DIFFERENTIAL-
och
INTEGRALKALKYL

FÖR ENSKILT ARBETE I REAL-GYMNASIETS HÖGSTA RINGAR

av

K. A. Wingårdh
Fil dr., Lektor

Tredje upplagan

STOCKHOLM

BOKFÖRLAGET NATUR OCH KULTUR

Printed in Sweden

Lindbergs Tryckeriaktiebolag, Stockholm 1952
93827

FÖRORD

Då det gällt att giva anvisning på litteratur för enskilt arbete i differential- och integralräkning i de båda högsta realringarna, har jag känt bristen på något i mitt tycke lämpligt arbete, som varken är för stort eller för litet.

Jag har därför skrivit ihop denna lilla bok, vilken alls icke gör anspråk på att komma med något nytt, utan endast vill vara en handledning för matematiskt intresserade lärjungar i de båda översta ringarna i deras studier på ett område, som ligger en smula över det, som i skolan genomgås.

Förf.

FÖRORD TILL TREDJE UPPLAGAN

I föreliggande upplaga ha några tillägg och omarbetningar vidtagits, varjämte antalet problem utökats med ett 40-tal.

Förf.

Kap. 1

Följande gränsvärde är av betydelse för det följande.

$$\lim_{\omega \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = e < 3$$

(ω, grekiska bokstaven omega, beteckning för ett mycket stort tal.)

Antag, att n är ett visst ändligt heltalsvärde för ω. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ utvecklas enligt Newtons binomialteotrem:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Detta kan skrivas på följande sätt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

För det följande heltalsvärdet $n + 1$ för ω gäller då

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)}$$

I dessa båda serier äro de båda första termerna lika och den senare seriens 3:e term > den första seriens 3:e term o.s.v. , ty $n + 1 > n$.

$$\therefore \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \therefore \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{o.s.v.}$$

Varje term i den senare serien är alltså > motsvarande term i den förra, och dessutom innehåller den senare serien en term mer än den förra serien. Därav följer att

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Då ω växer kommer alltså $\left(1++\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ alltjämt att växa.

Vi skoal nu bevisa, att uttrycket det oaktat icke kan uppnå värdet 3 och att det närmar sig ett gränsvärde vilket ≤ 3.

Emedan $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, o.s.v. alla äro < 1 måste

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \text{vara} \quad < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

men detta är i sin tur

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

då varje term i den förra serien är ≤ motsvarande term i senare serien, vilken fr.o.m. 2:dra termen utgör en geometrisk serie med kvoten $\frac{1}{2}$. Härav följer att

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

och följaktligen att

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3.$$

Gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, vilket vi senare skola beräkna, betecknas med e och utgör ett irrationellt tal, $e = 2,718281828459\ldots$. Detta tal utgör bas i det s.k. naturliga logaritmsystemet.

Det skall nu även bevisas att gränsvärdet för $\left(1++\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ är detsamma, även om ω antager andra reella värden än heltal. Vilket värde ω än må antaga, så ligger det mellan två konsekutiva heltal p och $p+1$. Härav följer: $1+\frac{1}{p} > 1+\frac{1}{\omega} > 1+\frac{1}{p+1}$, eller om man sätter $p+1=r$

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\omega} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left(1+\frac{1}{r}\right)^{\omega}.$$

Eftersom ω ligger mellan de båda konsekutiva talen p och r, kan man sätta $\omega = p+\alpha = r-\beta$, där α och β äro positiva tal < 1. Då kan vi skriva

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+\alpha} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left(1+\frac{1}{r}\right)^{r-\beta} \quad \text{eller}$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{1+\frac{\alpha}{p}} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}\right]^{1-\frac{\beta}{r}}$$

När nu ω växer, komma båda p och r att samtidigt växa. $\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}$ och $\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}$ äro båda $= e$, enligt vad som förut bevisats, och då både $\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)$ och $\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{\beta}{r}\right)$ äro $= 1$, så blir alltså $\lim_{\omega\to\infty}\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = e$.

Kap. 2 Differentialkalkyl

Utöver de förut bekanta derivatorna till funktioner av typerna $y = x^n$, $y = \sin^n mx^p$ och övriga trigonometriska funktioner skola vi nu bestämma derivatorna till exponential- och logaritmfunktioner samt cyklometriska funktioner.

Logaritm-och exponentialfunktioner

1. $y = {}^{\mathrm{a}}\log x$
   Om x erhåller ett litet tillskott Δx och y får ett motsvarande tillskott Δy, erhålles $y + \Delta y = {}^{\mathrm{a}}\log(x + \Delta x)$. Ur dessa båda ekvationer löses Δy, varfter divideras med Δx. Då fås

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{{}^{\mathrm{a}}\log(x+\Delta x) - {}^{\mathrm{a}}\log x}{\Delta x} = \frac{{}^{\mathrm{a}}\log \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{{}^{\mathrm{a}}\log\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{x}\,\frac{{}^{\mathrm{a}}\log\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\,{}^{\mathrm{a}}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\end{aligned}$$

   Alltså blir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\,{}^{\mathrm{a}}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\,{}^{\mathrm{a}}\log e$$

   enligt Kap.1.
   Specialfall: $y = \ln x$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\cdot \ln e = \dfrac{1}{x}$.

2. $y = a^x$
   Denna funktions derivata kan beräknas om man först deriverar den

inversa funktionen $x = {}^{\mathrm{a}}\log y$. Då fås

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \cdot {}^{\mathrm{a}}\log e \quad \text{varav följer}$$
$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{{}^{\mathrm{a}}\log e} = a^x \cdot \ln a.$$

Specialfall: $y = e^x$; $\dfrac{dy}{dx} = e^x$. Detta är den enda funktion, som förblir oförändrad vid derivering (mer exakt Ce^x, där C är en konstant).

Exempel: Derivera följande funktioner:

1. e^{2x}
2. $x^2 \cdot e^x$
3. $a^x + a^{\sqrt{x}}$
4. $a^{\sin x}$
5. $x \cdot \ln x$
6. ${}^{\mathrm{a}}\log x^{\sin x}$

Sammanfattning

$$\begin{array}{ll}
y = a^x & y' = a^x \cdot \ln a \\
y = e^x & y' = e^x \\
y = {}^{\mathrm{a}}\log x & y' = \dfrac{1}{x} \cdot {}^{\mathrm{a}}\log e \\
y = \ln x & y' = \dfrac{1}{x}
\end{array}$$

Logaritmisk derivation

När det gäller att söka derivator till vissa exponentialfunktioner, är det ofta lämpligt att först taga ln för funktionen och sedan derivera denna logaritm med avseende på x

Exempel:

$$y = x^x \implies \ln y = x \cdot \ln x \implies \frac{1}{y} \cdot y' = 1 + \ln x$$
$$y = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

$$y = x^{\sin x} \implies \ln y = \sin x \cdot \ln x \implies \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x$$
$$y' = x^{sinx}\left(\frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x\right)$$

Derivera på samma sätt följande funktioner:

7. $y = x^{\frac{1}{\sin x}}$
8. $y = x^{\ln x}$
9. $y = x^{e^x}$
10. $y = x^{x^x}$
11. $y = x^{x^{\sin x}}$
12. $y = x^{\ln(\sin x)}$
13. $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$
14. $y = (\tan x)^x$
15. $y = (\sin x)^{\cos x}$
16. $y = \sqrt[x]{x}$
17. $y = (\sin x)^{\ln x}$
18. $y^x = x^y$
19. $y^y = (\sin x)^{\cos x}$

Cyklometriska funktioner

Med de cyklometriska funktionerna $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ (uttalas arcussinus etc.) menas de inversa funktionerna till motsvarande trigonometriska funktioner. Om $y = \sin x$, är alltså $x = \arcsin y$ d.v.s. $\arcsin y$ är dem (minsta) vinkel, vars sinus är y. Vid derivation begagnar man sig av regeln om derivation av inversa funktioner.

Om vi skola söka derivatan av $y = \arcsin x$, derivera vi den inversa funktionen $x = \sin y$. Detta ger $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$, varför $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exempel: Derivera följande funktioner:

20. $y = \arccos x$
21. $y = \arctan x$
22. $y = e^{\arctan x}$
23. $y = \arctan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
24. $y = \arccos x^{\frac{1}{x}}$
25. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$
26. $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
27. $y = \arccos \dfrac{x}{x^2+1}$
28. $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\arctan x\right) \cdot \arctan x$
29. $y = (\arctan x)^x$
30. $y = (\arcsin x)^{\ln x}$
31. $y = \operatorname{arccot} \sqrt{x-1}$

Sammanfattning

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin x & y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \arccos x & y' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \arctan x & y' &= \frac{1}{1+x^2} \\
y &= \operatorname{arccot} x & y' &= \frac{-1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Medelvärdesatsen

Om $y = F(x)$ är en funktion av x, som jämte sin första derivata är entydig, ändlig och kontinuerlig mellan två punkter med abskissorna a och b, så är

$$F(b) = F(a) + (b-a) \cdot F'(a + \theta(b-a))$$

där θ är ett positivt tal mellan 0 och 1.

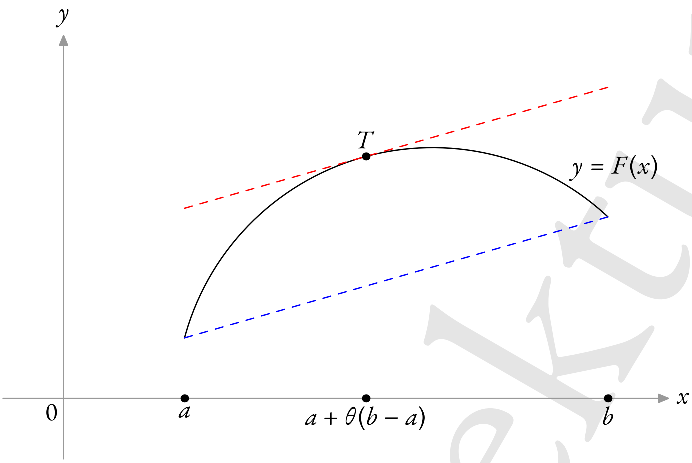

Fig. 1

Av Fig. 1 framgår nämligen, att i någon punkt mellan a och b är kurvans tangent parallell med kordan mellan de båda punkterna. Betecknas denna punkts abskissa med $a + \theta(b - a)$, så fås

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(a + \theta(b - a)),$$

varur ovanstående sats framgår.

