C äro reella konstanter, a och b variabla parametrar. Visa att mot varje punkt M_1 i planet svarar en punkt M_2 sådan att ett enparametrigt system av cirklarna Γ går genom M_1 och M_2. Uttryck koordinaterna för M_2 som funktioner av koordinaterna för M_1. Visa att räta linjen M_1M_2 går genom en fast punkt F och att produkten $\overline{M_1F} \cdot \overline{M_2F}$ är konstant. Ersätt cirklarnas analytiska definition med en geometrisk, som omedelbart förklarar de bevisade resultaten. (II)

516. Uppskriv allmänna ekvationen för de kägelsnitt i vilka räta linjen $y = ax + b$ är konjugatdiameter till kordor parallella med y-axeln. Bestäm sedan den differentialekvation som dessa kägelsnitt satisfiera. (II)

517. Ett kägelsnitt (K) och två yttre punkter P och P' äro givna. Tangentkordorna till dessa punkter skära K i A och B resp. i A' och B'. Visa att man kan lägga ett kägelsnitt genom P, A, B, A', B' och P'. (I–II)

518. En triangel OAB är given. Ett kägelsnitt tangerar sidorna OA och OB (eller deras förlängningar) samt sidan AB i dess mittpunkt. Visa att polaren till O med avseende på detta kägelsnitt är parallell med AB. (II)

519. En triangel OAB och en rät linje (d) genom O äro givna. Man betraktar de kägelsnitt som äro omskrivna kring triangeln OAB och sådana att polen till AB ligger på d. Låt t vara tangenten i O. Bevisa att räta linjen AB är harmoniskt skuren av OA, d, OB och t. Uppskriv kägelsnittens ekvation i det koordinatsystem, där OA är x-axel och OB är y-axel. (II)

520. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i ett kägelsnitt. Låt P_1 vara polen till AB, P_2 polen till CD, O diagonalernas skärningspunkt och Q_1 den punkt, där AD och BC skära varandra. Bevisa att punkterna P_1, P_2, O och Q_1 ligga i rät linje. (II)

521. Till två ellipser E och E', som tangera varandra utantill i O, drar man de båda andra gemensamma tangenterna AA' och BB', vilka skära varandra i M. Bevisa att tangentkordorna AB och $A'B'$ skära varandra i en punkt T som ligger på tangenten i O. Från T dragas till E och E' de yttre tangenterna TD och TD'. Bevisa att tangeringspunkterna D och D' ligga i rät linje med M och O. (II)

522. P, Q, P' och Q' äro fyra punkter på ett kägelsnitt. M är polen till PQ, M' polen till $P'Q'$. MP skäres av $M'P'$ i A, av $M'Q'$ i B. MQ skäres av $M'P'$ i C, av $M'Q'$ i D. Visa att de räta linjerna PQ, $P'Q'$, AD och BC gå genom en och samma punkt. (II)

523. En ellips (E) och två yttre punkter P och Q äro givna. Låt C vara ett godtyckligt kägelsnitt som tangerar E i de båda punkter A och B, där E skäres av polaren till P relative E. Polaren till Q relative C skär C i punkterna A' och B'. Visa att alla de sex punkterna P, A, B, A', B' och Q ligga på ett fixt kägelsnitt. (II)

524. Bestäm orten för en punkt varifrån två mot varandra vinkelräta normaler kunna dragas till parabeln $y^2 = 2px$. (I)

525. Parabler läggas genom hörnpunkterna i en rätvinklig triangel och till var och en av dessa parabler drages en tangent parallell med hypotenusan. Bestäm orten för tangeringspunkterna. (I)

526. Genom två fixa punkter A och B på ett givet kägelsnitt lägges en cirkel, som skär kägelsnittet i ytterligare två punkter C och D. AC och BD skära varandra i M, AD och BC i N. Bestäm orten för M och N. (I)

527. I ett rätvinkligt koordinatsystem betraktas alla de parabler som tangera koordinataxlarna så att tangentkordan PQ går genom den fixa punkten (a, b). I var och en av dessa parabler dragas normalen PN i P och diametern QN genom Q. Bestäm orten för skärningspunkten N mellan dessa räta linjer. (I)

528. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem de hyperbler för vilka y-axeln är en styrlinje och linjen $y = mx$ en asymptot. Bestäm orten för brännpunkterna. (I)

529. I ett rätvinkligt koordinatsystem är $B(0, b)$ en punkt på Y-axeln och AB en rät linje med vinkelkoefficienten m. Man betraktar de parabler som tangera y-axeln i B och ha sina brännpunkter på AB. Bestäm orten för parablernas toppar. (I)

530. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem de (egentliga) kägelsnitt som tangera x- och y-axlarna och för vilka linjen $x + y = a$ är en styrlinje. Bestäm orten för den motsvarande brännpunkten. Av vad slag äro kägelsnitten? (I)

531. Genom punkten $P(p, q)$, som ligger inom ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, dragas två räta linjer parallella med koordinataxlarnas bissektriser. Man betraktar de kägelsnitt som gå genom de fyra punkter, där linjerna genom P skära ellipsen. Var ligga centra till dessa kägelsnitt, när de äro ellipser? (I)

532. En ellips med halvaxlarna a och b ($a > b$) rör sig i sitt plan så att lillaxelns ändpunkter ständigt befinna sig på var sin av två vinkelräta axlar Ox och Oy. Därvid beskriva ändpunkterna två slutna kurvor. Bestäm dessa kurvor och beräkna arean av det gemensamma område de begränsa. (I)

533. Man betraktar två parabelsystem: Parablerna (P) i det ena systemet ha parametern p och parallella axlar samt tangera en given rät linje L; parablerna (Q) i det andra systemet ha parametern q och parallella axlar samt tangera en annan rät linje L'. Axlarna i det förra parabelsystemet stå vinkelrätt mot axlarna i det senare. Parablerna P och Q variera så att deras fyra skärningspunkter ständigt ligga på ett centralt kägelsnitt av givna dimensioner. Bevisa att kägelsnittets centrum därvid beskriver en rät linje. (I-II)

534. Man betraktar de kägelsnitt med centrum i origo och likriktade axlar, som ha en given rät linje L som normal. Visa att orten för polerna till L med avseende på dessa kägelsnitt är en parabel, vars axel är vinkelrät mot linjen L. (II)

535. Två kägelsnitt äro givna: K med ekvationen i homogena koordinater $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$, och K' med ekvationen $f(x, y, z) = 0$, där även f är en kvadratisk form. Låt T vara en tangent till K och låt P vara polen till T med avseende på K'. Framställ ortkurvans ekvation i determinantform. (II)

536. Bestäm orten för centra till de cirklar som i två reella punkter tangera (A) ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ $(a > b)$, (B) hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, (C) parabeln $y^2 - 2px = 0$. (I)

537. En triangel T har ett fast hörn i punkten $(0, b)$ och två variabla på cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$. Man betraktar den cirkel som är omskriven kring T. Bestäm den geometriska orten för dess centrum. (I-II)

538. Var ligga centra till de cirklar som i fyra distinkta reella punkter skära (A) ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ $(a > b)$, (B) hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ så att alla fyra skärningspunkterna ligga på en och samma gren, (C) parabeln $y^2 - 2px = 0$. (II)

539. Man betraktar de ellipser som kunna inskrivas i en given rektangel. Visa att de fyra punkter i vilka två av dessa ellipser skära varandra äro hörnpunkter i en parallellogram, vars sidor äro parallella med rektangelns diagonaler. (II)

540. Låt K och K' vara två givna kägelsnitt, godtyckligt placerade i förhållande till varandra. I K' drages alla möjliga par av konjugatdiametrar och genom en godtyckligt vald punkt O på K dragas linjer, parallella med dem. Låt A och B vara de punkter, där ett sådant par ånyo skär K. Bevisa att räta linjen genom AB går genom en fast punkt. (II)

541. På linjen $x = \lambda$, som ligger utanför ellipsen $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, tages två punkter P_1 och P_2, som äro konjugerade med avseende på ellipsen men i övrigt godtyckliga. Visa att det i xy-planet finnes två fasta punkter Q och Q', från vilka linjestycket P_1P_2 alltid synes under rät vinkel. Visa även att Q och Q' ligga på en hyperbel, när λ varierar. (Rätvinkliga koordinater.) (II)

542. En cirkel med variabel radie tangerar en given ellips utantill i en fix punkt. Visa att skärningspunkten mellan ellipsens och cirkelns gemensamma variabla tangenter ligger på en hyperbel, som är koncentrisk med ellipsen och har likriktade axlar. (II*)

543. Bestäm den relation som måste finnas mellan abskissorna x_1 och x_2 för två punkter M_1 och M_2 på parabeln (Q): $x^2 = 2py$, för att kordan M_1M_2 skall tangera parabeln (P): $y^2 = 2px$. Visa med hjälp härav att det finnes oändligt många trianglar som äro inskrivna i Q och vilkas sisdor äro tangenter till P. (II)

544. Uppskriv den relation som måste finnas mellan ordinatorna y_1 och y_2 för två punkter M_1 och M_2 på parabeln (Q): $y^2 = 4a(x - a)$ för att tangenterna i M_1 och M_2 må skära varandra på cirkeln (C): $x^2 + y^2 = r^2$. Bestäm med hjälp härav villkoret för att det skall finnas oändligt många trianglar som äro inskrivna i C och vilkas sidor äro tangenter till P. (II)

545. Låt $M(t)$ och $M'(t')$ vara två punkter på ellipsen

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \tag{E}$$

Uppskriv den relation som måste finnas mellan t och t', för att ellipstangenterna i M och M' må skära varandra på cirkeln (C): $x^2 + y^2 = r^2$. Bestäm med hjälp härav villkoret för att det skall finnas oändligt många i C inskrivna trianglar, som äro omskrivna kring E. (II)

546. Vilkn är den största trangel som kan inskrivas i en given ellips, när triangeln har ett hörn i en av ellipsens toppar? (I)

547. I en likbent triangel med basen $2a$ och höjden h mot basen inskrives en ellips, som tangerar basen i dess mittpunkt. Visa att en av ellipsens axlar faller utefter höjden. Välj ellipsen så att dess area blir maximum. Beräkna denna area och ellipsens halvaxlar som funktioner av a och h. (II)

548. Sök den största triangel ABC som kan inskrivas i ellipsen

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

när punkten $C(X, Y)$ är given. Beräkna maximiarean och bestäm koordinaterna för A och B som funktioner av X, Y, a och b. (I-II)

549. I en ellips med halvaxlarna a och b ($a > b$) är inskriven en triangel med en sida av längden $2s$. Sök största möjliga värdet av triangelns area. Diskussion för olika värden på $2s < 2a$. (I-II)

550. Bestäm de i en ellips med halvaxlarna a och b inskrivna trianglar som ha en sida parallell med en given riktning och vilkas area är maximum. Beräkna maximiarean och konstruera motsvarande trianglar. (I-II)

551. Man betraktar allla i ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ inskrivna trianglar, som ha en given vinkel α och ett av vinkelbenen parallellt med y-axeln. Sök maximum av dessa trianglars areor. (I-II)

552. I ett cartesiskt koordinatsystem med axelvinkeln θ lägges en ellips genom punkterna $(2a,\ 0)$, $(0,\ 2b)$ och origo. Bestäm ellipsens ekvation, när dess area är minimum, och beräkna minimiarean. (II)

553. Låt $A\,(a,\ 0)$ och $B(0,\ b)$ vara punkter i ett cartesiskt koordinatsystem med axelvinkeln θ och där O är origo. I triangeln OAB inskrives en ellips. Bestäm ellipens ekvation, när dess area är maximum, och beäkna maximiarean. (II)

554. Bevisa satserna:

(A) (A) Om en triangel av arean T är inskriven i en ellips av arean E, så är $\dfrac{T}{E} \leq \dfrac{\sqrt{27}}{4\pi}$.

(B) (B) Om en triangel av arean T är omskriven kring en ellips av arean E, så är $\dfrac{T}{E} \geq \dfrac{\sqrt{27}}{4\pi}$. (II)

555. Man betraktar alla kring ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ omskrivna trianglar vilkas area är minimum. Bestäm den kurva på vilken triangelhörnen ligga. (II)

556. Man betraktar alla i ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ inskrivna trianglar vilkas area är maximum. Bestäm den kurva som envelopperas av sidorna i dessa trianglar. (II)

557. Sök den största triangel som är inskriven i ellipsen (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ och sådan att en av dess sidor (eller dess förlängning) går genom en given punkkt $P(\xi,\eta)$. Beräkna maximiarean och angiv huru motsvarande triangel konstrueras. Diskussion för olika lägen av punkten P. (II)

558. Vilka fyrhörningar, inskrivna i ellipsen $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, ha den största arean? Visa att sidorna i dessa fyrhörningar enveloppera en och samma kurva. Vilken? (II)

559. Ellipsen (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ och hyperbeln (H): $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=1$ ha samma brännpunkter. Man betraktar alla ellipser med centrum i origo som tangera E och H i två punkter på vardera kurvan. Visa att tangenterna i dessa punkter ständigt bilda en rektangel. Sök maximum av denna rektangels area. (II)

560. Vilken är excentriciteten e för den största ellips som är inskriven i en cirkelkvadrant så att den tangerar kvadrantens omkrets i fyra punkter? (I-II)

561. Beräkna maximi- och minimiarean av en cirkelkvadrant som är omskriven kring en ellips med halvaxlarna a och b $(a\geq b\sqrt{3})$. (II)

562. Bestäm längden av den minsta korda i ellipsen $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ $(a\geq b)$ som är normal till kurvan. (I-II)

563. Bestäm i ellipsen $cx^2+y^2=c$ längderna av den största och av den minsta korda som tangerar cirkeln $x^2+y^2=c^2$. Diskussion förolika värden på c i intervallet $0<c<1$. (I-II)

564. Bestäm maximi- och minimilängderna av de kordor i ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$$

som gå genom en punkt på y-axeln med ordinatan Y. Diskussion för olika värden på Y. (I-II)

565. Man betraktar en sluten konvex kurva (C) med kontinuerligt varierande tangent samt två yttre punkter P och Q sådana att räta linjen PQ icke skär kurvan. Visa att det finnes två (och endast två) ellipser med brännpunkterna P och Q som tangeras av kurvan C, den ena ellipsen innantill i M_1 och en andra utantill i M_2. Låt M vara en variabel punkt på C: visa att summan $\overline{MP}+\overline{MQ}$ är maximun för $M=M_1$, minimum för $M=M_2$. (II)