Serieutvecklingar

Om $f(x)$ är en funktion, som jämte sina n första derivator är ändlig, entydig och kontinuerlig, så definieras $F(x)$ på följande sätt:

$$F(x) = f(x) + \frac{b - x}{1} f'(x) + \frac{(b - x)^2}{2!} f''(x) + \\ + \frac{(b - x)^3}{3!} f'''(x) + \ldots + \frac{(b - x)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(x) \qquad (1)$$

Härur fås genom insättning av $x = b$

$$F(b) = f(b) \quad \text{och genom insättning av } x = a \tag{2}$$

$$F(a) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \\ + \frac{(b-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) \tag{3}$$

Om ekv. (1) deriveras, erhålles

$$F'(x) = f'(x) + \frac{b-x}{1} f''(x) - f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) \\ - (b-x) f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$$

dvs

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Enligt medelvärdesatsen är

$$F(b) - F(a) = (b-a) F'(a + \theta(b-a)).$$

Härur fås

$$F(a) = f(b) - (b-a) \frac{[b - a - \theta(b-a)]^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(b-a))$$

eller

$$F(a) = f(b) - (b-a)^{(n-1)} \frac{(1-\theta)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(b-a))$$

Om den sista termen, vilken brukar benämnas "resttermen", betecknas med R, fås, om värdet på $F(a)$ ur ekv. (3) insättes

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R$$

Om i denna serieutveckling insättes $a = 0$ och $b = x$, så erhålles *Maclaurins serie*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R$$

där

$$R = \frac{x^n (1-\theta)^{(n-1)}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(\theta x).$$

$f(x) = e^x$

Här äro samtliga derivator = e^x och $R = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\theta x}$. Om x är ändlig, är $e^{\theta x}$ ändlig; vidare finnes det alltid, hur stort x än må vara, någon faktor i nämnaren, vilken jämte de följande samtliga äro numeriskt > x. Härav följer att $\lim_{n\to\infty} R = 0$. Serien kan alltså skrivas

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Härav kan värdet på e beräknas, ty om x sättes = 1 fås

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Om 10 termer medtagas i serien, blir approximativa värdet på 3 = 2,718282.

$f(x) = \sin x$ och $\cos x$

Om $f(x) = \sin x$, hava derivatorna följande 4 värden: $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = \sin x$ o.s.v. Vidare är $\lim_{n\to\infty} R = 0$. Varför serien blir

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

På samma sätt erhålles utvecklingen för $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$f(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Härur fås

$$f(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (x^2 \leq 1)$$

Om i denna formel x sättes = 1, fås

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

varur π kan beräknas. Emellertid konvergerar denna serie synnerligen långsamt, varför ett stort antal termer måste medtagas för att resultatet må bli tillfredsställande. En annan serie, som konvergerar snabbare, skall därför härledas.

Sätt $\arctan a = x$ och $\arctan b = y$, varav $\arctan a + \arctan b = x + y = z$. Nu ser vi att

$$\tan z = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Alltså blir $z = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab}$ d.v.s.

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}.$$

Sätt här $a = \dfrac{1}{2}$ och $b = \dfrac{1}{3}$ så fås

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ur ovanstående serieutveckling för $\arctan x$ fås då följande uttryck:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{7} - \ldots \\ &+ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{7} - \ldots\end{aligned}$$

Dessa båda serier konvergera betydligt snabbare än den förra serien.

Exempel:

32. Härled formeln $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
Ledning: $\frac{d\ln(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x}$. Om den av bråket angivna divisionen utföres, erhålles en dignitetsserie. Denna är konvergent för $-1 < x \leq 1$.

33. Härled formlerna (Eulers formler)

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

Ledning: Sätt ix och $-ix$ i stället för x i utvecklingen av e^x.

Ur de båda senaste formlena fås $\cos x + i\sin x = e^{ix}$. Sätte här nx i stället för x, erhålles $\cos nx + i\sin nx = e^{inx} = (e^{ix})^n$. Men $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ varav följer

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n.$$

Detta är *Moivres teorem*. Teckenbyte för x ger oss motsvarande formel: $\cos nx - i\sin nx = (e^{-ix})^n$. Dessa formler giva oss möjlighet att bestämma samtliga rötter till ekvationer av typen $x^n - a = 0$, d.v.s. bestämma samtliga n:te rötterna i ett siffertal. Av dessa äro, om n är jämn, 2 reella och resten imaginära (komplexa), om n är udda, 1 reell och de övriga imaginära (komplexa).

Exempel: Bestäm $\sqrt[5]{27}$.
$\sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{1}$ men $1 = \cos 2k\pi \pm i\sin 2k\pi$ (k ett helt positivt tal). Alltså

$$1^{\frac{1}{5}} = (\cos 2k\pi \pm i\sin 2k\pi)^{\frac{1}{5}} = \cos\frac{2k\pi}{5} \pm i\sin\frac{2k\pi}{5}.$$

Man insätter nu i stället för k värdena 0, 1,2, ...etc., tills alla värdena på $1^{\frac{1}{5}}$ erhållits.

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$1^{\frac{1}{5}} = 1$	$1^{\frac{1}{5}} = \cos 72^\circ \pm i\sin 72^\circ$	$1^{\frac{1}{5}} = \cos 144^\circ \pm i\sin 144^\circ$

Exempel:

34. Bestäm $\sqrt[3]{27}$.

Om man i formeln $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ sätter $x = \pi$ så fås

$$\cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi} \quad \text{eller}$$
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Om denna formel säges i Kasner och Newman *Matematiken och fantasien* på sid. 115: ”Det är alldeles riktigt; denna formel är en fullkomlig paradox; man kan inte förstå den, och man vet inte vad den betyder, men vi ha bevisat den och veta därför, att den måste vara riktig.”

Exempel: Beräkna $\sin 3x$, uttryckt som funktion av $\sin x$ med användande av Moivres teorem.

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \cdot \sin 3x &= (\cos x + i \cdot \sin x)^3 i \\ &= \cos^3 x + 3\cos^x \cdot i \sin x - 3\cos x \cdot \sin^2 x - i \sin^3 x. \end{aligned}$$

Härur fås

$$\begin{aligned} i \cdot \sin 3x &= i \cdot (3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x) = i(3\sin x - 4\sin^3 x) \Rightarrow \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

35. Beräkna på samma sätt $\sin 5x$ och $\cos 5x$.

36. Härled formeln

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (x^2 \leq 1)$$

Sammanfattning

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \dots$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Obestämda funktionsformer

Somliga funktioner av x kunna för vissa x-värden antaga någon av formerna $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ eller $\infty-\infty$. Ett sådant värde antager t.ex. funktionen $\frac{\sin x}{x}$ för $x = 0$. I detta speciella fall har uttrycket $\frac{0}{0}$ värdet 1, d.v.s. då x närmar sig värdet 0, tenderar $\frac{\sin x}{x}$ mot gränsvärdet 1. Vi skola nu se att man i många fall kan finna dylika gränsvärden för funktioner, vilka för et visst värde på x antaga någon av ovanstående former.

A. $\frac{0}{0}$

Antag, att $\frac{f(x)}{g(x)}$ är ett bråk, vari både täljare och nämnare antaga värdetr 0 för $x = a$. Under förutsättning att båda funktionerna och deras derivator äro kontinuerliga i närheten av a, erhålles ut medelvärdesatsen

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$
$$g(a+h) = g(a) + hg'(a+\theta_1 h)$$

Då enligt antagandet $f(a) = g(a) = 0$, fås härur

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta_1 h)} \quad \text{eller}$$
$$\frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta_1 h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Om såväl $f(x)$ som $g(x)$ bli = 0 för $x = a$, är alltså

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exempel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{1} = 1.$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \arctan x - \ln(x^2 + 1)}{2 \cos x + x \cdot \sin x - 2}$

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \cdot \sin x - x \cdot e^x}{e^x - 1}$

40. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 4}{x - 2}$

41. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

B. $\frac{\infty}{\infty}$

Det gränsvärde, som bråket $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ antager för $x = a$, om såväl $f(a)$ som $g(a)$ tendera mot ∞, kan beräknas på följande sätt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

I detta bråk bli täljaren och nämnaren = 0 för $x = a$. Föregående metod tillämpas alltså

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}}{-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{[f(x)]^2}{[g(x)]^2}$$

eller efter division med $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

naturligtvis under förutsättning att $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ närmar sig ett bestämt, ändligt gränsvärde $\neq 0$.

Det kan emellertid bevisas, att satsen gäller även om gränsvärdet är = 0 eller ∞.

Antag att $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{\infty}{\infty} = 0$. Betrakta bråket $\dfrac{f(x)+bg(x)}{g(x)}$. Här är tydligen $\dfrac{f(a)+bg(a)}{g(a)} = \dfrac{\infty}{\infty} = b$. Tillämpas regeln, erhålles $\dfrac{f'(a)+bg'(a)}{g'(a)}$ varav följer, att $\dfrac{f'(a)}{g'(a)} = 0$.

Exempel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 0.$$

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{e^{1/x}}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\cot x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\tan ax)}{\ln(\tan x)}$.

C. $0 \cdot \infty$
Om $f(x) \cdot g(x)$ antager denna form för $x = a$, har man endast att skriva uttrycket på följande sätt $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ och tillämpa samma regel som förut.

Exempel:

$$\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \ln(\tan x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cot x}{\cos^2 x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^3 x} = 0.$$

45. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{\tan \frac{\pi x}{2a}}$.

D. $\infty - \infty$
Antager $f(x) - g(x)$ denna form för $x = a$, kan uttrycket skrivas $f(x) \cdot \left[1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$, varur framgår, att funktionen för $x = a$ blir $= \infty$, såvida ej $\dfrac{g(a)}{f(a)} = 1$. I dtta fall behandlas problemet som i **C**.

Exempel:

46. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

47. $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{1}{\ln(x-3)} - \dfrac{1}{x-4}\right)$

Envelopper

Om i en kurvas ekvation $f(x, y, a) = 0$ ingår en konstant a, som kan antaga olika värden (en *parameter*), så motsvaras varje värde på a av en bestämd kurva, en "individ" i en hel skara kurvor, vilkas ekvation är just den ursprungliga. Om a får ett litet tillskott Δa, erhålles en annan kurva, som i allmänhet endast obetydligt skiljer sig från den förra.Koordinaterna för skärningspunkterna mellan dessa båda närbelägna kurvor satisfiera alltså de båda ekvationerna $f(x, y, a) = 0$ och $f(x, y, a + \Delta a) = 0$ och följaktligen även ekvationen $f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a) = 0$. Denna kan även skrivas

$$\frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0.$$

Låter man nu här Δa tendera mot 0, erhålles tydligen funktionens derivata med avseende på a, varvid x och y betraktas som konstanter. Denna, den s.k. partiella derivatan i avseende på a kan tecknas

$$f'_a(x, y, a) = \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0.$$

Denna ekvation tillsammans med $f(x, y, a) = 0$ anger alltså skärningspunkterna mellan två oändligt närbelägna individer i samma kurvskara. Om a elimineras mellan de båda ekvationerna, erhålles den av a oberoende orten for dessa skärningspunkter. Denna ort benämnes kurvskarans *envelopp*. Eftersom den ständigt passerar genom närbelägna individers skärningspunkter, kommer den att "inhölja" hela kurvskaran.

Exempel:

a) Sök enveloppen till linjerna $y = ax + a^3$
Denna ekvation deriveras med avseende på a, varvid fås $0 = x + 2a^2$, vilket ger $a^2 = -\frac{x}{3}$. Första ekvationen kvadreras och i densamma insättes värdet på a^2. Då fås

$$y^2 = -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{9} - \frac{x^3}{27} \Rightarrow y^2 = -\frac{4x^3}{27}.$$

Enveloppen är alltså en "semikubisk parabel".

b) Konstruera kurvan $y^2 = x^2(x + 2ay)$ samt den kurva, som envelopperas av dess asymptot, då a varierar.
När asymptotens ekvation skall bestämmas, eliminerar man y mellan kurvans ekvation och linjen $y = kx + l$ samt bestämmer k och l så, att minst 2 av skärningspunkterna rycka mot oändligheten, vilket sker därigenom, att koefficienterna för de två högsta digniteterna sättas = 0. Om nämligen koefficienten för högsta digniteten av x i en ekvation tenderar mot 0, så betyder det, att en av rötterna tenderar mot ∞. Antag, att en ekvation kan skrivas: $(ax - b)(x - c)(x - d) \ldots = 0$. Denna har tydligen rötterna $x_1 = b/a$, $x_2 = c$ o.s.v. Om i ekvationen a tenderar mot 0, försvinner högsta digniteten av x, samtidigt med att x_1 tenderar mot ∞.

Ur kurvans ekvation och $y = kx + l$ erhålles

$$k^2x^2 + l^2 + 2klx - x^3 - 2akx^3 - 2alx^2 = 0$$
$$-x^3(1 + 2ak) + x^2(k^2 - 2al) + \ldots = 0.$$

Härur fås $k = \frac{-1}{2a}$ och $l = \frac{1}{8a^3}$. Asymptotens ekvation är alltså $y = -\frac{x}{2a} + \frac{1}{8a^3}$. Sätt här $\frac{1}{2a} = b$, varvid erhålles $y = -bx + b^3$. Denna linjes envelopp är enligt föregående exempel $y^2 = \frac{4}{27}x^3$.

Ibland innehåller den ursprungliga ekvationen 2 konstanter, vilka emellertid äro förbundna med varandra medelst en andra ekvation. Härvid kan man naturligtvis eliminera den ena konstanten, varefter problemet är återfört till den förra typen. Man kan emellertid även förfara på ett annat sätt, vilket framgår av följande exempel.

Sök enveloppen till en linje av konstant längd, som med sina ändpunkter glider utefter koordinataxlarna.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx + ay = ab \tag{1}$$
$$a^2 + b^2 = l^2 \tag{2}$$

Derivera ekv. ! och 2 med avseende på a, varvid b anses som en funktion av a.

$$x\frac{db}{da} + y = a\frac{db}{da} + b \tag{3}$$

$$2a + 2b\frac{db}{da} = 0 \tag{4}$$

Ur dessa båda ekvationer löses $\frac{db}{da}$

$$\frac{db}{da} = \frac{b-y}{x-a}; \quad \frac{db}{da} = -\frac{a}{b}$$

Härur fås $\frac{y-b}{x-a} = \frac{a}{b}$. Denna ekvation sammaställes med ekv. 1 ovan

$$\left.\begin{aligned} by - b^2 &= ax - a^2 \\ bx + ay &= ab \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} b(y-b) &= ax - a^2 \\ a(y-b) &= -bx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{ax - a^2}{-bx}$$

varur erhålles $xl^2 = a^3$ eller $a = \sqrt[3]{xl^2}$. På samma sätt fås $b = \sqrt[3]{yl^2}$.

Dessa båda värden insättas slutligen i ekv. 1, varvid fås

$$\frac{x}{\sqrt[3]{xl^2}} + \frac{y}{\sqrt[3]{yl^2}} = 1, \text{ d.v.s. } x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}.$$

Enveloppen utgöres alltså av ”asteroiden” eller den s.k. fyrspetsiga hypocykloiden.

Sök ekvationen för kaustikan till en konkav halvsfärisk spegel med radie r vid parallellt infallande ljus.

x-axeln lägges utefter spegelns huvudaxel och origo i spegelns medelpunkt. Kaustikan blir tydligen enveloppen för den reflekterade strålen. Dennas ekvation fås ur figuren.

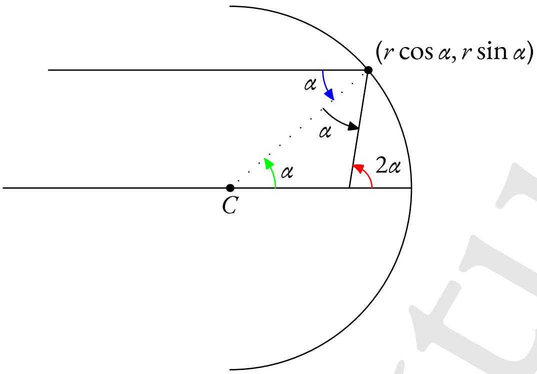

Fig. 2

$$y - r\sin\alpha = \tan(2\alpha \cdot (x - r\cos\alpha)$$

Denna ekvation kan skrivas

$$y \cdot \cos 2\alpha - x \cdot \sin 2\alpha + r \cdot \sin\alpha = 0$$

Här är alltså α parametern.

Efter derivering med avseende på α och teckenbyte fås

$$2y \cdot \sin 2\alpha + 2x \cdot \cos 2\alpha + r\cos\alpha = 0.$$

Ur dessa båda ekvationer lösas x och y med avseende på α, varvid erhålles

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r}{4}(3\cos\alpha - \cos 3\alpha) \\ y &= \frac{r}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Ur dessa båda uttryck kan tydligen α elimineras, varvid man erhåller en ekvation, som endast innehåller variablerna x och y.

Exempel:

48. En rät linje rör sig så, att den av koordinataxlarna avskär sträckor, vilkas produkt är konstant. Sök enveloppen för linjen.

49. Sök enveloppen för ellipser med centrum i origo och axlarna utefter koordinataxlarna och med konstant yta.

50. Sök enveloppen för ellipser med centrum i origo och axlarna utefter koordinataxlarna och vars halvaxlars summa är konstant.

51. Sök enveloppen för parabler med y-axeln till styrlinje och brännpunkterna på en given cirkel med centrum i origo.

52. Sök enveloppen för parabelns normaler (parabelns evoluta). Ledning: Härled först parabelnormalens ekvation som funktion av dess vinkelkoefficient, k, vilken alltså är kurvskarans parameter.

53. Bevisa, att kedjelinjen $x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right)$ är evoluta till tractorian $y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^{-} x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$, om evolutan definieras som normalernas envelopp.

54. Från en rörlig punkt P på parabeln $y^2 = 4ax$ fällas perpendiklarna PA och PB mot koordinataxlarna. Sök enveloppen för AB.

55. Sök enveloppen för de cirklar, vilkas medelpunkter ligga på parabeln $y^2 + 4ax = 0$ och vilka gå genom origo.

56. En punkt rör sig på cirkeln $x^2 + y^2 = 36$. Sök enveloppen för dess polar (tangentkorda), i avseende på ellipsen $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Oskulerande cirkel

Eftersom ekvationen för en cirkel innehåller 3 konstanter (centrumkoordinater och radie), kan man genom varje punkt på en kurva lägga oändligt många cirklar, som i punkten ha tvåpunktsberöring med (tangera) kurvan. Dessa cirklars centra ligga tydligen på kurvans normal i punkten. Bland dessa oändligt många cirklar finnes det emellertid en, som har trepunktsberöring med kurvan. Vanlig tangering innebär ju, att såväl y som y' äro lika för de båda kurvorna. Vid trepunktsberöring är nu dessutom y'' lika. Härigenom kunna ifrågavarande cirkelns (den "oskulerande cirkelns") tre konstanter kunna bestämmas.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$
$$(x-\alpha) + (y-\beta)y' = 0$$
$$1 + (y-\beta)y'' + y'^2 = 0$$

Ur dessa ekvationer fås

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$
$$\alpha = x - \frac{y'[1+y'^2]}{y''}$$
$$r = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''}$$

Här betyda y' och y'' kurvans (och cirkelns) derivator i punkten i fråga.

Krökning och krökningscirkel

En kurvas krökning mellan två punkter definieras som differensen mellan lutningen hos tangenterna i de båda punkterna (se Fig. 3)

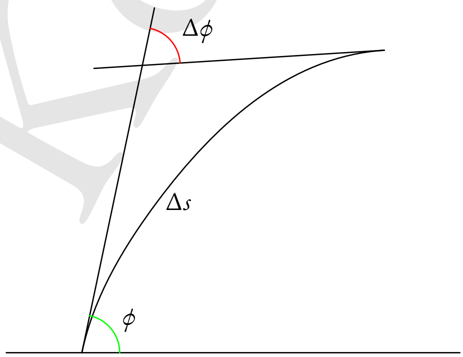

Fig. 3

Medelkrökningen är = krökningen, dividerad med båglängden. Krökningen i en viss punkt är = medelkrökningen på en oändligt kort båglängd = $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$.

Om Δs är mycket litet, kan det anses som en rät linje, varför ur Pytagoras sats erhålles

$$\overline{\Delta s^2} = \overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}; \quad y' = \tan\phi$$

Se f.ö. beräkning av båglängder.

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d \arctan y'}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$
$$= \frac{y''}{[1 + y'^2][1 + y'^2]^{1/2}}.$$

Krökningsmåttet i en viss punkt är alltså = $\frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}$. Tillämpas detta på en cirkel, erhålles $|\frac{d\phi}{ds}| = \frac{1}{r}$.

För den oskulerande cirkeln erhölls nyss $r = \frac{[1 + y'^2]^3/2}{y''}$, varav följer, att en kurvas krökning i en viss punkt är densamma som den oskulerande cirkelns.

Denna kallas därför även ”krökningscirkel” och dess medelpunkt ”krökningscentrum”. Orten för krökningscentrum är kurvans ”evoluta”. Kurvan själv kallas ”evolvent”.

Om krökningscentrums koordinater äro löpande koordinater och kallas ξ, η, så är enligt föregående paragraf

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{y'[1 + y'^2]}{y''} \\ \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$$

Evolutan har förut definierats som enveloppen till en kurvas normaler. Härur fås då

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x).$$

Om detta uttryck deriveras med avseende på x, varvid y betrakrtas som funktion av x, erhålles

$$-y' = \frac{y' + (\xi - x)y''}{y'^2}.$$

Ur dessa båda ekvationer lösas ξ och η. Då fås

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{y'[1 + y'^2]}{y''} \\ \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$$

Härav framgår överensstämmelsen mellan de båda definitionerna.

Exempel: Sök enligt denna metod ekvationen för parabelns evoluta.

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ yy' = 2a \\ yy'' + y'^2 = 0 \end{cases}$$

Sätt in dessa värden på y' och y'' i uttrycken på ξ och η och vi får efter förenkling

$$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{y^2 + 4a^2}{2a} \\ \eta = y - \dfrac{y^3 + 4a^2 y}{4a^2} \end{cases}$$

Insätt här $x = \dfrac{y^2}{4a}$ ur parabelns ekvation

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{3y^2 + 8a^2}{4a} \\ \eta = -\dfrac{y^3}{4a^2} \end{cases}$$

Om y elimineras ur dessa ekvationer, fås evolutans ekvation

$$\eta^2 = \frac{4(\xi - 2a)^3}{27a}.$$

Sök på samma sätt ellipsens evoluta.
Svar: $\left(\frac{\xi}{t}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta}{u}\right)^{2/3} = 1$, där $t = \frac{c^2}{}$ och $u = \frac{c^2}{b}$.