566. Uppskriv ekvationen för den normal till parabeln $y^2=2px$ som avskär en korda av minsta möjliga längd. (I)

567. Beräkna minimiarean av de segment av parabeln $y^2 = 2px$, vilkas kordor äro normaler till parabeln. (I)

568. En parabel med den variabla parametern p är omskriven kring en likbent och rätvinklig triangel, vars kateter ha längden a. Låt α vara den vinkel parabelaxeln bildar med en av kateterna. Undersök hur p varierar med α i intervallet $[0, \pi]$. Bestäm sedan de parabler som som ha maximal parameter. (I-II)

569. Man betraktar alla i en parabel inskrivna trianglar av arean T. Sök minimum av sammanlagda arean av de båda parabelsegment som ligga utanför triangeln. (I-II)

570. En (egentlig) parabel tangerar koordinataxlarna och linjen

$$bx + ay - ab = 0$$

i ett rätvinkligt koordinatsystem. Uppskriv allmänna ekvationen för denna parabel med parabelaxelns vinkelkoefficient (m) som parameter. Bestäm koordinaterna för tangeringspunkterna som funktioner av m. Betrakta alla möjliga lägen av parabeln och beräkna minimum av sammanlagda arean av de båda parabelsegment som ligga utanför den av tangentkordorna bildade triangeln. (I-II)

Kontakt, envelopper m.m

571. En parabel, vars axel är parallell med y-axeln, har kontakt av 2:dra ordningen med cirkeln $x^2 + y^2 = 2$ i punkten $(1, 1)$. Uppskriv parabelns ekvation. (II)

572. Bestäm orten för centra till de liksidiga hyperbler vilkas axlar äro parallella med koordinataxlarna och som ha 3-punktsberöring med parabeln $y^2 = 2px$. (II)

573. Bestäm orten för centra till de liksidiga hyperbler som ha en kontakt av 3:dje ordningen med ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. (II)

574. Bestäm det kägelsnitt som har kontakt av 4:de ordningen med kurvan $y = x^3$ i punkten (ξ, η). Uppskriv kägelsnittets ekvation med ξ som parameter. (II)

575. Låt $M(\xi, \eta)$ vara en ordinär punkt på en given kurva (C) med ekvationen $y = f(x)$. Bestäm orten för centra till de ellipser vilkas axlar äro parallella med koordinataxlarna och som ha kontakt av 2:dra ordningen med kurvan C i punkten M. (II)

576. Bestäm kontaktordningen i punkten $(1, 1)$ mellan kurvorna

$$y^2 - 4x^3 + 3x^2 = 0 \quad \text{och} \quad 2y^3 - 6y^2 - 21y + 81x - 56 = 0. \qquad \text{(II)}$$

577. Låt M vara en fix punkt på ett givet (egentligt) kägesnitt. Visa att alla de liksidiga hyperbler som ha 3-punktskontakt med kägelsnittet i M gå genom en annan fix punkt P. (II)

578. En ellips (E) och en punkt P på E äro givna. Visa att det finnes i allmänhet tre (reella) oskulerande cirklar till E, som gå genom P, samt att man kan lägga en cirkel (C) genom P och de tre oskulationspunkterna. (II)

579. Låt $P(X, Y)$ vara en punkt på hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Visa att det finnes en och endast en (reell) cirkel som går genom P och oskulerar hyperbeln i en annan punkt. Bestäm oskulationspunktens koordinater ξ och η som funktioner av X och Y. (II)

580. Uppskriv ekvationen för en parabel som har 4-punktsberöring med ellipsen $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$. Visa, att man genom en godtyckligt vald punkt i planet kan lägga i allmänhet fyra sådana parabler (reella eller imaginära), varvid kontaktpunkterna ligga på två parallella räta linjer sådana att högst två av parablerna äro reella. (II)

581. Två kongruenta parabler med parametern p och vinkelräta axlar ha med varandra en kontakt av 2:dra ordningen. Beräkna arean av det område som begränsas av parablerna. (II)

582. Oskulerande cirkeln i punkten M på en given ellips skär ellipsen ytterligare i punkten M_1, oskulerande cirkeln i M_1 skär den i M_2 o.s.v. Var skall punkten M ligga för att M_n skall sammanfalla med M? (II)

583. Låt P vara en punkt sådan att de båda tangenter som från P kunna dragas till en given ellips (E) avskära ett stycke av given längd (s) på tangenten i en fix ellipspunkt A. Visa att orten för P är ett kägelsnitt, som har 4-punktsberöring med E i den till A diametralt motsatta punkten A'. (II)

584. I cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ dragas kordor parallella med y-axeln. Bestäm enveloppen till de cirklar som uppritas med dessa kordor som diametrar. Vilka av cirklarna ha reell kontakt med enveloppen? (II)

585. Man betraktar det system av cirklar som ha medelpunktsradierna i en given ellips som diametrar. Visa att enveloppen till dessa cirklar är ellipsens fotpunktskurva med avseende på centrum. (II)

586. Bestäm enveloppen till de cirklar som gå genom origo och ha sina centra på cirkeln $x^2 - 2ax + y^2 = 0$. (II)

587. Bestäm enveloppen till de cirklar som tangera x-axeln och ha sina centra på kurvan $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. (II)

588. Man betraktar alla parabler som ha sina brännpunkter på x-axeln och som gå genom punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Bestäm enveloppen till dessa parablers axlar. (II)

589. Man betraktar alla parabler som gå genom origo och ha styrlinjen $x = a$. Huru begränsas den del av planet inom vilken parablerna ligga? (II)

590. Bestäm enveloppen till de kordor i cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ som från punkten $(c, 0)$ synas under rät vinkel. Diskussion för olika värden på c. (II)

591. Bestäm inflexionspunkterna på kurvan $y \tan x - x = 0$ samt inflexionstangenterna. Visa att dessa äro tangenter till en parabel. Vilken? (II)

592. På styrlinjen till en given parabel ligger medelpunkten till en given cirkel. Låt P vara en punkt på parabeln och låt L vara polaren till P med avseende på cirkeln. Bestäm enveloppen till L, när P genomlöper parabeln. (II)

593. En cirkel (C) och ett kägelsnitt (K) äro givna. Låt P vara en punkt på K och låt L vara polaren till P med avseende på C. Sök enveloppen till L, när P genomlöper K. (II)

594. En kurva (C) med parameterframställningen $x = f(t)$, $y = g(t)$ är given.
   (A) Låt T vara en godtycklig tangent till C och låt P vara polaren till T med avseende på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Orten för P är en kurva C'. Bestäm koordinaterna för en punkt på C' som funktioner av t.
   (a) (B) Låt P vara en godtycklig punkt på C och låt L vara polaren till P med avseende på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Enveloppen till L är en kurva C''. Bestäm koordinaterna för en punkt på C'' som funktioner av t.

(II)

595. Bestäm enveloppen till kägelsnittet

$$(a + 1)x^2 + ay^2 + (2a + 1)xy - ax - a^3 = 0,$$

när parametern a varierar. (II)

596. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem alla rätvinkliga trianglar ABC sådana att hypotenusan $\overline{CA} = 4a$ ligger på x-axeln, under det att vinkelspetsen A ständigt befinner sig på y-axeln; dessa trianglar bilda ett enparametrigt system. Välj som parameter vinkeln $ABC = t$ och bestäm enveloppen till sidan AB. (II)

597. Man betraktar de parabler som i origo ha en kontakt av (minst) 2:dra ordningen med cirkeln $x^2 + y^2 - 8ax = 0$. Visa att enveloppen till dessa parablers axlar är den trespetsiga hypocykloid som genereras av en punkt P på en cirkel med radien a, när denna cirkel rullar på insidan av cirkeln $(x - a)^2 + y^2 = 9a^2$ och punkten P ursprungligen befinner sig i $(4a,\ 0)$. (II)

598. Uppskriv allmänna ekvationen för de parabler som ha 3-punktsberöring med cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ i ena ändpunkten av en variabel diameter och som gå genom dennas andra ändpunkt. Bestäm enveloppen till dessa parablers axlar. (II)

599. Bestäm villkoret för att den räta linjen $y = mx + k$ må vara tangent till kurvan $27y^2 = 4x^3$. Sök sedan geometriska orten för en punkt varifrån man till kurvan kan dra två tangenter, parallella med två konjugatdiametrar till kägelsnittet $x^2 + y^2 + 2axy = C$. (II)

600. Betrakta cissoiden $f(x, y) = x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ och låt $P(x_0,\ y_0)$ vara en sådan punkt att $f(x_0, y_0) \neq 0$. Visa att det genom P går exakt tre (reella eller imaginära) tangenter till kurvan. Om M_1, M_2 och M_3 äro tangeringspunkterna och O är origo, uppskriv då den tredjegradsekvation i t, vars rötter äro vinkelkoefficienterna för OM_i ($i = 1,\ 2,\ 3$). Bestäm den cirkel (C) som går genom M_1, M_2 och M_3. Visa att punkten P ligger inom C, när alla tre tangenterna äro reella. (II)

601. En cirkel går genom brännpunkten till parabeln $y^2 = 2px$. Bestäm geometriska orten för cirkelns centrum (C), när cirkeln och parabeln tangera varandra. Bestäm även orten för C, när

cirkeln och parabeln skära varandra i fyra reella distinkta punkter, i fyra imaginära resp. i två reella distinkta och två imaginära punkter. (II)

602. Om man i fjärdegradsekvationen

$$f(z) = (x-1)z^4 + (x-4)z^2 + 2yz + 2x - 4 = 0$$

betraktar x och y som koordinater för en punkt i planet och z som en parameter, representerar den ett system räta linjer. Sök enveloppen till dessa linjer och konstruera den med angivande av inflexionstangenterna. Bestäm sedan antalet reella och distinkta tangenter som kunna dragas till enveloppen från en punkt $P(x,\ y)$, när denna befinner sig i olika områden av planet. Angiv slutligen med hjälp härav nödvändiga och tillräckliga villkoren för att ekvationen $f(z) = 0$ må ha fyra reella och distinkta rötter. (II)

603. (A) Visa att kurvan $y^2 = x^3 + x^2$ har en enda singulär punkt (dubbelpunkt med reella tangenter). Låt M vara en ordinär kurvpunkt på ändligt avstånd och $\neq (-1,\ 0)$. Tangenten i M skär kurvan i en punkt M_1, tangenten i M_1 skär kurvan i M_2 o.s.v. Visa att gränsläget för den så erhållna n:te punkten M_n är kurvans dubbelpunkt, när $n \to \infty$.
(B) Visa detsamma för kurvan $x^3 + y^3 = 3axy$, då M är en ordinär kurvpunkt på ändligt avstånd och $\neq \left(\frac{3a}{2},\ \frac{3a}{2}\right)$. (II)

604. Visa att kurvan $xy^2 - (x+y)^2 = 0$ har en enda singulär punkt (spets) och en enda inflexionspunkt. Låt M vara en annan ordinär kurvpunkt på ändligt eller oändligt avstånd. Tangenten i M skär kurvan i en punkt M_1, tangenten i M_1 skär kurvan i M_2 etc. Visa att gränsläget för den sålunda erhållna n:te punkten M_n är kurvans spets, när $n \to \infty$. Från punkten M kan en tangent dragas till kurvan: låt M' vara tangeringspunkten. Från M' kan en tangent dragas med tangeringspunkten M'' etc. Visa att gränsläget för den sålunda erhållna n:te punkten $M^{(n)}$ är kurvans inflexionspunkt, när $n \to \infty$. (II*)

605. Konstruera kurvan $y^2 = x^3 - x^2$ och bestäm inflexionspunkterna. Visa att mot varje värde på vinkeln $u = \arctan \frac{x}{y}$ i intervallen $-\frac{1}{2}\pi < u < 0$ och $0 < u \leq \frac{1}{2}\pi$ svarar en bestämd kurvpunkt P på ändligt avstånd, och vice versa om man bortser från en enda punkt (vilken?). Vinkeln u kallas för *argumentet* till punkten $P(x, y)$, som då betecknas med $P(u)$. Visa att nödvändiga och tillräckliga villkoret för att tre kurvpunkter med argumenten u_1, u_2 och u_3 ligga i rät linje är: $u_1 + u_2 + u_3 = k\pi$, där k är ett helt tal. Den punkt, där tangenten i $P(u)$ ånyo råkar kurvan, kallas för *tangentialpunkten* till $P(u)$. Låt P_1 vara tangentialpunkten till $P(u)$, P_2 tangentialpunkten till P_1 etc. och slutligen P_n tangentialpunkten till P_{n-1}. Bestäm argumentet till $P(u)$ så att P_n sammanfaller med $P(u)$. Betrakta speciellt fallen $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ och 8; bestäm antalet olika tangentialpunktspolygoner. (II*)

606. I ett cartesiskt koordinatsystem, där O är origo, äro punkterna $A\,(a,\ 0)$ och $B\,(0,\ b)$ givna, likaså linjen (L): $ux + vy + w = 0$. Låt P och Q vara två variabla punkter på L och betrakta de båda systemen av kägelsnitt K och K' som samtliga gå genom P och Q, under det att kägelsnitten K tangera x-axeln i A och kägelsnitten K' y-axeln i B. Av räta linjen OP skäras K och K' ytterligare i M resp. M', och av räta linjen OQ skäras de i N resp. N'. Visa att räta linnjerna

MN och $M'N'$ gå genom varsin fasta punkt $A_1\,(a_1,\,0)$ resp. $B_1\,(0,\,b_1)$. Genom att i ovanstående definition av K och K' ersätta punkterna A och B med A_1 och B_1 erhålles på samma sätt två nya punkter $A_2\,(a_2,\,0)$ och $B_2\,(0,\,b_2)$. Detta förfarande upprepas ett godtyckligt antal gånger. Bestäm a_n och b_n samt gränsläget av räta linjen A_nB_n när $n \to \infty$. Visa att detta erhålles genom att förbinda origo med skärningspunkten mellan räta linjerna AB och L. (II)

607. Bestäm den evolvent (E) till cirkeln (C): $x^2 + y^2 = 1$ som går genom punkten $(1,\,0)$. Huru många reella normaler kunna dragas till E från en given punkt P? (II)

608. Låt ABC vara en liksidig triangel med sidan $2c$. I hörnpunkterna A, B och C sättas stift, och omkring alla dessa lägges en sluten tråd av längden $2kc$ ($k > 3$). Ett ritstift D föres ett varv runt triangeln så att tråden alltjämt hålles spänd av D och två eller tre av stiften A, B och C. Därvid beskriver D en sluten kurva. Har denna kurva kontinuerligt varierande tangent? Har den kontinuerlig krökningsradie? (I-II)

Geometriska orter; kurvdiskussion

609. Låt T vara en godtycklig tangent till kurvan $y = x^3$ och låt P vara polen till T med avseende på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Bestäm geometriska orten för P. (I)

610. Cirkeln C med ekvationen $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ tangeras i origo av en annan cirkel (C'). Bestäm orten för skärningspunkten mellan tangenten i en punkt M på C och polaren till M med avseende på C'. (I)