Ellipsevolutans form påminner om asteroidens, men de båda axlarna äro olika långa.

Exempel:

57. Bevisa, att hos kedjelinjen, vars ekvation kan skrivas $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, krökningsradien i en godtycklig punkt är tredje proportional till a och punktens ordinata samt att sträckan mellan punktens (x, y) krökningscentrum och punkten $(x, 0)$ halveras av linjen $\eta = y$.

58. Sök asteroidens krökningsradie.

59. Bevisa, att krökningsradien i en punkt på parabeln är dubbelt så stor som den del av normalen, som ligger mellan kurvan och styrlinjen.

60. Normalen i en punkt P på en ellips med centrum i O råkar storaxeln i punkten A. P:s krökningscentrum ligger i C. För vilket läge hos P är triangeln OAC störst?

61. Bevisa, att $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{y'}$, d.v.s. att evolventens normal är tangent till evolutan. (Ledning: Bestäm $\frac{d\eta}{dx}$ och $\frac{d\xi}{dx}$) ur uttrycken för η och ξ. Genom deras division dås då $\frac{d\eta}{d\xi}$.

Singulära punkter

Ekvationen för en algebraisk kurva, som går genom origo, kan skrivas $R_2 + ax + by = 0$, om man med R_2 menar sammanfattningen av alla termer av andra och högre grad. Låter man i denna ekvation x och y tendera mot 0, kommer R_2 att gå mot 0 hastigare än $ax + by$. Inom ett oändligt litet område i närheten av origo kan alltså linjen $ax + by = 0$ ersätta kurvan. Detta innebär tydligen, att denna linje är tangent till kurvan i origo. I detta fall har alltså kurvan endast en tangent i origo. Denna punkt är en vanlig punkt.

Annorlunda blir det, om även termer av första graden saknas. I så fall kan ekvationen skrivas $R_3 + ax^2 + bxy + cy^2 = 0$. Härvid kommer kurvan att i origo representeras av det ”oegentliga kägelsnittet” $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$. Löses denna ekvation med avseende på y kunna tre fall inträffa.

1) De båda rötterna äro rella och olika. Ekvationen representeras alltså av två reella linjer, vilka skära varandra i origo. Kurvan har två skilda reella tangenter i origo, f.v.s. kurvan har i origo två olika grenar. En sådan punkt kallas en ”dubbelpunkt”. (Se fig. 4)

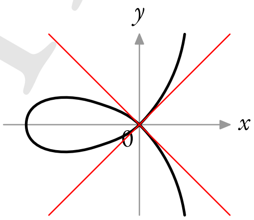

fig. 4

2) De båda rötterna äro reella och lika. I detta fall komma de båda tangenterna att sammanfalla. Kurvan har i origo två sammanfallande tangenter. En sådan punkt kallas en ”spets”. (Se fig. 5)

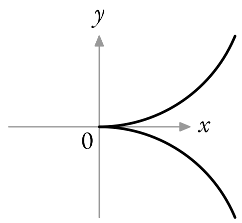

fig. 5

3) De båda rötterna är imaginära. Origos koordinater satisfiera kurvans ekvation, origo hör alltså till kurva, men några reella tangenter kunna ej dragas i denna punkt. En tangent fordrar minst två sammanfallande skärningspunkter med kurvan. Här finnas alltså ej två punkter i omedelbar närhet av varandra. Punkten är ensam. Den brukar benämnas ”isolerad punkt”.

Om den singulära punkten ligger i en annan punkt än origo, flyttar man koordinatsystemets origo till denna punkt och genomför sedan undersökningen på samma sätt.[1]

Exempel:

62. Konstruera kurvan $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

63. Konstruera kurvan $x^3 + y^3 - 3ay^2 = 0$.

64. Konstruera kurvan $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (Lemniskatan)

65. Konstruera kurvan $x^3 + xy^2 = 3x^2 - y^2$.

66. Konstruera kurvan $y^2 - x^3 + 2x^2 = 0$.

67. Konstruera kurvan $y = 2x - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

68. Konstruera kurvan $y^2 + x^3 = x^2$.

[1]Denna metod för uppsökande av singulära punkter kan i vissa fall slå fel. Sålunda har t.ex. kurvan $x^4 = y^4 - y^2$ ej spets utan isolerad punkt i origo. För studiet av dylika fall hänvisas till större läroböcker i ämnet.

Integralkalkyl

Integralkalkylen handlar om att söka den ursprungliga funktionen till en given derivata. Den kan alltså anses vara omvändningen till differentialkalkylen.

Om t.ex. $\frac{dy}{dx} = 4x^3$, så är det tydligt att denna erhållits genom derivering av $y = x^4$. Man kallar $y = x^4$ ”integralen” (eller ”primitiva funktionen”) till derivatan $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ eller till differentialen $dy = 4x^3 dx$ och skriver

$$y = \int 4x^3\, dx = x^4.$$

Integralen till differentialen $dy = f(x)dx$, d.v.s. $y = \int f(x)\, dx$ (utläses: ”integral $f(x)dx$”), är den funktion som, om den deriveras med avseende på x, ger $f(x)$. $f(x)$ benämnes integranden. Eftersom derivatan av en konstant är $= 0$, är t.ex. $\int 4x^3\, dx = x^4 + C$, där C är en godtycklig konstant kallad integrationskonstant.

Alla elementära funktioner kunna deriveras, men det är långt ifrån alla, vilkas integraler kunna beräknas, uttryckta i enkla, förut bekanta funktioner.[2] Vi skola nu dels se exempel på funktioner, vilka omedelbart kunna integreras, dels ange några metoder, enligt vilka en del icke direkt integrerbara funktioners integraler kunna beräknas. uttryckta i förut bekanta funktioner.

Omedelbar integration

Funktioner, vilka utgöra derivatan till en känd funktion kunna omedelbart integreras. (Tills vidare utelämnar vi integrationskonstanten.)

[2] Analoga förhållanden förefinnas inom andra områden av matematiken. Sålunda kunna t.ex. alla hela tal kvadreras, varvid även kvadraterna uttryckas i hela tal. Däremot kan den omvända operationen, kvadratrosutdsragning, ej utföras vid alla heltal, för så vitt man ej inför nya storheter, irrationella tal och imaginära tal.

Hit höra t.ex. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, enär $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$.

$\int \sin x\,dx = -\cos x$ (enär $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$)

$\int \cos x\,dx = \sin x$

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$

$\int \frac{1}{\cos^x}\,dx = \tan x$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$

$\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x}$

(man kontrollerar svaren genom derivation av högra ledet.)

Integration genom substitution

Ofta kan man genom en substitution införa en ny variabel, varigenom integrationen kan utföras. Metoden åskådliggöres bäst genom några exempel

a) $y = \int (a+bx)^n\,dx$; sätt här $a + bx = u$, så fås $bdx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{b}$; dessa värden insättas, varvid erhålles

$$y = \int u^n \frac{du}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$$

b) $y = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; sätt $x = au$; $dx = a \cdot du$, så fås

$$y = \int \frac{a \cdot du}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u = \arcsin \frac{x}{a}$$

c) $\int x\sqrt[n]{ax+b}\,dx$; sätt $\sqrt[n]{ax+b} = u$; $ax + b = u^n$; $a \cdot dx = n \cdot u^{n-1} \cdot du$.

$$y = \int \frac{u^n - b}{a} \cdot u \cdot \frac{n \cdot u^{n-1}}{a}\,du = \frac{n}{a^2} \int (u^{2n} - bu^n)\,du = \frac{n}{a^2}\left(\frac{u^{2n+1}}{2n+1} - \frac{bu^{n+1}}{n+1}\right) \text{ o.s.v.}$$

Exempel:

69. $\int \tan x \, dx$ (sätt $u = \cos x$)

70. $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$ (sätt $u = \tan(x/2)$)

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ (sätt $\sqrt{a^2 \pm x^2} = u - x$)

72. $\int \sin 5x \, dx$

73. $\int \sin^2 x \, dx$ (använd formeln $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$)

74. $\int a^{4x} \, dx$

Ofta är det lämpligt att i stället för variabeln x införa en trigonometrisk funktion, s.k. "trigonometrisk substitution". På detta sätt beräknas t.ex.

$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$. Sättes här $x = a \cdot \sin u$, fås $dx = a \cos u \, du$, varvid integralen kan skrivas

$$\int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} \cdot a \cos u \, du = a^2 \int \cos^2 u \, du$$

Denna integral beräknas på samma sätt som $\int \sin^2 u \, du$, varvid erhålles $\frac{a^2}{2} u + \frac{a^2}{4} \cdot \sin 2u$. Insättes värdet på u, fås slutligen

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Integraler av formen $\int f(e^x) \, dx$ förenklas med användande av substitutionen $e^x = u$ $(ex \cdot dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{u})$

Exempel:

$$\int \frac{e^x}{e^x + a} \, dx = \int \frac{du}{a + u} = \ln(a + u) = \ln(a + e^x)$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{du}{u\left(u + \frac{1}{u}\right)} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u = \arctan e^x$$

Exempel:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \frac{3}{4}\int (u^4 - u)\,du = \frac{3}{5}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{40}\sqrt[3]{(2x+1)^3}(4x-3)$$

Integraler av typen $\int f(\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx)$ överföres till typen $\int (\sqrt{x^2 \pm a^2})\,dx$ genom komplettering av kvadraten.

Exempel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \ln(u + \sqrt{4 + u^2})$$
$$= \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5})$$

Integration genom sönderdelning (Delvisintegration, Partiell integration)

Denna metod bygger på formeln för derivation av en produkt

$$\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

varur genom integration erhålles

$$\int \frac{duv}{dx}\,dx = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx,$$

eller då $\int \frac{duv}{dx}\,dx = \int d(uv) = uv$

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx \quad \text{d.v.s.}$$

$$\int u \frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v \frac{du}{dx}\, dx$$

Följande exempel klargöra metoden:

$$\int x \cdot \sin x\, dx = \int x \frac{d(-\cos x)}{dx}\, dx = -x \cos x - \int -\cos x \frac{dx}{dx}\, dx$$
$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x$$

Här motsvaras alltså u av x och v av $-\cos x$.

$$\int \ln x\, dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{dx}\, dx = x \cdot \ln x - \int x \frac{d \ln x}{dx}\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x.$$

Exempel:

75. $\int x \cdot \ln x\, dx$

76. $\int x \cdot a^x\, dx$

77. $\int \sin x \cos x e^{\sin x}\, dx$

78. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$

79. $\int e^{ax} \cdot \sin bx\, dx$

80. $\int \arctan x\, dx$

Ibland händer det att metoden måste upprepas, innan man kommer till en integral, som slutligen kan beräknas, som följande exempel visar:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos ax\,dx &= \int \frac{x^2}{a}\frac{d\sin ax}{dx}\,dx = \frac{x^2}{a}\sin ax - \int \frac{\sin ax}{a}\frac{dx^2}{dx}\,dx \\ &= \frac{x^2}{a}\sin ax - \int \frac{\sin ax}{a}\cdot 2x\,dx \\ &= \frac{x^2}{a} + \int \frac{2x}{a^2}\frac{d\cos ax}{dx}\,dx \\ &= \frac{x^2}{a}\sin ax + \frac{2x}{a^2}\cos ax - \int \frac{2\cos ax}{a^2}\cdot\frac{dx}{dx}\,dx \\ &= \frac{x^2}{a}\sin ax + \frac{2x}{a^2}\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax.\end{aligned}$$

Integration genom uppdelning i partialbråk

Denna metod användes vid integration av bråk. Bråket kan därvid uppdelas i partialbråk, vilka till nämnare ha var och en av de faktorer, vari det ursprungliga bråkets nämnare kan uppdelas. Partialbråkens täljare bestämmas genom att bråken göras liknämniga och den då erhållna täljaren göres identisk med det ursprungliga bråkets täljare. Sedan partialbråken bestämts, integreras vart och ett för sig.