611. Punkterna $A\,(a,\,0)$ och $A'\,(-a,\,0)$ samt linjen (L): $y = c$ äro givna i ett rätvinkligt koordinatsystem. Bestäm orten för brännpunkterna till de parabler som ha kordan AA' och tangenten L. Diskutera ortkurvan. (I)

612. Man betraktar alla cirklar som tangera x-axeln i origo och till vilka tangenter kunna dragas från punkten $(a,\,a)$ i 1:sta kvadranten av ett rätvinkligt koordinatsystem. Sök orten för tangeringspunkterna. Bestäm ortkurvans högsta och lägsta punkter, ävensom eventuella asymptoter och singulära punkter. (I)

613. Två räta linjer, som ursprungligen sammanfalla med x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, börja samtidigt rotera i positiv led, den ena omkring origo med vinkelhastigheten ω, den andra omkring punkten $(a,\,0)$ med vinkelhastigheten 3ω. Bestäm orten för deras skärningspunkt och diskutera ortkurvan. Asymptoter? Singulära punkter? Beräkna arean av den slinga som kurvan gör. (I)

614. Två punkter, som ursprungligen ligga i $(a,\,0)$, börja samtidigt röra sig på cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$. Den ena roterar i positiv led med vinkelhastigheten 2ω, den andra i negativ led med vinkelhastigheten ω. Bestäm orten för mittpunkten av den korda som förenar dem. Konstruera ortkurvan och beräkna arean av de områden som den omsluter. (I)

615. En parabel med parametern p rör sig i 1:sta kvadranten av ett rätvinkligt koordinatsystem så att den ständigt tangerar x- och y-axeln. Bestäm den kurva som brännpunkten därvid

beskriver. Beräkna arean av det område som ligger mellan ortkurvan och linjerna $x = \frac{1}{2}p$, $y = \frac{1}{2}p$. (I)

616. Man betraktar alla kordor av längden $2a$ i parabeln $x^2 = 2py$. Bestäm geometriska orten för deras mittpunkter och diskutera den för olika värden på a. Bestäm arean av det område som ligger mellan ortkurvan och parabeln. (I)

617. Låt F och F' vara brännpunkterna i ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ $(a > b)$. Bestäm och diskutera geometriska orten för höjdernas skärningspunkt i triangeln $FF'M$, när punkten M genomlöper ellipsen. Beräkna arean (A) av det slutna område som ortkurvan begränsar samt volymen (V) av den rotationskropp som uppstår, när motsvarande figur roterar omkring x-axeln. (I)

618. Bestäm orten för centra till de liksidiga hyperbler som gå genom punkten $(a, 0)$ ch tangera cirkeln $x^2 + y^2 = c^2$ i två punkter $(a > c)$. Skriv ortkurvans ekvation i polära koordinater. Beräkna för $a = c\sqrt{2}$ areorna A_1 och A_2 av det största och det minsta av de slutna områden som kurvan begränsar. (I)

619. M är en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 - ax = 0$; O är origo. Från M fälles perpendikeln MN mot x-axeln och från fotpunkten N perpendikeln NP mot OM. Bestäm orten för fotpunkten P och konstruera ortkurvan. När denna roterar kring x-axeln, uppstår en rotationskropp. Beräkna volymen. (I)
Har kurvan någon singulär punkt? Bestäm krökningsradien i origo. (II-III).

620. M är en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$; O är origo. Från M fälles perpendikeln MN mot x-axeln och från N perpendikeln NP mot OM. Sök orten för fotpunkten P och konstruera ortkurvan. När denna roterar kring x-axeln, uppstår en rotationskropp. Beräkna arean av dess buktiga yta. (I)
Undersök kurvans singulära punkt. Av vilken ordning och av vilket slag är den? (II-III)

621. En ellips med halvaxlarna a och b $(a \geq b)$ rör sig i 1:sta kvadranten av ett rätvinkligt koordinatsystem så att den ständigt tangerar x- och y-axeln. Bestäm orten för brännpunkterna och beräkna den av kurvan inneslutna arean. (I-II)

622. Låt K vara en korda av lillaxelns längd i ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a > b)$. Bestäm geometriska orten (C_1) för kordans mittpunkt. Beräkna arean (A_1) av det område som kurvan C_1 omsluter. Bestäm geometriska orten (C_2) för skärningspunkten mellan tangenterna i ändpunkterna av kordan K. Beräkna arean (A_2) av det område som begränsas av kurvan C_2 och dess närmaste asymptot. (I-II)

623. Man betraktar alla kägelsnitt som äro omskrivna kring en given rätvinklig triangel AOB och sådana att normalerna i A, O och B gå genom en och samma punkt P. Sök orten för P. Skissera ortkurvan och bestäm asymptoterna. (II)

624. Sök fotpunktskurvan till parabeln $y^2 = 4ax$ med avseende på punkten $P(a, a)$. Bestäm kurvans singulära punkt och härled en parameterframställning. Visa att kurvan har tre (reella) inflexionspunkter och att dessa ligger i rät linje. Diskutera kurvan. (II)

625. Den trespetsiga hypocykloiden

$$(H) \qquad x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$$

är given. Låt T vara en godtycklig tangent till H och låt P vara polen till T med avseende på cirkeln $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Sök orten för P. Framställ ortkurvan i polära koordinater; bestäm dess asymptoter och visa att den har tre inflexionspunkter, som ligga i rät linje. (II)

626. Låt M vara en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, låt O vara origo samt A och B projektionerna av M på x-axeln resp. på linjen $x = a$. Bestäm orten för skärningspunkten mellan räta linjerna AM och OB. Konstruera ortkurvan med angivande av extrem- och inflexionspunkter. Singulära punkter? Visa att kurvan begränsar ett slutet område vars area är lika med cirkelns. Huru många (reella) normaler kunna dragas till kurvan från cirkelns centrum? Bestäm deras vinkelkoefficienter. Beräkna arean av den största triangel som kan inskrivas i kurvan så att en hörnpunkt faller i origo. (II)

627. Cirklarna (C): $x^2 + y^2 - 4ax = 0$ och (C'): $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ skäras av en variabel rät linje (L) parallell med y-axeln. Sök och diskutera geometriska orten för mittpunkten av de stycken av L vilkas ena ändpunkt ligger på C och andra ändpunkt på C'. Undersök speciellt ortkurvans singulära punkt samt bestäm dess extrem- och inflexionspunkter. Beräkna den av kurvan inneslutna arean och volymen av den rotationskropp som uppstår, när kurvan roterar omkring x-axeln. (II)

628. Låt OA vara radie i cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ som bildar 60° vinkel med x-axeln. Genom A lägges en variabel korda AM och genom ändpunkten M drages parallellt med y-axeln en rät linje (L) som skär x-axeln i N. På L avsättes åt bägge hållen från N räknat styckena $\overline{NP} = \overline{NP'} = \frac{1}{2}\overline{AM}$. Sök och diskutera geometriska orten för P och P'. Bestäm ortkurvans extrem- och inflexionspunkter. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan. (II)

629. Två kongruenta parabler med parametern a, som ha sina toppar i punkterna $(\pm a,\ 0)$ vridas omkring dessa så att de i varje position skära varandra i fyra (reella eller imaginära) punkter som ligga på en cirkel. Visa att orten för dessa cirklars centra utgöres av tvenne pascalska snäckor med dubbelpunkterna $(0,\ -a)$ resp. $(0,\ a)$. (II)

630. M är en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$, som skär positiva x-axeln i A; O är origo. På OM som bas konstrueras en likbent triangel OMP med hörnpunkten P i sektorn AOM och sådan att vinkeln vid basen är en tredjedel av vinkeln mellan OA och OM. Bestäm orten för P. Konstruera ortkurvan med angivande av singulära punkter, asymptoter och extrempunkter. Det finnes ett slutet område som begränsas av kurvan. Beräkna dess area. (II)

631. Cirklarna (C): $x^2 + y^2 = a^2$ och och (C'): $x^2 + (y - 2a)^2 = a^2$ äro givna. Låt M vara en variabel punkt på C' och drag genom M en rät linje (L) parallell med y-axeln. Bestäm geometriska orten för skärningspunkten mellan L och polaren till M med avseende på C. Konstruera ortkurvan med angivande av singulära punkter, extrem- och inflexionspunkter. Kurvan är sluten; beräkna arean. (II)

632. Mot normalerna till ellipsen $x = 2\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$ fällas perpendiklar från brännpunkten $(1,\ 0)$. Sök orten för fotpunkterna. Uppskriv ortkurvans polynomekvation och undersök dess

singulära punkter. Bestäm minimum av x och visa huru extremvärdena av y erhållas. Framställ kurvan i polära koordinater och skissera den. (II)

633. Sök och diskutera geometriska orten för en punkt (P) sådan att de båda tangenter som från P kunna dragas till parabeln $y^2 = 2px$ tillsammans med en fix tangent bilda en triangel av den konstanta arean a^2. Bestäm ortkurvans inflexionspunkter. (II)

634. Man betraktar alla ellipser av excentriciteten e som äro omskrivna kring en triangel med hörnpunkterna $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ och $(0,\ 1)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Bestäm geometriska orten för centra till dessa ellipser. Diskutera ortkurvans singulära punkter och extremvärdena av y för olika värden på e. Skissera de olika kurvtyper som kan erhållas. (II)

635. Basen i en likbent triangel OBC har sina ändpunkter i origo O och punkten $B(a,\ 0)$, $a > 0$. Från O fälles perpendikeln OD mot BC och från fotpunkten D fälles perpendikeln DP mot OC. Bestäm och diskutera geometriska orten för fotpunkten P, när triangelns toppunkt C varierar, under det att basen ligger fast. Undersök speciellt ortkurvans singulära punkt och bestäm extrempunkterna. Beräkna arean av det område som kurvan begränsar. (II)

636. M är en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 - ax = 0$ $(a > 0)$ och M' är spegelbilden av M med avseende på x-axeln; O är origo. Bestäm och diskutera geometriska orten för fotpunkten P av den perpendikel som från M' fälles mot OM. Undersök speciellt ortkurvans singulära punkt och bestäm extrempunkterna. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår, när kurvan roterar omkring x-axeln. (II)

637. Normalen i en variabel punkt (M) på parabeln $y^2 = 2px$ skär x-axeln i N. Låt M' vara den till M med avseende på N symmetriska punkten. Från M' kan man då dra två andras normaler till parabeln. Låt A och B vara deras fotpunkter. Bestäm geometriska orten för skärningspunkten mellan räta linjerna AB och MM'. Diskutera ortkurvan med avseende på asymptoter, extrem- och inflexionspunkter. (II)
Har kurvan någon singulär punkt? I så fall av vilken ordning och av vilket slag? (II-III)

638. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem de hyperbler som tangerar x-axeln i punkten $(a,\ 0)$ och ha y-axeln som asymptot. Sök orten för hyperblernas toppar. Konstruera ortkurvan med angivande av extrempunkterna samt eventuella asymptoter och singulära punkter. När kurvan roterar kring x-axeln, uppstår för positiva x en sluten solid figur. Beräkna dess volym. (II)

639. Bestäm geometriska orten för skärningspunkten mellan två normaler till parabeln $y^2 = 2p(x + p)$ som skära x-axeln i två punkter med konstant inbördes avstånd (= a). Konstruera ortkurvan med angivande av dess singulära punkter, extrem- och inflexionspunkter. (II*)

640. M är en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$; O är origo. Från M fälles perpendikeln MN mot x-axeln, från fotpunkten N perpendikeln NQ mot OM och slutligen från fotpunkten Q perpendikeln QP mot MN. Bestäm orten för fotpunkten P. Konstruera ortkurvan med angivande av singulära punkter, extrem- och inflexionspunkter. Beräkna den av kurvan inneslutna arean. (II)

641. M är en variabel punkt på cirkeln $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, vars centrum är C; O är origo. Sök och diskutera geometriska orten för alla punkter (P) sådana att OP är parallell med CM och $\overline{OP} = \overline{OM}$. Undersök ortkurvans singulära punkter och bestäm extrempunkterna. Beräkna arean av den yta som kurvan genererar, när den roterar omkring x-axeln. (II)

642. En liksidig hyperbel med halvaxeln c rör sig så att den ständigt går genom punkterna $A\,(a,\ 0)$ och $A'\,(-a,\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem ($a > c$). Bestäm geometriska orten för hyperbelns centrum. Diskutera ortkurvan. (II)

643. Låt P vara en punkt på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Krökningscirkeln i P skär ellipsen i ännu en punkt M. Bestäm enveloppen till räta linjen PM ("krökningskordan"), när P beskriver ellipsen. Uppsök enveloppens singulära punkter och diskutera denna kurva. Av vilken grad är den? Beräkna arean av det envelopperade området. (II)

644. Genom punkterna $(a,\ 0)$ och $(-a,\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem dragas parallella linjer L och L', bildande vinkeln u med x-axeln. Sök enveloppen, när u varierar, till de cirklar som tangera L, L' och x-axeln. Enveloppen består, bortsett från x-axeln, av en sluten kurva. Av vilken grad är denna? Konstruera kurvan med angivande av singulära punkter och extrempunkter. Beräkna arean. (II)

645. Bestäm i polära koordinater geometriska orten för topparna till de parabler som ha fokus i origo och tangera cirkeln $r + 2a\cos v = 0$. Konstruera ortkurvan med hjälp av en parameterframställning i cartesiska koordinater. (II)
Uppskriv kurvans cartesiska polynomekvation och diskutera singulariteterna. (II-III)

646. En ellips (E) med halvaxlarna a och b ($a > b$) rör sig i sitt plan så att dess brännpunkter ständigt befinna sig på var sin sida av två vinkelräta axlar Ox och Oy. Bestäm geometriska orten för de punkter på E, där tangenten är parallell med Ox. Diskutera ortkurvan och beräkna areorna av de områden den omsluter. (II)

647. Bestäm i rätvinkliga koordinater ekvationen för en kurva med följande egenskaper: Kurvan skall gå genom punkten $(a,\ 0)$ och vara definierad för såväl positiva som negativa x och y. Om tangenten i en punkt M på kurvan skär y-axeln i A, så skall mittpunkten av sträckan AM ligga på ellipsen $4x^2 + y^2 = a^2$. Konstruera kurvan och beräkna arean av det område den omsluter. (II)

648. Bestäm i ett rätvinkligt koordinatsystem en kurva som går genom origo och har följande egenskap: om tangenten och normalen i en godtycklig punkt på kurvan skära x-axeln i T resp. N, så är avståndet TN konstant och lika med $2a$. Konstruera kurvan och beräkna arean av det område den omsluter. (II)

649. Bestäm ekvationen i rätvinkliga koordinater för en kurva som uppfyller följande villkor:

1:o krökningsradien i en godtycklig punkt på kurvan skall vara $= \dfrac{1}{4}|y|^3$.

2:o $\dfrac{dy}{dx} = 0$ för $y = \infty$.

3:o $x = 0$ för $y = 1$.

Diskutera kurvan. (II)

Algebraiska kurvor

650. Konstruera kurvan
$$r^2 = \frac{a^2}{\frac{1}{2} - \cos v}.$$
Bestäm asymptoterna och extremvärdena av r. Beräkna arean av det slutna område som kurvan begränsar. (I)

651. Konstruera kurvan
$$r = a\left(\sin\frac{v}{3}\right)^3.$$
Beräkna arean av det minsta område som kurvan omsluter. En rät linje genom origo skär kurvan i ytterligare tre reella punkter; visa att tangenterna i dessa punkter bilda en liksidig triangel. (I)

652. Konstruera kurvan
$$r = a(1 + \cos^3 v)$$
och beräkna arean av det område den omsluter. (I-II)

653. Konstruera kurvan
$$r = \frac{1}{\tan v - 1}.$$
Bestäm asymptoterna samt max. och min. av $y = r \sin v$. (I-II)

654. Bestäm asymptoterna till kurvan
$$r = \frac{\sin v}{2\cos v - 1}$$
och konstruera den. Beräkna arean av det slutna område som kurvan begränsar. (I-II)

655. Bestäm asymptoterna till kurvan
$$r = \frac{\sin 2v}{1 - \tan v}$$
och konstruera den. Av vilken grad är kurvan? Undersök dess singulära punkt. (I-II)

656. Konstruera kurvan
$$x = 2t(t^2 - 4), \quad y = (t^2 - 1)^2.$$
Bestäm extrempunkterna och eventuella dubbelpunkter. Beräkna arean av det minsta av de områden som begränsas av kurvan och x-axeln. (I)

657. Undersök kurvan
$$x = a \sin 2t, \quad y = a\left(\sqrt{2}\cos t - 1\right)^2$$
med avseende på singulära punkter, extrem- och inflexionspunkter. Beräkna arean av det område som kurvan omsluter. (II)

658. Konstruera kurvan
$$x = a\cos t, \quad y = a\big(\sin^4 t - \sin^5 t\big).$$
Bestäm singulära punkter, extrem- och inflexionspunkter. Beräkna arean av det område som kurvan omsluter. (II)

659. Uppsök de singulära punkterna på kurvan
$$x = t^3, \quad y = t^4 + t^2$$
och undersök dem. Bestäm inflexionspunkterna och konstruera kurvan. (II)

660. Uppsök de singulära punkterna på kurvan
$$x = a\sin 2t, \quad y = a\cos t\big(2\cos t - \sqrt{2}\big)$$
och undersök dem. Bestäm extrempunkterna och konstruera kurvan. (II)

661. Uppsök de singulära punkterna på kurvan
$$x = a\cos 3t, \quad y = a\sin 2t.$$
Bestäm extrem- och inflexionspunkter. Konstruera kurvan. (II)

662. Uppsök de singulära punkterna på kurvan
$$x = 2t\big(t^2 - 1\big)\big(2t^2 - 3\big), \quad y = 4\big(t^2 - 1\big)^2$$
och undersök dem. Huru många punkter har kurvan i origo? Bestäm extrempunkterna och konstruera kurvan. (II-III)

663. Uppsök de singulära punkterna på kurvan
$$x = at^2(1 - t^2), \quad y = at^4(1 - t)$$
och undersök dem. Bestäm även andra remarkabla punkter och konstruera kurvan. (II-III)

664. Man betraktar kurvor med parameterframställningen
$$x = at^3 + bt^2 + ct, \quad y = t^2.$$
Vilka villkor måste påläggas koefficienterna a, b och c, för att tangentens riktningscosiner må bli rationella funktioner av t? Visa att ekvationerna då representera ett enparametrigt system av likformiga och likställda kubiska kurvor. Tag c som parameter och betrakta speciellt den kurva (C) för vilken $c = 1$. Konstruera kurvan C och beräkna längden av den slinga som kurvan gör. Till C dragas två parallella tangenter med vinkelkoefficienten m. Uppskriv tangentkordans ekvation med m som parameter och bestäm kordans envelopp. (II)

665. Konstruera kurvan
$$(x + y)^2 = y(x^2 + y^2)$$
med angivande av eventuella singulära punkter, asymptoter, extrem- och inflexionspunkter. (II)

666. Om den kubiska kurvan

$$y^2 = x^3 - Ax - B$$

har inflexionspunkten (ξ, η), vilken relation måste då finnas mellan talen ξ och η för att kurvan skall ha en singulär punkt? Bestäm dennas koordinater som funktioner av ξ. Av vilken typ är den singulära punkten, när ξ och η är reella? (II)

667. Diskutera kurvan

$$y - \frac{1}{y} + a\left(x + \frac{1}{x} + 2\right) = 0,$$

där a är en positiv parameter. Bestäm asymptoter och extrempunkter. Visa att kurvan har tre inflexionspunkter på den gren som går genom origo. (II)

668. Bestäm asymptoterna till kurvan

$$(2y - x)(y + x)(y - 2x) - 3y(3x + 2) = 0$$

och visa att de skära kurvan i tre punkter som ligga i rät linje. Skissera kurvan. (II)

669. Konstruera kurvan

$$x(4x^2 + y^2 - 4) + 4y = 0.$$

Framställ extrempunkternas koordinater medelst radikaler. Visa att kurvan har tre reella inflexionspunkter, som ligga i rät linje. Bestäm inflexionstangenterna. (II)

670. Låt $L_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ vara ekvationerna för tre räta linjer som skära linjen $B = 0$ i tre punkter P_1, P_2 och P_3. Betrakta ekvationen

$$L_1 L_2 L_3 + kB^3 = 0, \qquad (1)$$

där k är en parameter. Antag först att punkterna P_i äro distinkta. Visa att ekvationen (1) då representerar alla kubiska kurvor med dessa punkter som inflexionspunkter och linjerna L_i som inflexionstangenter. Antag sedan att P_3 (men ej P_2) sammanfaller med P_1. Visa att ekvationen (1) då representerar alla kubiska kurvor med P_1 som singulär punkt och P_2 som inflexionspunkt; P_1 är dubbelpunkt med tangenterna L_1 och L_3, speciellt spets om dessa linjer sammanfalla. Vad representerar ekvationen, när alla punkterna P_i sammanfalla?
Exempel 1. Framställ i den föregående uppgift betraktade kurvan under formen (1).
Exempel 2. Uppskriv ekvationen för de kubiska kurvor som ha inflexionsasymptoten $x - 1 = 0$ och en spets i origo med x-axeln som spetstangent. Visa att de bilda ett knippe. (II)

671. Diskutera kurvan

$$xy^2 - ax + y - 3 = 0$$

med avseende på asymptoter och extrempunkterna samt antalet reella inflexionspunkter, när parametern a varierar. Skissera de kurvtyper som erhållas. (II)

672. Diskutera kurvan

$$(y + x)^3 + a^3x^3 + (y + 2x)^2 = 0,$$

där a är en reell parameter. För vilka värden på a har kurvan en (reell) asymptot? Uppskriv dess ekvation. När är den inflexionsasymptot? Skissera kurvan för $a = -2, -1, 0$ och 1. (II)

673. Visa att kurvan

$$x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + c = 0$$

har tre symmetriaxlar. Bestäm asymptoterna. Undersök vilka kurvtyper man får, när parametrarna a och c variera. (II)

674. Visa att ekvationen $x^4 + y^4 = a^2xy$ representerar en sluten kurva med axelbisektriserna som symmetriaxlar. Beräkna den inneslutna arean (t.ex. med hjälp av polära koordinater). Bestäm extremvärdena av x och y. Vrid det rätvinkliga koordinatsystemet 45° och låt (X, Y) vara en punkt på kurvan i det nya systemet. Bestäm extremvärdena av X och Y och skissera kurvan. (I)

675. Konstruera kurvan

$$x^4 + a^2y^2 - a^2xy = 0$$

och bestäm extrempunkterna. Beräkna arean av de områden kurvan omsluter samt volymen av den rotationskropp som uppstår, när kurvan roterar kring x-axeln. (I-II)

676. Konstruera kurvan

$$x^2 + (1 - y^2)^2 = 1$$

och angiv extrempunkterna. Bestäm de längsta kordorna genom origo. Beräkna arean av den största triangel som kan inskrivas i kurvan så att en hörnpunkt faller i origo och de båda andra ha positiva ordinator. (II)

677. Bestäm de värden på parametern c för vilka kurvan

$$\left(x^2 + y^2 - 5\right)^2 + 16c\left(x - 2\right) = 0$$

har en singulär punkt (på ändligt avstånd). Sätt c lika med det största av de erhållna värdena, bestäm den singulära punkten och angiv dess typ. Uppskriv kurvans ekvation i polära koordinater med den singulära punkten som pol och härled därav en parameterframställning av x och y. Bestäm extrem- och inflexionspunkter och skissera kurvan. Beräkna arean av det område den omsluter samt volymen av den rotationskropp som uppstår, när den roterar kring x-axeln. (II)

678. Konstruera kurvan

$$2y^2 + 4x^3 + 3x^4 - y^4 = 0.$$

Bestäm singulära punkter, asymptoter och extrempunkter. (II)

679. Konstruera kurvan

$$\left(x^2 - y^2 - 2x\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right).$$

Singulära punkter? Asymptoter? Inflexionspunkter? Visa att kurvan är unicursal (t.ex. genom att skära den med linjen $y = x \sin 2u$) och angiv en rationell parameterframställning. (II)

680. Konstruera kurvorna

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad y^4 - x^4 + 2x^2y - 4y^2 = 0, \\ &\text{(b)} \qquad (x^2 - y^2)^2 - x^2y(4y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Bestäm asymptoter och extrempunkter. Undersök kurvornas singulära punkter. (II)

681. Konstruera kurvorna

$$\text{(a)} \qquad (x^2 - y^2)^2 + xy^2 = 0,$$
$$\text{(b)} \qquad (x^2 - y)^2 - xy(2x^2 - y) = 0.$$

Bestäm asymptoterna och undersök singulariteterna. Visa att kurvorna äro unicursala (t.ex. genom att skära dem med parabeln $x^2 = ty$). Bestäm extrempunkterna. (II-III)

682. Konstruera kurvan

$$(x^2 - y)^2 - 2y^3 - y^4 = 0.$$

Bestäm asymptoterna och extremvärdena av y. Undersök singulariteten i origo. Visa att kurvan är unicursal (t.ex. via övergång till polära koordinater). (II)

683. Konstruera kurvorna

$$\text{(a)} \qquad y^4 - x^4 + 2x^2y = 0$$
$$\text{(b)} \qquad y^4 - x^4 - 4xy^2 + 5x^3 = 0.$$

Bestäm asymptoterna och undersök singulariteterna i origo. Beräkna eventuella maxima och minima av x. (II-III)

684. Låt P_1, P_2 och P_3 vara hörnpunkterna i en triangel, vars sidor ha ekvationerna $L_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Låt vidare ekvationen $K = 0$ representera ett kägelsnitt, som är omskrivet kring triangeln $P_1P_2P_3$. Låt slutligen $T = 0$ vara ekvationen för en rät linje, som skär kägelsnittet i Q_1 och Q_2 men som icke går genom någon av punkterna P_i. Visa att varje polynomekvation av formen

$$K^2 + kL_1L_2L_3T = 0,$$

där k är en parameter, representerar en fjärdegradskurva med P_1, P_2 och P_3 som singulära punkter och som tangeras av linjen $T = 0$ i punkterna Q_1 och Q_2. Vad inträffar, om linjen $T = 0$ går genom en av punkterna P_i? (II)

685. Bestäm de singulära punkterna på kurvan

$$(y^2 - 2x^2 - y)^2 - \frac{1}{2}(y + 1)(y^2 - x^2)(y - 2) = 0$$

och skissera den med angivande av extrempunkterna. (II)

686. Bestäm singulära punkter och extrempunkter på kurvan

$$(2x^2 - y^2 - y)^2 + (y - 1)(y^2 - x^2)(y - 3) = 0$$

och konstruera den. (II)

687. Bestäm singulära punkter och extrempunkter på kurvan

$$(x^2 + y)^2 + (y + 1)^2(y^2 - x^2) = 0$$

och konstruera den. (II)

688. Bestäm de singulära punkterna på kurvan

$$(xy - x - y)^2 - 4y(y-2)(y-x) = 0$$

och konstruera den med angivande av eventuella asymptoter. Visa att kurvan är unicursal, t.ex. genom att sätta $x = (t^2 - 1)y$. (II)

689. Bestäm de singulära punkterna på kurvan

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 + a(2x+1)\big((x-1)^2 - 3y^2\big) = 0,$$

diskutera extremvärdena av x och beskriv kurvans utseende för olika reella värden på parametern a. (II)

690. Konstruera kurvan

$$y^3(2x-1) + x^2 - x^4 = 0.$$

Bestäm eventuella asymptoter och singulära punkter. Diskutera extrem- och inflexionspunkterna. (II)

691. Bestäm asymptoterna till kurvan

$$(y^2 - 4x^2 + 2y + 1)(y^2 - x^2 - 2y + 1) + 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

och visa att de råka kurvan i åtta punkter som ligga på en cirkel. Bestäm de punkter, där y är maximum eller minimum, och visa att kurvan har en enda singulär punkt. Konstruera kurvan. (II)

692. Framställ kurvan

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + c(x^2 + y^2)^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

i polära koordinater r och v och visa att den har fyra symmetriaxlar. Angiv extremvärdena av r. Bestäm asymptoterna och undersök vilka kurvtyper man får, när den reella parametern c varierar. (II*)

693. Konstruera kurvan

$$(x^2 - 1)^3 + y^2 = 0.$$

Bestäm singulära punkter, extrem- och inflexionspunkter. Undersök huru krökningsradien R varierar med x. Visa att kurvans största korda går genom origo och beräkna dess längd; bestäm även de minsta kordorna genom origo. Visa att kurvan är unicursal och beräkna arean av det område den omsluter. (II)

694. Konstruera kurvan

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 - 4a^3x^2y = 0,$$

där $a > 0$. Bestäm de singulära punkterna. Diskutera extrem- och inflexionspunkter. (II)

695. Bestäm de singulära punkterna på kurvan

$$(x+1)(x^2 + y^2 + 2x)^2 - x(y^2 - x^2)\big(y^2 - (x+2)^2\big) = 0$$

och konstruera den. (II)

696. Diskutera kurvan

$$y^2 - 2x^2y - xy^2 + cx^5 = 0$$

med avseende på singulära punkter, sönderfall, asymptoter och extrempunkter, när den reella parametern c varierar. Konstruera kurvan för $c = -\frac{12}{125}$. (II)