Här kunna tre olika fall inträffa:

1) Nämnarens nollställen äro reella och olika. Partialbråkens nämnare utgöres av defaktorer, vari det ursprungliga bråkets nämnare kan upplösas. Täljarna äro konstanter, A, B, C o.s.v., vilka till en början äro obekanta men som bestämmas som ovan sagts

Exempel:

$$\int \frac{3x^2 - 10x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,dx$$

Nämnaren har nollställena +1, −2 och +2. Alltså kan den skrivas

$$(x-1)(x+2)(x-2).$$

Vi sätta alltså

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+10x+4}{x^3-x^2+4x+4} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x^2+4)+B(x^2-3x+2)+C(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

Då det första och det sista av dessa bråk äro identiska, äro koefficienterna för samma dignitet av x i täljarna i vänstra och högra membrum lika.

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A+B+C \\ -10 &= -3B+C \\ 4 &= -4A+2B-2C \end{aligned}\right\}$$

Härur fås $A = 1$; $B = 3$; $C = -1$; varav följer

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}\,dx &= \int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{3\,dx}{x+2}-\int\frac{dx}{x-2} \\ &= \ln(x-1)+3\ln(x+2)-\ln(x-2) \\ &= \ln\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2}.\end{aligned}$$

2) Av nollställena, som alla äro reella, äro några eller alla lika. Partialbråken fås på följande sätt:

$$\frac{Px^2+Qx+R}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}.$$

Sedan förfares på samma sätt.

Exempel:

$$\int \frac{3x^2-3x-4}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx.$$

Nämnaren har nollställen 2, 1 och 1. Härav följer att bråket kan skrivas

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

På samma sätt som i fall 1) fås

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A + B \\ -3 &= -2A - 3B + C \\ -4 &= A + 2B - 2C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 1 \\ C &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Härav följer att den sökta integralen är

$$\begin{aligned} \int \frac{2\,dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{4\,dx}{(x-1)^2} &= 2\ln(x-1) + \ln(x-1) - \frac{4}{x-1} \\ &= \ln[(x-2)^2(x-1)] - \frac{4}{x-1}. \end{aligned}$$

3) Av nollställena är några eller alla komplexa

$$\frac{Px^2 + Qx + R}{(x-a)(x^2+b^2)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx + C}{x^2 + b^2}$$

Exempel:

$$\int \frac{3x^2 - 3x - 8}{(x-3)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right) dx$$
$$= \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx = \ln(x-3) + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3\,dx}{x^2+1}$$
$$= \ln(x-3) + \ln(x^2+1) + 3\arctan x = \ln[(x-3)(x^2+1)] + 3\arctan x.$$

Exempel:

81. $\displaystyle\int \frac{2x + 34}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}\,dx$

82. $\displaystyle\int \frac{5x + 12}{x^2 + 5x + 6}\,dx$

83. $\displaystyle\int \frac{38 - 16x - 4x^2}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}\,dx$

84. $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 5x - 3}{x^3 - 3x^2}\,dx$

85. $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 10x^2 + 8x - 1}{(x-1)^3 \cdot x}\,dx$

86. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{(x+2)(x^2+2)}\,dx$

87. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (Ledning: uppdela i heltalsdel och bråkdel.)

Integraler av formen $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

Dessa kunna direkt beräknas. Om nämligen $\dfrac{dy}{dx} = \ln f(x)$, så är och alltså $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = y = \ln f(x)$.

Exempel:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)$$
$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x.$$

Exempel:

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}$

89. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + a}\,dx$

90. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

Integraler av formen $\displaystyle\int f(x)\cdot f'(x)\,dx$

Dessa kunna även direkt beräknas. Om $y = \big(f(x)\big)^2$ så är $deryx = 2f(x)\cdot f'(x)$ och alltså

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{\big(f(x)\big)^2}{2}.$$

Exempel:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2}.$$

Blandade exempel:

91. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx$

92. $\displaystyle\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

93. $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln x\,dx$

94. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

95. $\displaystyle\int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx$

96. $\displaystyle\int e^{\arcsin x}\,dx$

97. $\displaystyle\int \frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

98. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+3x-1}{x^3-1}\,dx$

99. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$

100. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx$

101. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}$

102. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

103. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

104. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

105. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

106. $\displaystyle\int \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

107. $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2}\,dx$

108. $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+a)}{x^2}\,dx$

109. $\displaystyle\int \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin^3 x}\,dx$

Bestämda integraler

I de integraler, som förut beräknats, ingick alltid en godtycklig konstant (C). Därför kallades dessa integraler för "obestämda integraler". Om man en gång har valt ett visst värde på C, får under räkningens lopp ändring i detta värde ej ske. Om integrationskonstanten ej utsättes vid integralens värde, kan det hända att man kommer till olika resultat om man vid beräkningen använder olika metoder. Dessa resultat skilja sig då från varandra endast genom en konstant term. Ett exempel härpå är följande. $\int (x+1)^2\,dx$ kan beräknas på två sätt. Med substitutionen $x+1=u$, fås

$$\int u^2\,dx = \frac{u^3}{3} = \frac{(x+1)^3}{3} = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3}.$$

Om man däremot utvecklar kvadraten fås

$$\int (x^2+2x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x.$$

Om konstanten har bestämts, är tydligen integralen funktion av endast x.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

I detta uttryck kan man på höger sida tilldela x ett bestämt värde b och alltså skriva $F(b) + C$. På vänster sida är detta uteslutet, ty db, som ju anger en förändring av b, är 0 om b är konstant. Man använder därför ett annat sätt att uttrycka samma sak, t.ex.

$$\int^{b} f(x)\,dx = F(b) + C.$$

För ett annat värde a på x fås alltså

$$\int^{a} f(x)\,dx = F(a) + C.$$

Ur dessa båda ekvationer elimineras C

$$\int^{b} f(x)\,dx - \int^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Vänstra ledet skrives enklare $\int_a^b f(x)\,dx$. Detta uttryck är en ”bestämd integral” eller en ”definit integral”. Den är oberoende av integrationskonstant och är lika med differensen mellan den obestämda integralens värde för den övre och undre gränsen.

Exempel: Beräkna

$$\int_1^2 (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)\,dx = \left[\left(\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x\right)\right]_1^2$$
$$= \frac{16}{4} + \frac{4 \cdot 8}{3} + \frac{5 \cdot 4}{2} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{4}{3} - \frac{5}{2} - 2 = \frac{271}{12}$$

(Tecknet $[]_a^b$ kallas ”substitutionstecken” och dess betydelse framgår av $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$)

Exempel:

110. $\displaystyle\int_0^a \frac{x\,dx}{a^2}$

111. $\displaystyle\int_0^e e^x\,dx$

112. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos px\,dx$

113. $\displaystyle\int_0^n \sqrt{\frac{n-x}{x}}\,dx$

114. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

115. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$

116. $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^x\,dx$

117. $\displaystyle\int_0^{10} \arccos\frac{x-5}{5}\,dx$

118. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

119. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \cdot \sin bx\,dx\ (a > 0)$

120. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2-1}$

121. $\displaystyle\int_1^3 x^2 \cdot \ln x\,dx$

122. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$. Denna integral kan beräknas på följande sätt. Om man kallar densamma u och deriverar den med avseende på b (som kan betraktas som en variabel) fås

$$\frac{du}{db}] = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx.$$

Denna integral kan beräknas på samma sätt som i ett föregående problem varvid erhålles

$$\left[\frac{-a \cos bx + b \sin ax}{a^2 + b^2} \cdot e^{-ax}\right]_0^\infty = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Alltså är $\frac{du}{db} = \frac{a}{a^2 + b^2}$ eller $u = \arctan \frac{b}{a}$. Någon integrationskonstant behövs ej här enär u blir $= 0$ samtidigt med b för vilket positivt värde som helst för a.

Om man låter a tendera mot 0 och b mot 1 fås

$$\int_0^\infty \frac{sinx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ur definitionen på bestämd integral följer omedelbart

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$$
$$= \int_a^c f(x)\, dx$$

och på samma sätt

$$\int_a^c f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_b^c f(x)\, dx$$

och

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Derivering av en integral med avseende på gränsen

Om man till övre gräns väljer en variabel u, så är $\int_a^u f(x)\, dx = F(u) - F(a)$ en funktion endast av u men icke av x. Enligt definitionen på integraler fås då

$$\frac{d \int_a^u f(x)\, dx}{du} = \frac{dF(u)}{du} = f(u).$$

Derivatan av en bestämd integral med avseende på övre gränsen är alltså = integranden.

Om undre gränsen är en variabel v fås

$$\frac{d\int_v^b f(x)\,dx}{dv} = -f(v).$$

Dessa båda formelr kunna även skrivas

$$d\int_a^u f(x)\,dx = f(u)du$$

$$d\int_f (x)\,dx = f(v)dv.$$

Med hänsyn till betydelsen av differential kan den första av dessa formler skrivas

$$\int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx - \int_a^u f(x)\,dx = \int_u^{u+\Delta u} f(x)\,dx = f(u)\Delta u$$

om Δu är ett litet tillskott. Härur fås

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+\Delta u} f(x)\,dx &= f(a)\cdot\Delta u \\
\int_{a+\Delta u}^{a+2\Delta u} f(x)\,dx &= f(a+\Delta u)\cdot\Delta u \\
\int_{a+2\Delta u}^{a+3\Delta u} f(x)\,dx &= f(a+2\Delta u)\cdot\Delta u \\
&\vdots \\
\int_{a+(n-1)\Delta u}^{a+n\Delta u} f(x)\,dx &= f(a+(n-1)\Delta u)\cdot\Delta u
\end{aligned}$$

Om dessa ekvationer summeras, fås

$$\int_a^{a+n\Delta u} f(x)\,dx = \Delta u\big[f(a) + f(a+\Delta u) + f(a+2\Delta u) + \ldots + f(a+(n-1)\Delta u)\big]$$

Om man här sätter $a + n\cdot\Delta u = b$ och låter n tendera mot ∞ och samtidigt Δu mot 0, erhålles

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta u\to 0}\Delta u\big[f(a) + f(a+\Delta u) + \ldots + f(b-\Delta u)\big]$$

Den bestämda integralen kan alltså uppfattas som ”en summa av oändligt många oändligt små termer”.

Integraltecknet ($\int$) är också ett stiliserat summatecken ($\sum$).

Beräkning av vissa ytors storlek (kvadratur)

Rätvinkliga koordinater

Antag att den yta, som begränsas av kurvan $y = f(x)$, två ordinator samt x-axeln mellan dessa, d.v.s. mellan a och b, skall beräknas. Denna yta betecknas med A. En liten del av denna, ett ”ytelement”, som begränsas av två närbelägna ordinator, däremellan liggande del av x-axeln, samt tillhörande kurvdel, kallas ΔA. Är Δx tillräckligt litet, kan ΔA betraktas som ett parallelltrapets med höjden Δx. Dess yta blir alltså $\Delta A = y \cdot \Delta x$; om y är längden av den ordinata, som ligger mitt emellan de båda angränsande ordinatorna.

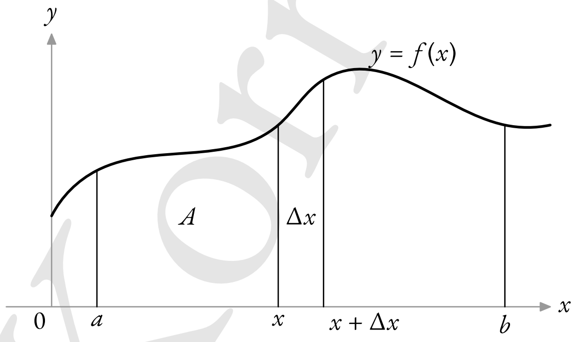

fig. 6

om Δx och alltså också ΔA tendera mot 0, kan A uppdelas i en oändlig mängd oändligt små ytelement av formen $\Delta A = y \cdot \Delta x$. Summan av dessa kommer att utgöra integralen $\int_a^b y\,dx$.

Enligt första exemplet är alltså den yta, som begränsas av kurvan $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$, ordinatorna $x = 2$ och $x = 1$ samt x-axeln, alltså $= \frac{271}{12}$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\big[\cos x\big]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

Obs! Man får ej integrera över ett nollställe där funktionen byter tecken, ty den yta, som ligger under x-axeln räknas negativ, varför man ej erhåller summan av ytorna $A + B$ utan $A - B$ (se fig. 7)

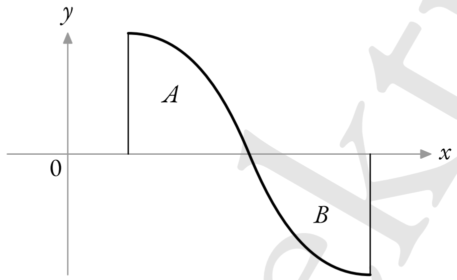

fig. 7

Exempel härpå är följande:

$$\int_0 2\pi \sin x \, dx = -\big[\cos x\big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0.$$

Rätta värdet på utan är naturligtvis 4.

Exempel:

123. Från en punkt på parabeln $y^2 = 4ax$ äro normalerna dragna mot x- och y-axeln. Hur delas den då bildade rektangeln av parabeln?

124. Samma fråga beträffande den ”semikubiska parabeln” $py^2 = x^3$.

125. Sök ytan av ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

126. Sök ytan mellan x-axeln och den del av kurvan $yx^2 = 1$, som ligger till höger om $x = 1$.

Om den sökta utan begränsas av flera kurvor, uppdelas den i delar, varedera begränsad av endast en kurva samt ordinator och x-axel.

Exempel: Sök den yta, som begränsas av kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos x$ mellan $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{5\pi}{4}$. (Rita figur.) Kallas ytan för A fås

$$\frac{A}{2} = \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \, dx = -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{4} - \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}.$$

Alltså är $A = 2\sqrt{2}$.

127. Sök den yta, som begränsas av parabeln $y^2 = ax$ och cirkeln $y^2 = 2ax - x^2$.

Några fysikaliska tillämpningar

a. Sök den kraft, varmed en lång, lineär elektrisk ström (I) påverkar en magnetpol av styrkan m på avståndet a från strömmen.

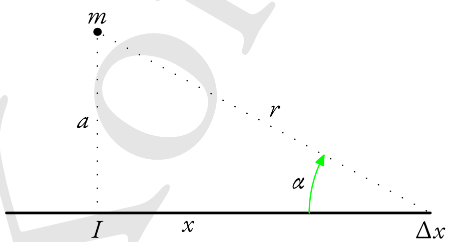

fig. 8

Enligt Biot-Savarts lag påverkar strömelementet Δx magnetpolen med kraften $\Delta K = \frac{mI\Delta x \cdot \sin \alpha}{r^2}$ (se fig. 8). Efter limesövergång och integration erhålles härav

$$K = mI \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \, dx}{r^2} = mIa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}.$$

Sätt här $x = a \cdot \tan u$. Härur erhålles $dx = \dfrac{a}{\cos^2 u} du$ och

$$K == mIa \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{a^2}\, du = \frac{2mI}{a}.$$

Kraften är alltså omvänt proportionell mot avståndet mellan polen och strömmen.

b. Sök läget av tyngdpunkten hos en homogen rät cirkulär kon.
Om tyngdpunkten ligger på höjden på avståndet a från spetsen, så är konens vridningsmoment kring spetsen $\dfrac{B_0 \cdot h \cdot d}{3} \cdot a$ (B_0 = basytan; h = höjden; d = tätheten). Detta moment kan även beräknas på följande sätt:

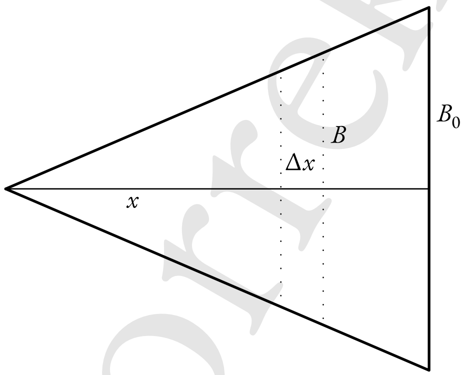

fig. 9

Momentet av en mycket tunn skiva med tjocklek Δx och på avståndet x från spetsen är $\Delta M = B \cdot \Delta x \cdot d \cdot x$. Hela momentet fås genom integration:

$$M = \int_0^h B \cdot d \cdot x\, dx = \frac{B_0 d}{h^2} \int_0^h x^3\, dx = \frac{B_0 h^2 d}{4},$$

varav följer att $a = \dfrac{3h}{4}$.

c. Beräkna potentialen i en punkt på avståndet r från en magnetpol m. Enligt definitionen är potentialen i en punkt det arbete, som erfordras för att föra en enhetspol från oändligheten till punkten. Arbetet längs vägelementet Δr på avståndet r från punkten är

$$\Delta A = \frac{m}{r^2}\Delta r; \quad \therefore A = \int_r^\infty \frac{m}{r^2}\,dr = \frac{m}{r}.$$

Potentialen avtager alltså omvänt mot avståndet.

d. Beräkna effektiva strömstyrkan i en induktionsfri ledare hos en växelström, där sambandet mellan strömstyrka och tid uttryckes genom formeln $I = I_o \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$. T är alltås tiden för en hel svängning, en period.

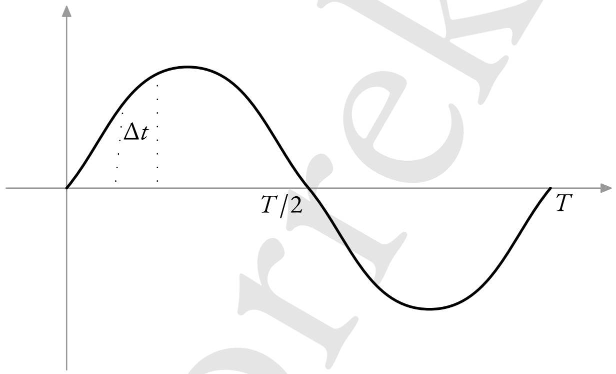

fig. 10

Under den korta tiden Δt, under vilken I kan anses vara i det närmaste konstant, är den utvecklade energimängden ΔW (enligt formeln $W = RI^2 t$)

$$\Delta W = RI_0^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t \cdot \Delta t.$$

Efter limesövergång och integration erhålles

$$W = \int_0^{T/2} RI_0^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t\,dt.$$

För beräkning av denna integral användes samma metod som i ex. 73

$$W = \int_0^{T/2} RI_0^2 \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T} t}{2}\, dt = \frac{RI_0^2}{2} \int_0^{T/2} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t\right) dt$$
$$= \frac{RI_0^2}{2} \Big[t - \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{T} t\Big]_0^{T/2} = \frac{RI_0^2}{2} \cdot \frac{T}{2}.$$

Då detta är den under tiden $\frac{T}{2}$ utvecklade energin, blir alltså växelströmmens effekt $\frac{RI_0^2}{2}$. Om en likström med styrkan I har samma effekt, fås alltså $RI^2 = \frac{RI_0^2}{2}$, varur erhålles den "effektiva strömstyrkan" $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

d. Beräkna den elektricitetsmängd, som under tiden $\frac{T}{2}$ passerar ett tvärsnitt av en växelströmsledning, genom vilken ovannämnda ström flyter.

Enligt formeln $Q = I \cdot t$ (Q = elektricitetsmängd) fås

$$\Delta Q = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t\, \Delta t \quad \text{eller} \quad Q = \int_0^{T/2} I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t\, dt$$

vilket ger

$$Q = \Big[-I_0 \frac{T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} t\Big]_0^{T/2} = -I_0 \frac{T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + I_0 \frac{T}{2\pi} \cos 0 = I_0 \frac{T}{\pi}.$$

Eletricitetsmängden under en halv period är alltså $\frac{I_0 T}{2\pi}$.

f. Hur stor skulle hastigheten vara hos en kula, som skulle röra sig rätlinigt ut i rymden, vinkelrätt mot jordytan, utan att återkomma? Hänsyn tages ej till luftmotståndet.

Kroppen skulle ha samma utgångsenergi som den slutenergi, den skulle få vid fall från oändligheten. Om jordradien är r, kroppens tyngd vid jordytan $= p$ och jordens attraktionskraft $= k$ på avståndet x från jordens medelpunkt, fås $\frac{k}{p} = \frac{r^2}{x^2}$; $k = \frac{pr^2}{x^2}$.

Energitilskottet under förflyttningen Δx är alltså $= \frac{pr^2}{x^2} \cdot \Delta x$ och totala energin blir

$$= \int_2^\infty \frac{pr^2}{x^2}\, dx = \frac{mv^2}{2}.$$

Här betyder v sluthastigheten.

$$\frac{mv^2}{2} = mgr^2\Big[-\frac{1}{x}\Big]_r^\infty = mgr.$$

Således blir $v = \sqrt{2gr} = 11\,200\,\mathrm{m/s}$. Flykthastigheten från jorden är alltså ca 11 kilometer per sekund.

Polarkoordinater

Sök den yta, som begränsas av två radier och mellanliggande båge.

Tag O till medelpunkt för en cirkel med r till radie. Den del, som ligger mellan de båda radierna r och $r + \Delta r$ är $r \cdot \Delta v$, och kan betraktas som en rät linje, om Δv är liten. Ytelementet ΔA blir alltså summan av en cirkelsektor och en rätvinklig triangel.