697. Undersök kurvan

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = a(2n+1)x^n y^n$$

för udda och jämna n ($n \geq 1$, $a > 0$), speciellt med avseende på singulära punkter och asymptoter. Beräkna arean av det slutna område som kurvan begränsar. (II-III)

698. Undersök kurvan

$$(1 - x^2)^{\frac{2}{3}} + (1 - y^2)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Av vilken grad är den? Uppskriv dess polynomekvation och bestäm de singulära punkterna. Konstruera kurvan. (II-III)

699. Bestäm relationerna mellan de reella talen a, b och c, när den kubiska kurvan

$$x^3 + y^3 + ax^2 + bxy + cy^2 - 27 = 0$$

degenererar. Visa att den då sönderfaller i en rät linje och en ellips. Beräkna arean av ellipsen, när denna är reell. (II)

700. Undersök om kurvan

$$f(x, y) = 2y^3 - 3xy^2 + 3x^2 + xy - 2y^2 = 0$$

har någon singulär punkt; konstruera kurvan. (II)

701. Visa att kurvan

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$$

sönderfaller, genom att bestämma dess singulära punkter. Uppskriv komponenterna. (II)

702. Sök en parameterframställning av kurvan

$$(a^2 - x^2)^2 + (a^2 - y^2)^2 - a^4 = 0$$

och konstruera den. Beräkna arean av det största område som kurvan begränsar samt volymerna V_1 och V_2 av de rotationskroppar som uppstå, när detta område roterar kring x-axeln, resp. kring linjen $y = x$. (II)

703. Bestäm parametern c så att kurvan

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + c = 0$$

får fyra singulära punkter. Visa att den då sönderfaller i två kägelsnitt, reella eller imaginära. (II)

704. Framställ kurvan

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 = 0$$

i polära koordinater och visa att den sönderfaller. Uppskriv komponenternas ekvationer i rätvinkliga koordinater. Visa att kurvan har exakt fyra reella (och singulära) punkter. (II)

705. Uppskriv i rätvinkliga koordinater ekvationen för en kubisk kurva som har spets i origo, asymptoten $x - 1 = 0$, $y_{\min}$ i punkten $(4,\ 4)$ och som går genom punkten $(1,\ -\frac{1}{2})$. (II)

706. Man betrakta alla kubiska kurvor med följande egenskaper:
1:o de ha en spets i origo med linjen $x + y = 0$ som spetstangent;
2:o de ha asymptoten $x - 1 = 0$, under det att en annan asymptot är parallell med x-axeln.
Visa att dessa kurvor tillhöra ett knippe och uppskriv dess ekvation med den tredje asymptotens vinkelkoefficient som parameter. Bestäm enveloppen till denna tredje asymptot. (II)

707. Man betraktar alla kubiska kurvor som ha spets i origo samt asymptoterna $x - 1 = 0$ och $y - 1 = 0$. Visa att de bilda ett enparametrigt system och uppskriv deras ekvation med spetstangentens vinkelkoefficient som parameter. Visa att varje kurva i systemet har en och endast en inflexionspunkt; bestäm och diskutera orten för denna. (II)

708. Man betraktar alla kubiska kurvor med singulär punkt som ha asymptoterna $x = 0$, $y = 0$ och $x + y - 2 = 0$ och som gå genom punkten $(2,\ 2)$. Bestäm och konstruera orten för den singulära punkten. Visa att denna alltid är en dubbelpunkt med reella och distinkta tangenter. (II)

709. Man betraktar alla fjärdegradskurvor med y-axeln som symmetriaxel och de singulära punkterna $(0,\ 0)$ och $(1,\ -1)$, av vilka den senare är en spets med spetstangenten $x - 1 = 0$. Visa att dessa kurvor tillhöra ett knippe. Bestäm den kurva som går genom punkten $(2,\ 0)$ och skissera den med angivande av extrempunkterna. (II)

710. Visa att det finnes en och endast en fjärdegradskurva med spets som har de fyra linjerna $y \pm 1 = 0$ och $y \pm x - 1 = 0$ som inflexionsasymptoter. Bestäm denna kurva och skissera den. (II)

711. Uppskriv ekvationen i rätvinkliga koordinater för en fjärdegradskurva som uppfyller följande villkor:
1:o skall den ha y-axeln som symmetriaxel och skära denna för $y = 2$;
2:o skall den i origo ha tre distinkta tangenter, av vilka en har ekvationen $y = x\sqrt{3}$;
3:o skall den ha asymptoten $y - x + 1 = 0$.
Visa att endast en sådan kurva finnes och verifiera resultatet. Visa att kurvan av sina asymptoter skäres i fyra (reella) punkter som ligga på en cirkel. Skissera kurvan. (II)

712. Man betraktar alla fjärdegradskurvor med följande egenskaper:
1:o de ha linjerna $x + 1 = 0$, $y + x - 1 = 0$ och $y - x + 1 = 0$ som asymptoter;
2:o de ha i origo en snabelspets med x-axeln som spetstangent.
Visa att det genom punkten $(0,\ 1)$ går en och endast en sådan kurva och bestäm denna. Verifiera resultatet, bestäm den fjärde asymptoten och skissera kurvan. (II-III)

713. Uppskriv allmänna ekvationen för en algebraisk kurva av lägsta gradtal, som har de tre symmetriaxlarna $y = 0$, $y = \pm x \tan \frac{2\pi}{3}$. Diskutera denna kurva. (II)

714. Uppskriv allmänna ekvationen för en algebraisk kurva av lägsta gradtal, som har de fem symmetriaxlarna $y = 0$, $y = \pm x \tan \frac{2\pi}{5}$, $y = \pm x \tan \frac{4\pi}{5}$, som är unicursal och som går genom punkten $(a, 0)$. Bestäm asymptoterna och skissera kurvan. (II)

Rymdgeometri

715. Visa att det alltid finnes ett plan på vilket en given triangel (med sidorna a, b, c) projiceras ortogonalt som en liksidig triangel. Beräkna dennas area som funktion av a, b och c. (II)

716. I xy-planet av ett rätvinkligt koordinatsystem i rymden ligger kurvan $x^3+y^3 = 3xy$. Visa att det finnes ortogonal koordinattransformation av $x = x(X, Y, Z)$, $y = y(X, Y, Z)$, $z = z(X, Y, Z)$, sådan att kurvans projektion på det nya XY-planet får ekvationen
$$Y^2 = \frac{9X^2(1-X)}{2(1+3X)}. \qquad \text{(II)}$$

717. Ytan $x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2bxz + 2cyz = 1$ skäres av planen $y = x$, $x = z$ och $z = y$ efter liksidiga hyperbler. Beräkna med ledning härav konstanterna a, b och c. (II)

718. En rät linje (L) rör sig i rymden så att den ständigt skär var och en av de tre räta linjerna $x+1 = 0$, $y = 0$; $y = 1$, $z = 1$; $z = 1$, $x = 0$. Skärningspunkten mellan L och planet $x+y+z = 0$ beskriver därvid en viss kurva. Vilken är denna? (II)

719. Paraboloiden $x^2 + y^2 = 2pz$ skäres av ett plan, som bildar vinkeln γ med z-axeln. Visa att skärningslinjen är en ellips och bestäm dess excentricitet e.

720. Låt P vara en punkt i det inre av paraboloiden $x^2 + y^2 = 2pz$. Visa att man genom P kan lägga två plan sådana att P blir brännpunkt i bägge snittellipserna. Uppskriv den andragradsekvation som representerar dessa plan. Man kan anta $P = (x_0, 0, z_0)$. (II)

721. Man betraktar två långsträckta sfäroider, som ha en gemensam brännpunkt. Visa att om ytorna skära varandra så består skärningen av en enda (reell) ellips. (II)

722. Två rotationskoner ha parallella axlar men skilda toppar och olika genererande vinklar. Visa att de skära varandra efter en kurva, vars projektion är en parabel på det plan som går genom axlarna. (II)

723. Man betraktar i ett rätvinkligt koordinatsystem två rotationskoner, vilkas axlar äro parallella med z-axeln; den ena har toppen i origo och genererande vinkeln 45°, den andra har toppen i punkten (3, 0, 5) och genererande vinkeln 60°. Sök och diskutera ekvationen för skärningslinjens projektion i xy-planet. Bestäm projektionskurvans extrempunkter. (II)

724. Genom en punkt O på skärningslinjen mellan två givna plan dragas två mot varandra vinkelräta linjer OA och OB, en i vardera planet. Sök geometriska orten för normalen i O till planet

OAB. (II)

725. Bestäm de andragradsytor som äro så beskaffade att kvadraterna på avstånden från en godtycklig punkt på ytan till linjerna $z = 0$, $x = 1$ och $y = 0$, $x = -1$ stå till varandra i det konstanta förhållandet k ($k > 0$). Betrakta fallen $k \neq 1$ och $k = 1$. (II)

726. Vilken yta genereras av en rät linje som går genom parabeln $x^2 - 2pz = 0$, $y = 0$ och som ständigt skär linjen $x + y = 0$, $z = 0$ vinkelrätt? (II)

727. Sfärerna (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ och (S_2): $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2$ äro givna. En variabel sfär, vars medelpunkt rör sig på ett givet plan, skär S_1 ortogonalt och tangerar S_2. Visa att orten för tangeringspunkten är en cirkel. (II)

728. Parallella ljusstrålar infalla i en öppen skål, vars inre (icke speglande) begränsningsyta är en halvsfär. Visa att gränslinjen mellan ljus och skugga på denna yta är en halvcirkel. Beräkna för given infallsvinkel den del av skålens volym som ligger i skugga. (II)

729. Genom de punkter, där konen $x^2 + y^2 - nz^2 = 0$ skäres av planet $z = m(x - a)$, dragas normaler till konen. Sök orten för de punkter, där dessa normaler för andra gången träffa konen. (II)

730. En sfär med centrum i origo och radien r skäres av ett plan genom z-axeln. Man betraktar polaren med avseende på snittcirkeln till den punkt, där linjen $x = a$, $z = b$ skär planet. Vilken yta genereras av denna polar, när planet roterar kring z-axeln? (II)

731. Betrakta det system av plan som i rätvinkliga koordinater representeras av ekvationen $u^3 + 3u^2x + 3uy + z = 0$, där u är en variabel parameter. Genom varje punkt $M(x, y, z)$ i rymden gå tre av dessa plan (reella eller imaginära, distinkta eller sammanfallande). Bestäm orten för en punkt M genom vilken gå reella plan, av vilka två stå vinkelrätt mot varandra. (II-III)

732. Sök orten för centra till de sfärer som tangera linjerna $x + y = 0$, $z = 2$ och $x - y = 0$, $z = -2$. Visa att denna ort är en regelyta och bestäm dess rätliniga generatriser. (II-III)

733. I ett rätvinkligt koordinatsystem, där O är origo, äro givna konen (K): $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ och linjen (L): $\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} = \dfrac{z - z_0}{w}$. Bestäm orten för en punkt M sådan att det plan som går genom L och M står vinkelrätt mot det med riktningen OM konjugerade diametralplanet i K. Visa att orten är en regelyta av 2:dra graden. (II-III)

734. En rät linje (L) rör sig så att tre bestämda punkter på densamma ständigt befinna sig på var sitt av tre givna plan, som skära varandra i *en* punkt. Visa att en godtyckligt vald punkt på L därvid beskriver en ellipsoid. (II-III)

735. Bestäm geometriska orten för topparna till de rotationskoner vilka som bas ha ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, $z = 0$ ($a > b$). (II)

736. En avplattad sfäroid skäres av ett plan som går genom en styrlinje till en av meridianellipserna. Visa att den kon som har snittellipsen som bas och den till styrlinjen hörande brännpunkten som topp alltid är en rotationskon. (II)

737. En långsträckt sfäroid skäres av ett godtyckligt plan. Visa att den kon som har snittellipsen som bas och en av meridianellipsernas brännpunkter som topp alltid är en rotationskon. (II-III)

738. En kon har sin topp i brännpunkten till rotationsparaboloiden

$$x^2 + y^2 = 4az$$

och går genom en av ytans plana sektioner. Visa att den är en rotationskon och bestäm dess axel. (II-III)

739. Uppskriv ekvationen för en rotationskon med toppen i origo, som går genom tre givna punkter $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, vilka icke ligga i rät linje. Använd determinanter. (II-III)

740. En rotationsellipsoid, som har centrum i origo och ekvatorialradien r, skär rotationsaxeln i punkten $(a,\ b,\ c)$. Uppskriv ytans ekvation. (II-III)

741. En rät linje roterar omkring en fix axel. Visa att den i allmänhet genererar en enmantlad hyperboloid. Vilka andra ytor äro tänkbara? (II-III)

742. Uppskriv ekvationen för den rotationsyta som uppstår, när cirkeln $x^2 - 2ax + y^2 + z^2 = 0$, $y + z = 0$ roterar omkring z-axeln. Bestäm ytans meridiansnitt och beräkna rotationskroppens volym. (II-III)

743. Man betraktar de rotationsytor av 2:dra graden som gå genom alla sex topparna på ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Bestäm orten för rotationsaxlarna. (II-III)

744. Bevisa följande sats: Om en rotationsyta av 2:dra graden skäres av ett plan, så ligga rotationsaxeln och en av det utskurna kägelsnittets symmetriaxlar i ett plan som står vinkelrätt mot snittplanet. Uppskriv sedan allmänna ekvationen i rätvinkliga koordinater för de rotationsytor av 2:dra graden som gå genom parabeln $y^2 = 2px$, $z = 0$ och genom punkten $(0,\ 0,\ c)$. Visa att bland dem finnas tre koner och bestäm deras rotationsaxlar. (II-III)

745. En kon har i rätvinkliga koordinater ekvationen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0.$$

Bestäm nödvändiga och tillräckliga villkoret för att konen må ha ett system av tre mot varandra vinkelräta generatriser. Visa att den har oändligt många sådana system, när villkoret är uppfyllt. (II-III)

746. Bestäm villkoret för att planet $Ax + By + Cz + D = 0$ må skära ytan $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ efter två räta linjer. (II-III)

747. Bestäm villkoren för att skärningslinjen mellan planet $Ax + By + Cz + D = 0$ och ytan $xy + xz + yz = c^2$ må vara (a) en parabel, (b) en cirkel. (II-III)

748. Till ytan $\dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{m}$ läggas tangentplan, som skära ytan $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2(z-c)}{m}$ efter liksidiga hyperbler. Bestäm orten för tangeringspunkterna. (II-III)

749. En rät linje rör sig parallellt med ett av principalplanen i en given ellipsoid och så att den ständigt går genom snittellipserna i de båda andra principalplanen. Vilken yta genererar denna räta linje? (II-III)