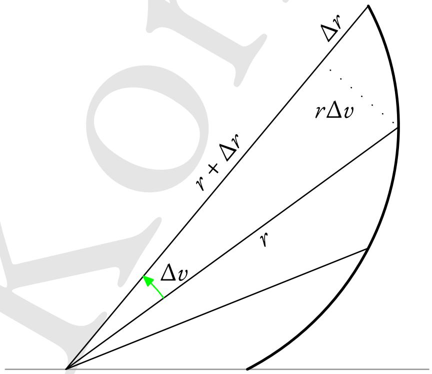

fig. 11

$$\Delta A = \frac{r^2 \Delta v}{2} + \frac{\Delta r \cdot r\Delta v}{2}$$

efter division och limesövergång fås (enär $\lim_{\Delta v} \Delta r = 0$)

$$\frac{dA}{dv} = \frac{r^2}{2}.$$

Exempel: Sök den yta som inneslutes inom ”lemniskatan” $r^2 = a^2 \cos 2v$.

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a^2}{2} \cos 2v \, dv = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2v \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \frac{a^2}{4} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{-\pi}{2} \right] = \frac{a^2}{2}.$$

Hela ytan är alltså a^2.

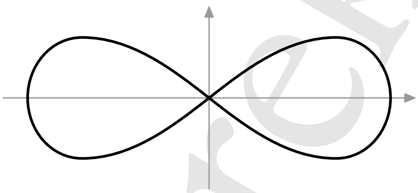

fig. 11 Lemniskatan

128. Sök ”cardioidens” yta. Cardioidens ekvation är $r = 2a(1 + \cos v)$, varur dess utseende lätt erhålles.
129. Sök hela ytan inom kurvorna
    a) $r = a \sin v$,
    b) $r = 2a \cos v$.

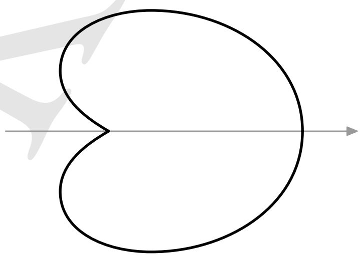

fig. 13 Cardioiden

130. Sök ytan av sektorn mellan radierna r_1 och r_2 hos ”Archimedes spiral” $r = a \cdot v$.
131. Samma uppgift beträffande ”logaritmiska spiralen” $r = e^{a \cdot v}$.

Beräkning av vissa kurvbågars längd (rektifikation)

Rätvinkliga koordinater

Antag att längden av bågen av kurvan $y = f(x)$ mellan de punkter, vilkas abskissor äro a och b är s. En liten del av denna (ett ”bågelement”) Δs, liggande mellan x och $x + \Delta x$, kan betraktas som en rät linje. Ur den rätvinkliga triangeln erhålles då

$$\overline{\Delta s}^2 = \overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2$$

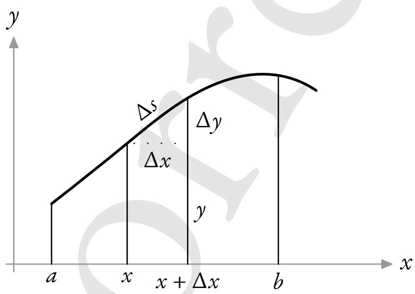

fig. 14

eller efter limesövergång och kvadratrotsutdragning

$$ds = \sqrt{\overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta y}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Alltså $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ eller $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

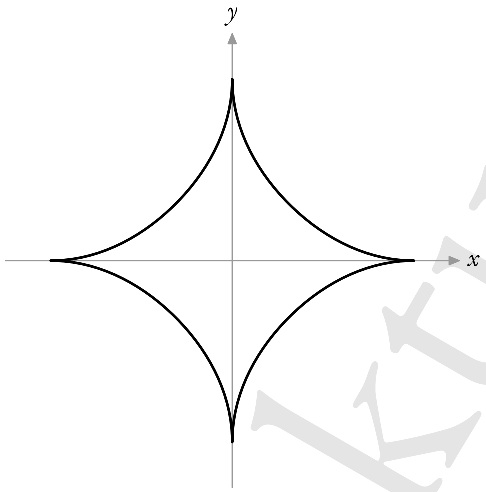

fig. 14 Asterioden

Exempel: Beräkna båglängden hos "asteroiden" $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Av ekvationen framgår utseendet av kurvan. Dess skärningspunkter med axlarna ligga på avståndet $\pm a$ från origo. Längden av bågen i första kvadranten är alltså

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

y' beräknas ur asteroidens ekvation på följande sätt (implicit derivering)

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' = 0; \quad y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^a \frac{\sqrt{x^{2/3} + y^{2/3}}}{x^{1/3}}\, dx$$

Här är täljaren = $a^{1/3}$ enligt kurvans ekvation. Alltså

$$s = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = \left[a^{1/3} \cdot \frac{2}{4} \cdot x^{2/3}\right]_0^a = \frac{3}{2}a.$$

Hela längden av kurvan är alltså $6a$.

132. Beräkna längden av kurvan $y = \ln \sin x$ mellan $x = \dfrac{\pi}{3}$ och $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

133. Beräkna längden av "öglan" i kurvan $y = \dfrac{x(x-3a)^2}{9a}$.

134. Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{x^2 - \ln x^2}{2}$ mellan de punkter, vilkas abskissor äro 1 och e.

135. Beräkna längden av "kedjelinjen" $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ (den kurva, en i sina ändpunkter upphängd homogen, tung kedja bildar) mellan de punkter, vilkas abskissor äro 0 och a.

136. För vilken kurva är $s = \dfrac{x}{8}\left(x^2 + 4\right)^{3/2}$, räknat från origo?

137. Om σ är evolutans båglängd och ϱ är evolventens krökningsradie, så är $(\sigma')^2 = (\varrho')^2$.

Polarkoordinater

Om ekvationen för den kurva, som skall rektifieras, är given i polarkoodinater, kan båglängden beräknas på följande sätt:

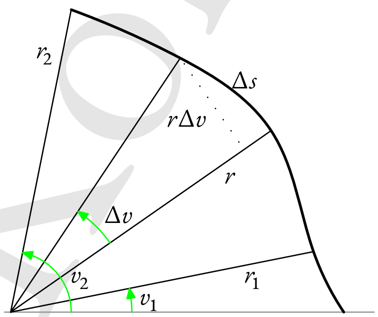

fig. 16

Antag att båglängden, som skall beräknas, är s mellan punkterna (r_1, v_1) och (r_2, v_2). Ett bågelement Δs ligger mellan radierna r och $r + \Delta r$, mellan vilka vinkeln är Δv. Ur den rätvinkliga triangeln fås ekvationen

$$\overline{\Delta s}^2 = r^2 \cdot \overline{\Delta v}^2 + \overline{\Delta r}^2$$

eller efter limesövergång, rotutdragning och utbrytning

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2} dv \quad \text{varur erhålles}$$

$$s = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2}\, dv$$

Exempel: Beräkna båglängden mellan punkterna (r_1, v_1) och (r_2, v_2) av den logaritmiska spiralen $r = e^{av}$

$$s = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{e^{2av} + a^2 e^{2av}}\, dv = \sqrt{1 + a^2} \int_{v_1}^{v_2} e^{av}\, dv = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \Big[e^{av}\Big]_{v_1}^{v_2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \left(e^{av_2} - e^{av_1}\right) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \left(r_2 - r_1\right).$$

138. Beräkna båglängden hos cardioiden $r = 2a(1 + \cos v)$.

139. Samma uppgift beträffande kurvan $r = 2a \cos v$.

Beräkning av vissa volymer (Kubatur)

Den kropp, vars volym skall beräknas medelst integration, placeras i ett koordinatsystem (se fig. 17). På avståndet x från origo lägges ett snitt vinkelrätt mot x-axeln. Snittytan är B_x och volymen till vänster om detta snitt är V. Om x får ett tillskott Δx, få B_x och V tillskotten ΔB_x och ΔV. Kroppen kan anses bestå av en oändlig mängd oändligt små volymelement (oändligt tunna skivor med de plana ytorna vinkelräta mot x-axeln), vilkas volymer kunna skrivas $B_x \cdot \Delta x$, under förutsättning att Δx, ΔB_x och ΔV äro små storheter. Enligt definitionen på bestämd integral fås då

$$V = \int_a^b B_x\, dx.$$

Förutsättningen för att V skall kunna beräknas är alltså, att B_x är en integrerbar funktion av x.

Exempel: Beräkna pyramidens volym. Lägg spetsen i origo och basen vinkelrätt mot x-axeln. Om basen kallas B och höjden h, fås $\frac{B_x}{B} = \frac{x^2}{h^2}$. Alltså

$$V = \int_0^h \frac{Bx^2}{h^2}\, dx = \frac{Bh}{3}$$

Vid rotationskroppar är snittytan en cirkel. Roterar ytan kring x-axeln, är den alltså πy^2 och kring y-axeln πx^2. Volymen blir alltså $V = \int_a^b \pi y^2\, dx$ och $\int_a^b \pi x^2\, dy$.

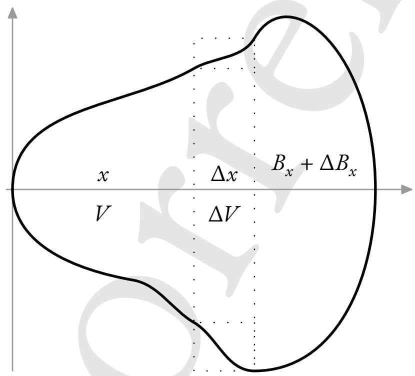

fig. 17

Beräkna den volym, som ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ genererar vid rotation kring x-, resp. y-axeln.

a) $$V = \int_0^a \pi\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right) dx = \left[\pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\right]_0^a = \frac{2\pi ab^2}{3}$$

b) $$V = \int_0^b \pi\left(a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}\right) dy = \left[\pi a^2\left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right)\right]_0^b = \frac{2\pi a^2 b}{3}$$

Ur dessa båda formler erhålles sfärens volym $\frac{4\pi r^3}{3}$ som et sepcialfall.

140. Från en godtycklig punkt P på parabeln $y^2 = 4ax$ fällas perpendiklar PA och PB mot x- och y-axlarna. Hela figuren roterar kring x-axeln. Hur delar paraboloiden den av PA och PB genererade cylindern?

141. Samma fråga beträffande den semikubiska parabeln $y^2 = \frac{x^3}{a}$.

142. Asterioden $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ samt den kvadrat, som bildas av de 4 linjerna $\pm x \pm y = a$ rotera båda kring x-axeln. Beräkna volymen av den kropp, som ligger mellan de båda rotationsytorna.

143. Konstruera kurvan $4y^2 + 2x^2 - x^3 = 0$, samt beräkna den volym, som genereras vid dess rotation kring x-axeln mellan dess skärningspunkt med axeln och $x = 4$.

144. I ändpunkterna av en cirkelkvadrants begränsningsradier äro tangenterna dragna. Den mellan tangenterna och kurvan liggande figuren roterar kring en av tangenterna.Sök den därvid uppkomna volymen.