750. Sök orten för en punkt, varifrån tre mot varandra vinkelräta tangenter kunna dragas till ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. (II-III)

751. Låt A_1, A_2 och A_3 vara areorna av de ellipser som tre mot varandra vinkelräta diametralplan utskära på en ellipsoid. Visa att

$$\left(\frac{1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_3}\right)^2 = \text{konst.}$$ (II-III)

752. Genom en fast punkt (P) i det inre av en ellipsoid dragas tre mot varandra vinkelräta kordor; låt R och r vara de stycken i vilka en korda delas av punkten P. Bevisa att $\sum \dfrac{1}{Rr}$ är konstant. (II-III)

753. Genom den fasta punkten $P(X, Y, Z)$, som ligger inom eller på ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, dragas tre mot varandra vinkelräta linjer, som skära ytan i punkterna M_1, M_2 och M_3. Visa att det variabla planet $M_1M_2M_3$ går genom en annan fast punkt. (II-III)

754. I ellipsoiden (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c$) läggas två koner med topparna i (a, 0, 0) resp. (0, b, 0) och motstående principalellipser som ledkurvor. Visa att dessa koner ha ett gemensamt tangentplan och skära varandra efter en parabel; visa att snittellipsen mellan E och parabelns plan har dubbelt så stor area som snittellipsen mellan E och tangentplanet. (II-III)

755. Genom snittkurvorna mellan en ellipsoid och en med denna koncentrisk sfär lägges en kon (K). Bevisa att tangentplanet till K efter en godtycklig generatris skär ellipsoiden efter en ellips, vars ena axel ligger längs denna generatris. (II-III)

756. Genom de båda punkter, där cirkeln (C): $x^2 + y^2 - 9 = 0$, $z = 0$ skäres av planet $x = 1$, lägges en lika stor cirkel (C'), vars plan bildar 60° vinkel med x-axeln. Uppskriv ekvationerna för de koner (eventuellt cylindrar) som gå genom C och C'. (II-III)

757. En kon har sin topp på en enmantlad rotationshyperboloid, genererad av en liksidig hyperbel, och som bas strupcirkeln. Visa att de plan som skära konen efter cirklar och som icke äro parallella med strupcirkelns plan stå vinkelrätt mot detta plan. (II-III)

758. En snett avskuren kon med cirkulär bas är given. Visa att man kan skära denna kon med ett plan, som icke är parallellt med basplanet, så att man får en ny sned kon, likformig med den givna. (II-III)

759. Uppskriv allmänna ekvationen $F(x, y, z) = 0$ för de andragradsytor som gå genom cirkeln (C): $y^2 + z^2 - 6z - 16 = 0$, $x = 2$ och som tangera xy-planet i origo. Bestäm geometriska orten för dessa ytors centra. Visa att en godtycklig sfär genom C skär var och en av ytorna $F = 0$ i ytterligare en cirkel. (II-III)

760. Visa att orten för skärningslinjen mellan två mot varandra vinkelräta plan, som gå genom två givna räta linjer, är en andragradsyta, vars cirkulära snitt stå vinkelrätt mot den ena eller den andra av dessa räta linjer. (II-III)

761. Två ellipsoider tangera varandra efter en plan kurva. Visa att tangentplanet i en cirkelpunkt på den inskrivna ellipsoiden skär den omskrivna efter en ellips, vars ena fokus är tangeringspunkten. (II-III)

762. Bestäm orten för centra till de sfärer med radien r som skära ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$ i plana snitt. (II-III)

763. Antag att ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ är ogenomskinlig. Från vilka punkter i xy-planet kan man då se hela räta linjen $y = 0$, $z = C$, där $C > c$? (II-III)

764. En sfär med radien r tangerar xy-planet i origo. På samma sida om och på avståndet h $(> 2r)$ från xy-planet befinner sig en punktuell ljuskälla; såväl sfären som xy-planet antagas vara ogenomskinliga. Visa att bredden av den elliptiska skugga som sfären kastar på xy-planet är oberorende av ljuskällans avstånd till z-axeln. (II-III)

765. En ellipsoid med halvaxlarna a, b, c $(a > b > c)$ har sin mellan axel parallell med ett givet plan. Vilken vinkel α skall dess största axel bilda med planet för att ellipsoidens ortogonala projektion på planet må vara cirkulär? (II-III)

766. En tangentcylinder till en ellipsoid avskäres av de båda plan som tangera ellipsoiden i ändpunkterna av den med cylinderns generatriser parallella diametern. Visa att alla sålunda avskurna tangentcylindrar ha samma volym. (II-III)

767. Kring en ellipsoid har man omskrivit tre cylindrar, vilkas axlar stå vinkelrätt mot varandra. Visa att summan av kvadraterna på cylindrarnas tvärsnittsareor är konstant. (II-III)

768. Bestäm orten för topparna till de rotationskoner som äro tangentkoner till ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$. (II-III)

769. Man betraktar ellipsoiden (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ och den ellipsoid (E') som erhålles genom att vrida E 45° omkring y-axeln. Bestäm geometriska orten för de gemensamma med xz-planet parallella tangenterna till E och E'. Ortytan begränsar ett visst slutet område i rymden. Beräkna dess volym. (II-III)

770. Två andragradsytor tangera varandra i två distinkta punkter M och M', där tangentplanen äro parallella och åtskilda. Visa att ytorna ha två gemensamma tangentcylindrar (rella eller imaginära, distinkta eller sammanfallande). (II-III))

771. En ellipsoid (E) och en tvåmantlad hyperboloid (H) ha samma centrum samt lika stora och likriktade principaldiametrar. Genom en variabel punkt på E lägges ett tangentplan, som skär

H efter ett kägelsnitt (K). Sök geometriska orten för toppen till den kon som tangerar H efter kurvan K. (II-III)

772. Sfären (S): $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ och andragradsytan (F): $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ äro givna. Låt P vara ett tangentplan till ytan F och låt M vara polen till planet P med avseende på sfären S. Bestäm geometriska orten för M. (II-III)

773. Vilken geometrisk betydelse har ekvationen

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2axy - 2axz - 4(a-1)yz = a$$

för olika reella värden på a? Beräkna volymen av den ellipsoid som ekvationen representerar i rätvinkliga koordinater. (II-III)

774. Vad slags ytor representerar ekvationen

$$2x^2 - a(xy + xz) + yz = a$$

för reella värden på a? Bestäm ytans rätliniga generatriser, när $a = 1$. (II-III)

775. Vilka ytor representerar ekvationen

$$x^2 + a^2y^2 - az^2 + 2xy - 2xz - 2a^2yz + 2x + 2y - 2az = 0,$$

när den reella parametern a varierar? (II-III)

776. Undersök vilka ytor som ingå i knippet

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 16yz - 4z + a(y+z)^2 = 0,$$

där a är parametern. För ett visst a-värde erhålles en hyperbolisk paraboloid. Bestäm dess rätliniga generatriser. (II-III)

777. För vilket värde på a betyder ekvationen

$$x^2 + y^2 - 2z^2 + 2yz + x + y + a = 0$$

en kon? Bestäm dess axlar, när koordinaterna äro rätvinkliga. (II-III)

778. Vad slags yta representerar ekvationen

$$3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2yz - 4xz + 8xy - 8x + 6y + 2z = 0?$$

Uppskriv ytans ekvation i normalform, då koordinaterna äro rätvinkliga. (II-III)

779. Vad slags yta representerar ekvationen

$$x^2 + 2y^2 + az^2 - 2xy - 2yz = 1$$

för olika reella värden på a? Uppskriv normalformen, när $a = 3$ och koordinaterna äro rätvinkliga. (II-III)

780. Betrakta ekvationen

$$(1+a-a^2)x^2+(1+a+a^2)y^2+(1+a+a^2)z^2+2xy-2xz+2(-1+a+a^2)yz=a.$$

Vad slags yta representerar den för olika värden på a? Antag koordinaterna rätvinkliga och bestäm ytans normalform; uppskriv den speciellt för $a=\sqrt{2}$. Beräkna volymen, då ytan är en ellipsoid. Finns det a-värden för vilka ytan är en rotationsyta? (II-III)

781. Betrakta ekvationen

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2xz)+c(z^2+2xy)=1,$$

där a, b och c äro reella parametrar. Visa att ekvationen aldrig kan representera en ellipsoid. Angiv nödvändiga och tillräckliga villkoren för att den skall betyda en rotationsyta i rätvinkliga koordinater. (II-III)

782. Vad slags yta (egentlig eller urartad) representerar ekvationen

$$x^2+y^2+hz^2+2axz+2byz+2cz=0$$

för olika reella värden på koefficienterna a, b, c och h? Bestäm de plan som skära ytan efter cirklar. (Rätvinkliga koordinater.) (II-III)

783. Uppskriv allmänna ekvationen för en andragradsyta som av xy- och xz-planen skäras efter parabler, vilkas axlar äro parallella med x-axeln. Visa att om även snittkurvan med yz-planet är en parabel, så måste ytan vara en cylinder. (II-III)

784. Låt O, A, B och C vara hörnen i en tetraeder. En andragradsyta är omskriven kring tetraedern så att tangentplanen i A, B och C äro parallella med planen BOC, AOC resp. BOA. Visa att ytan är en ellipsoid med centrum i tetraederns tyngdpunkt. (II-III)

785. Till varje punkt $M(x, y, z)$ på en i ett rätvinkligt koordinatsystem placerad ellipsoid (E) associeras en annan punkt $M'(X, y, z)$, där $X=x+y+z$. Bevisa att orten för M' är en ellipsoid med samma volym som E. (II-III)

786. Hyperboloiden $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ tangeras av en paraboloid efter en plan kurva, vars plan går genom den fasta punkten $P(X, Y, Z)$. Man söker, när snittplanet vrider sig kring P, orten för skärningspunkten mellan paraboloiden och den av dess diametrar som går genom P. Visa att denna ort är ett plan. (II-III)

787. Man betraktar de båda cirklar som planen $mx-z=0$ och $x+mz+k=0$ utskära på sfären $x^2+y^2+z^2-r^2=0$ ($0<k^2<(m^2+1)r^2$). Visa att man kan lägga två kongruenta paraboloider genom dessa cirklar. Uppskriv paraboloidernas ekvationer och angiv den gemensamma normalformen. (II-III)

788. Bestäm radierna r_1 och r_2 till de cirklar på ytan

$$12yz-12xz+2xy=1$$

vilkas plan gå genom ytans centrum. (II-III)

789. Bestäm de cykliska planen till ytan

$$H(x, y, z) = z^2 + 2kxy - a^2 = 0$$

för alla positiva och negativa värden på parametern k. (II-III)

790. Bestäm cirkelpunkterna på ytan

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz + a^2 = 0,$$

där a är en reell konstant $\neq 0$. (II-III)

791. En rät cirkulär kon med höjden h och genererande vinkeln α skäres av ett plan parallellt med ett tangentplan. När är det utskurna parabelsegmentet så stort som möjligt? Beäkna maximiarean. (II)

792. Till en ellipsoid med halvaxlarna a, b och c lägges ett variabelt tangentplan. Beräkna volymen av den minsta tetraeder som begränsas av tangentplanet och ellipsoidens tre principalplan. (II)

793. En ellipsoid med halvaxlarna a, b och c skäres av ett variabelt plan. Beräkna volymen av den största kon som har snittellipsen som bas och ellipsoidens centrum som topp. (II)

794. Bevisa att summan av tre konjugatdiametrar i en ellipsoid är störst, när diametrarna äro lika stora. (II-III)

795. Till en ellipsoid med halvaxlarna a, b och c lägges ett tangentplan, som av tre konjugatdiametrar från ellipsoidens centrum räknat avskär längder, vilkas produkt är den minsta möjliga. Man betraktar den tetraeder som begränsas av de motsvarande diametralplanen och tangentplanet. Bevisa att alla sådana tetraedrar ha konstant volym och beräkna denna volym. (II-III)

796. Beräkna volymen av den största plant avskurna kon som kan inskrivas i en ellipsoid med halvaxlarna a, b och c. (II-III)

797. Beräkna volymen av den största tetraeder som kan inskrivas i en ellipsoid med halvaxlarna a, b och c. (II-III)

798. Till en ellipsoid (E) med halvaxlarna a, b och c lägges en tangentkon, som är avskuren av ett tangentplan till E. Beräkna minimivolymen ($\neq 0$) av den sålunda kring E omskrivna konen. Beräkna med hjälp härav volymen av den minsta tetraeder som kan omskrivas kring E. (II-III)

799. Beräkna största och minsta avstånden till xy-planet från en punkt på snittlinjen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ och $xy + xz + yz = kr^2$, där $-\dfrac{1}{2} \leq k \leq \dfrac{1}{2}$. (II-III)

800. Låt M vara en (reell) punkt på skärningslinjen mellan ytorna

$$xy + xz + yz = 8 \quad \text{och} \quad xy = 16z,$$

hänförda till ett rätvinkligt koordinatsystem, där O är origo. Beräkna minsta avståndet $\overline{OM}$ och de motsvarande koordinaterna för punkten M. (II-III)

Svar och anvisningar

För kurvkonstruktioner se även figurerna i slutet av boken.

3. För $m = 6k + 1$ och för $m = 6k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$).
   Endast för $m = 6k + 1$.

4. För $a = 0$ och för $b = a^2$.

5. $a = 1$ och $a = 1 \pm i\sqrt{3}$. De gemensamma divisorerna äro då $x - 1$ resp. $x + \frac{1}{2}\big(1 \pm i\sqrt{3}\big)$.

6. Om det hela talet $x = n$ är ett nollställe, måste r vara delbart med n och man har $q = \frac{r}{n} - n^2$. För $q \geq 0$ är $\frac{r}{n} > 0$ och således $q \leq |r| - 1$. För $q < 0$ är $-q \leq r^2 + 1$ eller $q \geq -1 - r^2$.

7. $a = 1, b = 3, c = 6$. Trippelroten $x = 1$ och rötterna $x = \frac{1}{2}\big(-3 \pm i\sqrt{15}\big)$.

8. $\lambda = -\frac{15}{11}$. Ekvationen har då rötterna $\frac{5}{6}$ och $\frac{1}{6}\big(-5 \pm i\sqrt{11}\big)$.

9. För $a = 1$ dubbelroten 1 och rötterna $-1 \pm i\sqrt{2}$; för $a = -1$ dubbelroten -1 och rötterna $1 \pm i\sqrt{2}$; för $a = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ dubbelroten $\frac{\sqrt{3}}{3}$ och rötterna $\frac{1}{3}\big(-\sqrt{3} \pm \sqrt{30}\big)$; för $a = -\frac{5\sqrt{3}}{9}$ dubbelroten $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ och rötterna $\frac{1}{3}\big(\sqrt{3} \pm \sqrt{30}\big)$.

10. För $a = 8$ äro de båda rotparen 2,1 och $1, -2$. För $a = -8$ äro de $\frac{1}{2}\big(-1 \pm i\sqrt{7}\big)$ och $\frac{1}{2}\big(3 \pm \sqrt{17}\big)$.

11. Rötterna äro $3, 1, -\frac{1}{2}$ och $-\frac{7}{2}$.

12. $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

13. $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1$.

14. Rötterna äro $1 - \sqrt[3]{10}$, $1 + \frac{1}{2}\big(1 \pm i\sqrt{3}\big)\sqrt[3]{10}$ och $\frac{1}{2}\big(-3 \pm i\sqrt{15}\big)$.

15. Rötterna äro $\frac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{5}\big)$ och $2\cos\frac{2k\pi}{9}$ ($k = 1, 2, 4$).

16. $\dfrac{1}{d^2}(c^2 - 2bd)$.

17. $650x^3 - 245x^2 + 28x - 1 = 0$.

18. $cx^3 + b(1-c)x^2 + a(1-c)^2x + (1-c)^3 = 0$.

19. $c^2\big(c^2 - a^2\big)^2 + b^2\big(4a^3 + 27b^2\big) = 0$.
(x_1^2, x_2^2, x_3^2 är rötterna till ekvationen $y^3 + 2ay^2 + a^2y - b^2 = 0$ med diskriminanten $D = -b^2\big(4a^3 + 27b^2\big)$; $x_2^2 - x_3^2$, $x_3^2 - x_1^2$, $x_1^2 - x_2^2$ äro rötterna till ekvationen $z^3 - a^2z \pm \sqrt{D} = 0$. Sättes här $z = c$, erhålles relationen.)

27. En enda. För $u = 3$. $x = 2$.

28. För $u \geq 1$ och för $u \leq u_0$, där u_0 är den rella roten till ekvationen $4u^3 - u + 1 = 0$.

29. För $u = 1$ och för $u = u_0$, där u_0 är den rella roten till ekvationen $u^3 - 2u^2 + u - 1 = 0$.

30. En enda $x = \xi$ för $a \geq 0$. $b = \dfrac{3}{2}$. Spec. $\xi = \dfrac{9}{5}$.

31. Tre för $0 < a \leq 1$, en enda för $a < 0$ och för $a > 1$.
$\dfrac{1}{4} < x_1 < \dfrac{1}{3} < x_2 < \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{a}} < \dfrac{1}{a} < x_3 < \dfrac{9}{4a}$.

32. Två trianglar, om $\frac{1}{2}\sqrt{2} < \dfrac{h}{b} < \dfrac{4}{9}\sqrt{3}$; en enda, om $\dfrac{h}{b} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ eller om $\dfrac{h}{b} = \dfrac{4}{9}\sqrt{3}$; ingen om $\dfrac{h}{b} > \dfrac{4}{9}\sqrt{3}$.

33. En enda reell rot. Trippelroten $x = 0$ för $a = 0$; inga andra dubbelrötter, när a är reellt.

34. En enda reell rot, positiv för $a < -5$, noll för $a = -5$, negativ för $a > -5$.

35. För $a < 0$ en negativ, två positiva; för $a = 0$ en negativ, dubbelroten $+1$; för $0 < a < \frac{1}{2}$ en negativ; för $a = \frac{1}{2}$ trippelroten -1; för $\frac{1}{2} < a < 2$ en negativ; för $a = 2$ dubbelroten $-\sqrt[3]{7}$, en rot noll; för $a > 2$ två negativa, en positiv.

36. Fyra för $0 \leq c \leq \dfrac{5a^4}{12}$, två för $c < 0$ och för $\dfrac{5a^4}{12} < c \leq \dfrac{8a^4}{3}$, inga för $c > \dfrac{8a^4}{3}$.

37. För $b \geq 0$; $c \geq 2b + 1$; för $b < 0$; $c \geq \varrho(1 - 4b) - b + b^2$, där $\varrho = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{1 - 4b}\big)$.

38. $\dfrac{1}{a}$, $1 - a$, $\dfrac{1}{1-a}$, $\dfrac{a}{a-1}$ och $\dfrac{a-1}{a}$. För reella $y \geq \dfrac{27}{4}$.

39. $1 \pm 2i$, $a^2 - a$, $\varrho a^2 - \varrho^2 a$ och $\varrho^2 a^2 - \varrho a$, där $a = \sqrt[3]{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}\big(-1 + i\sqrt{3}\big)$.

40. För $a^2+b^2=1$. Rötterna äro då $x = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}}{1+\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}}$, där $\alpha = \arctan\dfrac{b}{a}$ och $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

41. (a) $64x^2 - 7 = 0$.
(b) $y^3 - 3 = 0$.

42. (a) $x^4 - 5x^2 + 5 = 0$ med rötterna $2\cos\dfrac{k\pi}{10}$, $k = 1, 3, 7, 9$.
(b) $y^4 - 4y^2 + 1 = 0$ med rötterna $\pm 2\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\pm 2\sin\dfrac{5\pi}{12}$.
(c) $16z^4 + 8z^3 - 16z^2 - 8z + 1 = 0$ med rötterna $\cos\dfrac{k\pi}{15}$, $k = 1, 7, 11, 13$.

43. (a) $x^6 - 33x^4 + 27x^2 - 3 = 0$ med rötterna $\pm\tan\dfrac{k\pi}{9}$, $k = 1, 2, 4$.
(b) $y^6 - 6y^4 + 9y^2 - 3 = 0$ med rötterna $\pm 2\sin\dfrac{k\pi}{9}$, $k = 1, 2, 4$.

44. (a) $x^6 - 21x^4 + 2x^3 + 84x^2 + 24x - 19 = 0$ med rötterna

$$2\cos\frac{2m\pi}{9} + 4\cos\frac{2n\pi}{5} + 1, \quad m = 1, 2, 4; n = 1, 4.$$

(b) $y^6 + 2y^5 - 9y^4 - 14y^3 + 10y^2 + 8y + 1 = 0$ med rötterna

$$2\cos\frac{2m\pi}{7} + 4\left(\cos\frac{n\pi}{8}\right)^2 - 2, \quad m = 1, 2, 3; n = 1, 3.$$

45. $x^6 - 15x^4 + 2x^3 + 36x^2 + 12x + 1 = 0$ med rötterna $y_k + \xi - 2$ och $y_k - \xi + 2$, där $y_k = 2\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ $(k = 1, 2, 4)$ äro tredjegradsekvationens rötter.

47. $\omega_1 = 4$; $\omega_2 = 8$; $\omega_3 = 12$.

51. $y_n = n^3 + 6n^2 + 9n + 3$.

52. n^3.

53. $F(n) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$. $F(x) = 0$ har dubbelroten $x = -1$ och rötterna $x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

54. För $a = 2$: $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$; för $a = 6$: $x = -\dfrac{8}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$, $z = \dfrac{4}{15}$; för $a = -9$: $x = \dfrac{187}{190}$, $y = \dfrac{173}{190}$, $z = \dfrac{143}{190}$.

55. Rötterna äro $-b \pm (a+c)$ och $b \pm i(a-c)$.

56. $r^2(r - pq)$.

57. 169.

58. $-q^4(4p^3 + 27q^2)$.

59. $104\sqrt{229}$.

60. $-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0;\ 2 < x_3 < \frac{5}{2} < x_4 < 3$.

61. $x = \frac{1}{2}\big(\pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-5 \pm 2\sqrt{5}}\big)$.

62. Rötterna äro $\frac{1}{2}\big(-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\big)$, $\frac{1}{2}\big(-1 + \sqrt{2} \pm i\sqrt{2\sqrt{2} + 1}\big)$ och $\frac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2} \pm i\big(1 \pm \sqrt{\sqrt{5} + 2}\big)\big)$.

63. Området begränsas av den semikubiska parabeln $4a^3 + 27b^2 = 0$ (för $-3/4 \leq a \leq 0$) och de båda linjerna $a \pm b + 1 = 0$ (för $-1 \leq a \leq -3/4$).

64. På den till kurvan $y^2 = \dfrac{x^2(3 - 2x)}{1 + 2x}$ hörande slingan i högra halvplanet.

65. $4a^3 + 9a^2 + 27b^2 - 27b = 0$ och $4a^3 + 27b^2 > 0$. Den 1:sta relationen definierar en kurva i ab-planet med parameterframställningen $4\Big(a + \dfrac{3}{2}\Big) = 9 - 27t^2$, $4(b - \dfrac{1}{2}) = 9 - 27t^3$ ("paraboliskt blad"). Bågen B är den del av kurvans slinga som beskrives för $-\dfrac{1}{3} < t < \dfrac{5}{9}$.

66. På kurvan $y^4 - 2x^2y^2 - 3x^4 - 12x(y^2 - x^2) = 0$. (Kurvan har i origo en trippelpunkt med tre distinkta reella tangenter och gör en slinga i högra halvplanet; den har asymptoterna $y \pm \sqrt{3}(x + 1) = 0$.)

67. $a + c = 0,\ b + d = 0$.

68. $x\sqrt{\sqrt{2} - 1} - y\sqrt{\sqrt{2} + 1} \pm a\sqrt{2} = 0$. (Använd en parameterframställning för den 1:sta hyperbeln t.ex. $x = \dfrac{a(t^2 + 1)}{t^2 - 1}$, $y = \dfrac{2at}{t^2 - 1}$).

69. Antalet normaler är ett, två eller tre, alltefter som $|p| > C$, $= C$ eller $< C$, där $C = \dfrac{8}{49}\sqrt[4]{189}|c|$.

70. $\phi = \arccos \dfrac{2}{3}$.

72. Framställ kurvan i rationell parameterform.

73. Tre, varav en ligger i xz -planet.

74. För $p > 2a$: fem, varav (förutom z-axeln) två i xz-planet och två i yz-planet; för $2a \geq p > a$: tre, varav (förutom z-axeln) två i yz-planet; för $p \leq a$: endast z-axeln.

75. $x - z + \dfrac{3p}{2} = 0,\ y = 0;\ x + z = 0,\ y \pm \sqrt{3}(z + 2p) = 0$.

77. (a) För $1 < x < 2$ och för $x < -2$.

(b) För $x \geq 1$: för $0 < x \leq x_1$, där x_1 är funktionens nollställe i intervallet $\frac{1}{e^2} < x < \frac{1}{e}$; för $x \leq x_2$, där x_2 är funktionens negativa nollställe $(-e < x_2 < -1)$.

78. (a) För alla x i intervallet $\neq \frac{\pi}{6}$.
(b) För $0 < x < x_0$, där x_0 är funktionens nollställe i intervallet $\pi/4 < x_0 < \pi/2$.

80. (a) Maxima för $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$; minima för $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.
(b) $f(x)$ är monotont växande.

81. För $0 \leq x \leq x_0$ är $f(x)$ monotont växande, för $x_0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ monotont avtagande; $x_0 = 0,8\ldots$ $f(0) = f(\frac{1}{2}\pi) = 0$.

82. Max. för $x = \frac{3\pi}{4}$; min. för $x = \frac{7\pi}{4}$; inflex. för $x = \frac{\pi}{2}$ och för $x = \frac{3\pi}{2}$.

83. $\lim_{n\to\infty} y^{(n)} = 0$. Sättes $\lim_{n\to 0} y^{(n)} = G$, så är $G = (-1)^n\infty$ för $a < 0$; $G = (-1)^{n-m}\infty$ för $m-1 < a < m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$; $G = \frac{(-1)^{n-m}n!}{(n-m)!}$ för $a = m$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$; $G = 0$ för $a > n$. Om $a < 0$, avtar y monotont (utan inflex.) från 1 till 0. Om $0 < a \leq 1$, växer y monotont (utan inflex.) från 0 till max. för $x = a$ och avtar sedan monotont till 0 (med inflex. för $x = a + \sqrt{a}$). Om $a > 1$ växer y monotont från 0 till max. för $x = a$ (med inflex. för $x = a - \sqrt{a}$) och avtar sedan monotont till 0 (med inflex. för $x = a + \sqrt{a}$).

84. (a) $\alpha = \frac{1}{3}$. (b) $\alpha = \frac{2}{3}$. (c) $\alpha = \frac{2}{3}$. (d) $\alpha = \frac{1}{6}$.

85. Max. $= \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ för $x = \sqrt{3}$; min. $= -\frac{5}{8}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ för $x = -\sqrt{3}$. Tre reella rötter 0 och $\pm x_0$, där $2 < x_0 < 3$.

86. Gränsvärdet är $= 1$.

87. Gränsvärdet är $= \frac{2}{\pi}$.

89. För $-1 < \alpha < 1$.

90. $P_n(y)$ är av graden $n + 1$. $P_1 = 1 + y^2$, $P_2 = 2y(1 + y^2)$, $P_3 = 2(1 + y^2)(1 + 3y^2)$, $P_4 = 8y(1 + y^2)(2 + 3y^2)$, $P_5 = 8(1 + y^2)(2 + 6y^2 + 15y^4)$. Koefficienten för y^{n+1} är $= n!$.

91. Gränsvärdet är $= \frac{\pi}{2e}$.

93. $\pm\frac{k}{\sqrt{2e\alpha^2\beta^2\gamma^2}}$, kär $k = \sqrt{a^2\beta^2\gamma^2 + b^2\gamma^2\alpha^2 + c^2\alpha^2\beta^2}$ (max. för övre, min. för nedre tecknet).

94. 1.

95. $\frac{1}{4}$.

96. 2.

97. $\frac{1}{6}$.

98. $-\frac{1}{45}$.

99. $\frac{11e}{24}$.

100. $\frac{45}{2}$.

101. $\frac{1-k^2}{3k^2}$.

102. $\frac{k}{3}(1-k^2)$.

103. $m!$

104. 3.

105. e^{π}.

106. $e^{2/\pi}$.

107. $\frac{1}{2}n(4n^2-1)$.

108. $\frac{1}{2}$.

109. 1.

110. $\frac{1}{2}$.

111. $\frac{3}{2}\log 2$.

112. $b = a + 1$.

113. $p = 2$. Gränsvärdet $= \frac{5}{4}$.

114. $a = -\frac{1}{2}(n-2)(n-3), b = -(n-1)(n-3), c = -\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Gränsvärdet $= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$.

115. För $a_1 = a \neq 0$, då $\lim = e^{\frac{b-b_1}{a}}$; för $a_1 = a = 0$, $b \neq 0$, då $\lim = e^{\frac{c-c_1}{b}}$; för $a_1 = a = b_1 = b = 0$, $c_1 = c \neq 0$, då $\lim = 1$.

116. $\frac{2a^2-b}{b^2}$.

119. $A = -\frac{e}{2}$, $B = \frac{11e}{24}$.

120. $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $p = 2$, $b = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

121. $+1$ och -1.

122. $\limsup = 1$.

123. Den liksidiga. Min. av $s = \frac{6\sqrt{T}}{\sqrt[4]{3}}$.

124. I den liksidiga. Max. $= \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

125. Max. $= 2\sin\frac{1}{2}A(1 - \sin\frac{1}{2}A)$ för den likbenta triangeln med toppvinkeln A.

126. Min. av $T = r^2 \tan\alpha\Big(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\Big)^2$ för den likbenta triangeln med toppvinkeln 2α.

127. $c = \frac{1}{a+b}(ab + \sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2})$.

128. Den likbenta triangeln med toppvinkeln α, vars bas är $= \sqrt{T\tan\frac{1}{2}\alpha}$ och båda andra sidor $= \sqrt{\frac{2T}{\sin\alpha}}$.

129. Den likbenta triangeln med toppvinkeln α. Maximiarean $= \frac{s^2\sin\alpha}{8(1 + \sin\frac{1}{2}\alpha)^2}$.

130. Ett parallelltraptes med basen $2a$ och basvinklarna $= 60^\circ$.

131. $4n\tan\frac{\pi}{n}$.

132. $\sqrt{2}$.

133. $2\sqrt{2}$.

134. Max. av $V = \frac{7}{108}\sqrt{\frac{13\sqrt{13} - 35}{3\pi}}F^{3/2}$.

135. $72n\tan\frac{\pi}{n}$. $\quad 72\pi$ för $n \to \infty$.

136. $\frac{a}{4}\sqrt{a^2 + 4(3 + 2\sqrt{2})h^2}$.

137. $h = \sqrt{\dfrac{2S(\sqrt{7}-2)}{3\pi}}$.

138. När $x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

139. Min. av $\overline{AB}^2 = a^2+b^2+3ab\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+3b^2\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}$. Min. av triangeln $AOB = 2|ab|$.- Konens minimivolym $= \dfrac{9}{4}\pi a^2|b|$.

140. $\dfrac{ab\sqrt{27}}{4}$, om a och b äro cirklarnas radier.

141. $\dfrac{19}{2}$.

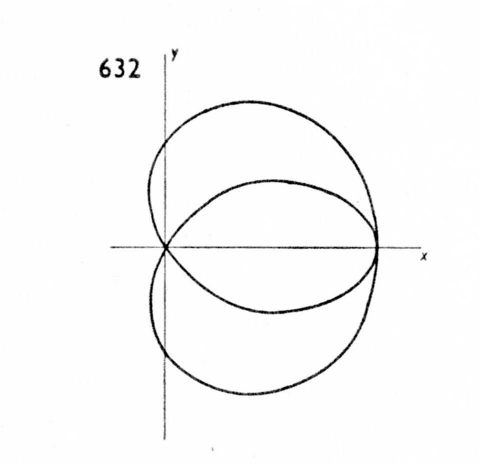
142. Maximiarean är $= \dfrac{1}{8}\sqrt{16a^4 + 40a^2b^2 - 2b^4 + 2b\sqrt{(8a^2+b^2)^3}}$, om $b \geq 0$.

143. Intet ändligt maximum. (Om A och B ha parametervärdena $t = u$ och $t = v$, blir triangelns area $T = \pm\frac{1}{2}(\sin u - \sin v + \sin(u+v) + y(\cos u - \cos v))$. Man finner $T'_u = T'_v = T'_y = 0$ för $u = -v = \dfrac{\pi}{3}$, $y = 0$; men för dessa värden är $d^2T = -\frac{1}{2}\sqrt{3}(du^2 + dv^2 + du\,dv + du\,dy + dv\,dy)$ indefinit.)

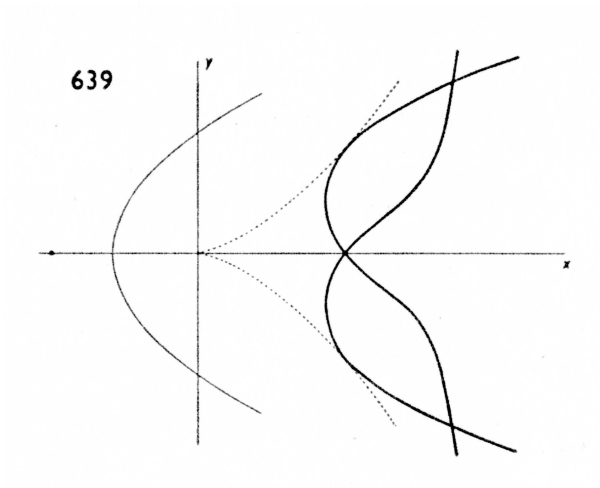
144.

Figurer

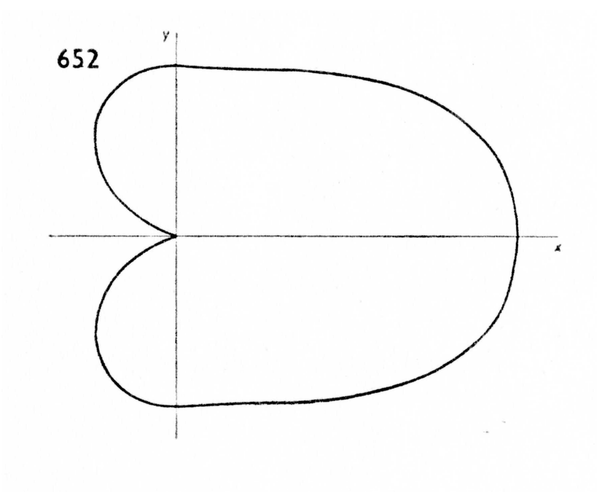
632



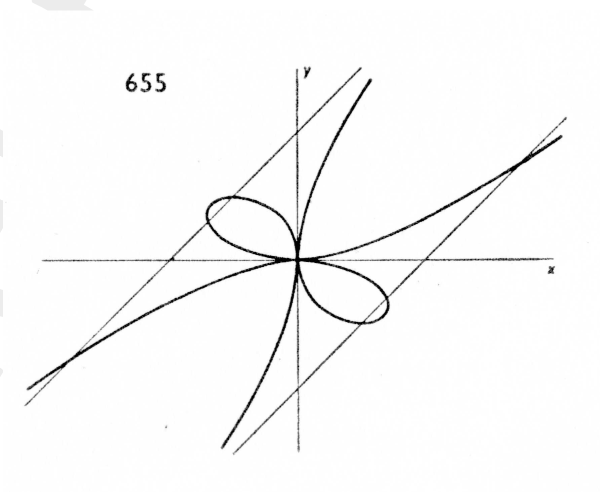
639



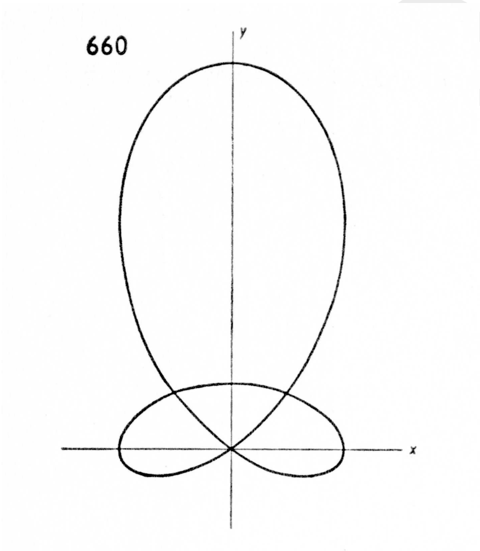
652



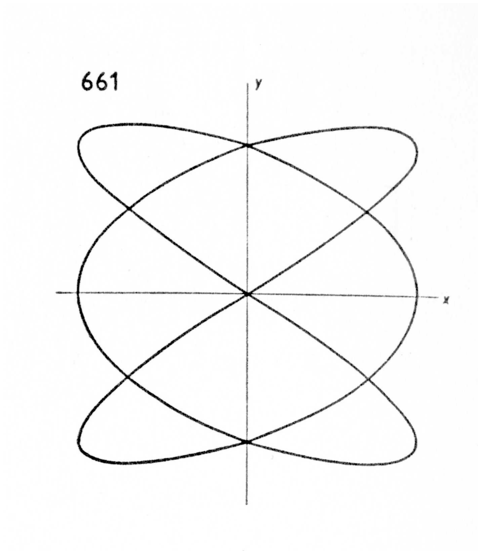
655



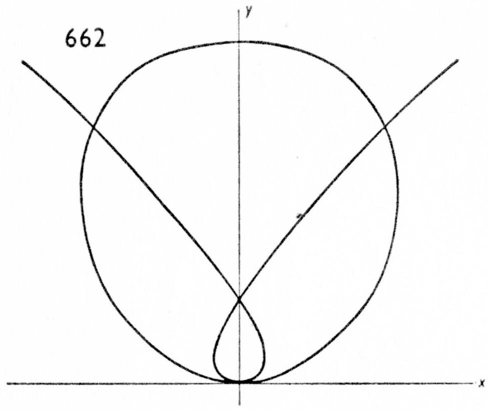
660



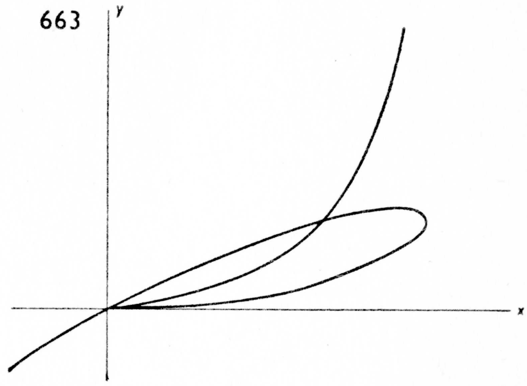
661



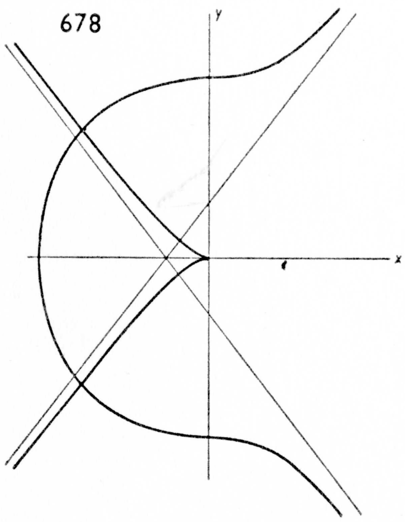
662



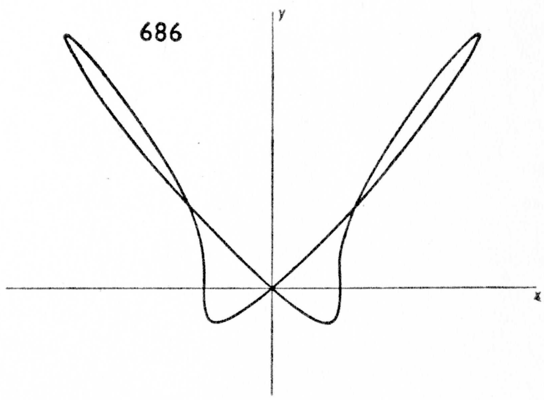
663



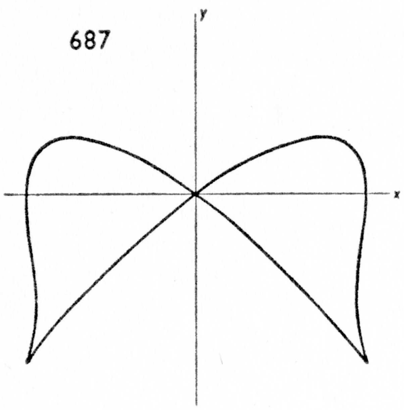
678



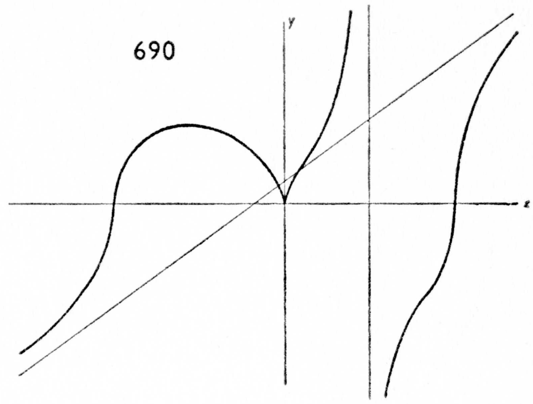
686

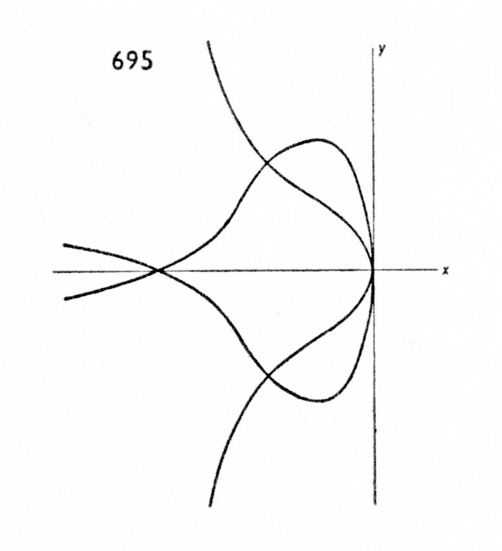


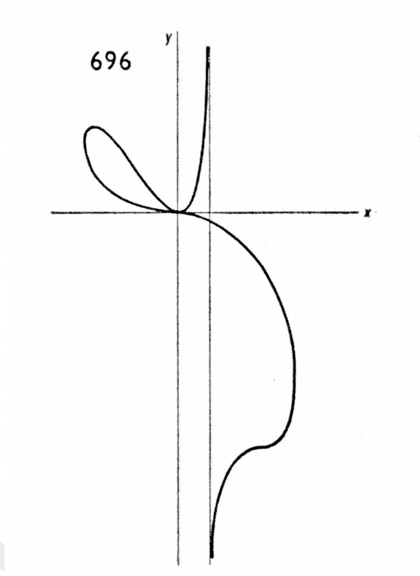
687

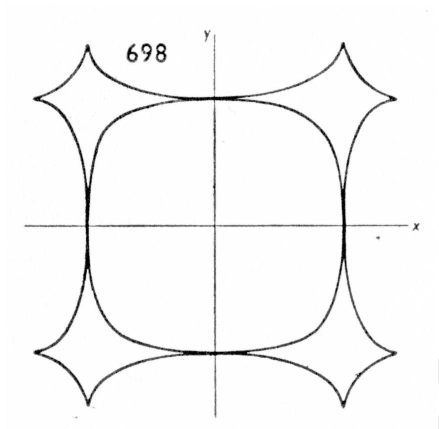


690




695
y
x


696
y
x


698
y
x