145. Beräkna den volym, som alstras då kurvan $y^2 = (1 - x^2)^3$ roterar kring x-axeln.

146. Samma uppgift beträffande öglan hos kurvan $y^2 = x(2 - x)^2$.

147. Samma uppgift beträffande $y = \sin x$ mellan $x = 0$ och $x = \pi$.

148. Samma uppgift beträffande öglan hos kurvan $(x^2 + y^2)(x + 2a)^2 = a^4$.

149. Från en punkt P på en parabels axel dragas de båda normalerna PA och PB till parabeln. Var skall P tagas, för att vid figurens rotation kring x-axeln de av parabelytan AOB (O = origo) och av ytan APB genererade volymerna må bli lika stora?

Beräkning av vissa rotationsytors storlek

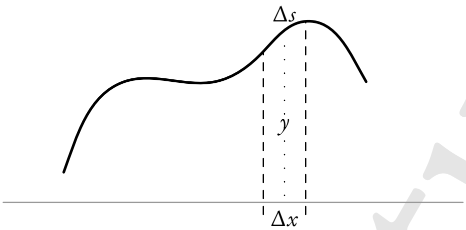

fig. 18

Om en del av en kurva roterar kring en i samma plan liggande axel, kommer kurvan att vid denna rotation generera en rotationsyta. Antag, att den mellan abskissorna a och b liggande delen av kurvan $y = f(x)$ roterar kring x-axeln. Ett längdelement Δs, vars projektion på x-axeln är Δx, kommer därvid att alstra en stympad konisk yta, om Δs är tillräckligt litet, så att det kan anses vara en rät linje. Denna mantelyta ΔM är $= 2\pi y \cdot \Delta s$, där y betecknar den ordinata, som svarar til mittpunkten på Δx. Härur erhålles efter limesövergång och integrering

$$M = \int 2\pi y\, ds \quad \text{eller, då} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$M = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Exempel: Beräkna en sfärisk zons yta. Här är $x^2 + y^2 = r^2$ och alltså $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ varav

$$M = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\, dx = 2\pi \int_a^b r\, dx = 2\pi r(b - a)$$

eller, då $b - a$ är zonens höjd h

$$M = 2\pi r h.$$

150. Beräkna den yta, som genereras vid asteroidens rotation kring x-axeln.

151. Beräkna den yta, som genereras av sinuskurvan mellan 0 och π vid dess rotation kring x-axeln.

152. Beräkna ytan hos den rotationsellipsoid, som erhålles, då en ellips roterar kring sin storaxel.

153. Beräkna den yta (katenoiden), som genereras av kedjelinjen $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ mellan y-axeln och en godtycklig ordinata vid rotation kring x-axeln.

154. Beräkna den yta, som genereras vid rotation kring x-axeln av kurvan $y = e^x$ mellan $x = -\infty$ och $x = 0$.

Sammanfattning

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{Rätvinkliga koordinater}$$

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \frac{r^2}{2}\,dv \quad \text{Polära koordinater}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad \text{Rätvinkliga koordinater}$$

$$s = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)}\,dv \quad \text{Polära koordinater}$$

$$v = \int_a^b B_x\,dx \qquad V = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

$$M = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Differentialekvationer

En ekvation, som innehåller variabler och deras differentialer, kallas differentialekvation. Den derivata, som har högsta numret, anger differentialekvationens ordning, vilken är lika med detta nummer. Högsta derivatans gradtal anger ekvationens gradtal.

Sålunda är $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5x = 0$ en differentialekvation av 2:a ordningen och 1:sta graden. Att lösa eller integrera en differentialekvation betyder att söka den funktion, ur vilken genom derivering och hyfsning den givna differentialekvationen uppkommer.

Exempel: Lös $\frac{dy}{dx} + 3x - 4 = 0$.
Härur fås $\frac{dy}{dx} = 4 - 3x$, varur genom integration omedelbart erhålles $y = 4x - \frac{3x^2}{2} + C$.

Alla differentialekvationer kunna ej lösas. Vi inskränka oss här till att anföra några exempel på de enklaste typerna, vilka kunna integreras.

A. Separabla differentialekvationer

Härmed menas ekvationer, som kunna skrivas i formen $f(x)\,dx + g(y\,dy = 0)$, d.v.s. där variablerna kunna skiljas, så att dx multipliceras med ett uttryck, innehållande x men ej y, och dy tvärtom.

Lösningen erhålles genom direkt integration.

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

där C är integrationskonstanten.

Exempel: $x^2\,dx - y^2\,dy = 0$. Härur fås omedelbart

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = C \quad \text{eller}$$
$$x^3 - y^3 = 3C = C_1.$$

Detta problem kan i ord formuleras sålunda: Sök ekvationen för de kurvor, där vinkelkoefficienten för tangenten i en godtycklig punkt är lika med förhållandet mellan kvadraterna på tangeringspunktens abskissa och ordinata, d.v.s. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

$$\frac{dx}{1+x} + \frac{dy}{1+y} = 0.$$
$$\ln(1+x) + \ln(1+y) = \text{konst.}$$

Här är det lämpligt att ge den godtyckliga konstanten formen $\ln C$, varvid erhålles

$$\ln(1+x) + \ln(1+y) = \ln C \quad \text{eller}$$
$$(1+x)(1+y) = C.$$

För vilken kurva är ytan mellan kurvan, abskiss.axeln mellan origo och punkten $(x, 0)$ samt ordinatan genom punkten (x, y) lika med $\frac{2}{3}xy$?

Omedelbart erhålles $\int_0^x y\,dx = \frac{2}{3}xy$ varur genom derivering med avseende på x erhålles

$$y = \frac{2}{3}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right).$$

Här kunna variablerna separeras.

$$
\begin{aligned}
y\,dx - 2x\,dy &= 0 \quad \text{eller} \\
\frac{dx}{x} - 2\frac{dy}{y} &= 0 \\
\ln x - 2\ln y &= \ln C \\
\ln x &= 2\ln y + \ln C \\
x &= Cy^2
\end{aligned}
$$

d.v.s. kurvan är en parabel.

$$
\begin{aligned}
&xy\,dy + 2x^2\,dx + y\,dy = 0 \\
&y(x+1)\,dy + 2x^2\,dx = 0 \\
&y\,dy + \frac{2x^2}{x+1}\,dx = 0 \\
&\int y\,dy + 2\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = C \\
&\int y\,dy + 2\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = C \\
&\frac{y^2}{2} + 2\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) = C \\
&y^2 + 2x^2 - 4x + 4\ln(x+1) = 2C = C_1
\end{aligned}
$$

En kropp med tyngden p faller utan begynnelsehastighet i ett medium, där motståndet är proportionellt mot hastigheten $\left(= \frac{p \cdot v}{k}\right)$. Beräkna hastigheten efter t sekunder.

Enligt kraftekvationen fås

$$p - \frac{p \cdot v}{k} = \frac{p}{g}\frac{dv}{dt}$$
$$\int \frac{dv}{k - v} = \frac{g}{k}\int dt$$
$$-\ln(k - v) = \frac{g \cdot t}{k} + C.$$

Här kan nu C bestämmas på följande sätt. Under förutsättning att $v = 0$ då $t = 0$ fås $C = -\ln k$

$$-\ln(k - v) = \frac{g \cdot t}{k} - \ln K$$
$$-\frac{g \cdot t}{k} = \ln\frac{k - v}{k}$$
$$\frac{k - v}{k} = e^{-\frac{g}{k}\cdot t}$$
$$v = k\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right).$$

Om motståndet i stället är proportionellt mot kvadraten på hastigheten $\left(= \frac{pv^2}{k^2}\right)$, kan på samma sätt visas att hastigheten efter t sekunder är

$$v = k \cdot \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}.$$

155. $(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - yx^2)\,dy = 0.$

156. Om genom en godtycklig punkt A på en kurva drages en linje parallellt med x-axeln, så att den träffar y-axeln i punkten B, och tangenten i punkten A är vinkelrät mot den linje, som förbinder B med A:s ordinatas fotpunkt, vilken ekvation har kurvan?

157. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$. (Ledning: Ekvationen kan göras separabel genom införande av subst. $y^2 = u$ och division med x^2).

158. $(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$. (Ledning: Sätt $x + y = u$).

159. En kropp rör sig med begynnelsehastigheten V_0 under inverkan av ett motstånd, som är proportionellt mot hastigheten. Sök den under tiden t tillryggalagda vägen.

160. Samma problem som ovan, men motståndet proportionellt mot kvadraten på hastigheten.

En kropp faller utan begynnelsehastighet mot jordytan från en punkt på avståndet h från jordens centrum. Sök den hastighet, varmed den råkar jordytan. Accelerationen är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet till jordens medelpunkt.

Antag, att kroppen under tiden Δt går vägen Δs och därvid får en ökning i hastighet på ΔV. Under den korta tid, det här gäller, antages hastigheten konstant $= V + \dfrac{\Delta V}{2}$. Härur fås $\Delta s = \left(V + \dfrac{\Delta V}{2}\right)\Delta t$; d.v.s.

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{V + \dfrac{\Delta V}{2}}.$$

Enligt definitionen på accelerationen fås

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta v\left(V + \dfrac{\Delta V}{2}\right)}{\Delta s} = \frac{dV}{ds} \cdot V.$$

Men $a = \dfrac{k}{(h-s)^2}$. Alltså fås

$$\frac{k}{(h-s)^2} = \frac{dV}{ds} \cdot V \Rightarrow k \int \frac{ds}{(h-s)^2} = \int V\,dV$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k}{h-s} + C;$$

För $s = 0$ är $V = 0$ vilket ger att $C = -\frac{k}{h}$ och alltså

$$V^2 = \frac{2k}{h-s} - \frac{2k}{h}.$$

Vid jordytan är $s = h - r$ och $g = \frac{k}{r^2}$ d.v.s. $k = gr^2$. Härav fås

$$V^2 = \frac{2gr^2(h-r)}{hr} \Rightarrow V = \sqrt{2g\frac{r}{h}(h-r)}.$$

Anm. Om $h = a + \delta$, där δ är mycket litet i jämförelse med r fås

$$V = \sqrt{2gr\left(1 - \frac{\delta}{r}\right)} = \sqrt{2g\delta}$$

d.v.s. den vanliga formeln för sluthastigheten.

B. Homogena differentialekvationer

Härmed menas differentialekvationer innehållande två variabler x och y, varvid exponentsumman för dessa är konstant i alla termer. Vid integration av dessa ekvationer inför man en ny variabel v, som är = förhållandet mellan de båda ursprungliga variablerna, d.v.s. $v = \frac{y}{x}$ eller $y = v \cdot x$, varur genom differentiering erhålles $dy = vdx + xdv$. Sättas ovanstående värden på y och dy in i den givna ekvationen, blir denna separabel och kan därför integreras.

Exempel: $y\,dx = (y - ax)\,dy$
Härur erhålles medelst ovanstående substitution

$$\begin{aligned}
vx\,dx &= (vx - ax)(v\,dx + x\,dv)\\
vx\,dx &= v^2x\,dx + vx^2\,dv - axv\,dx - ax^2\,dv\\
(vx - v^2x + axv)\,dx &= (vx^2 - ax^2)\,dv\\
\frac{dx}{x} &= \frac{(v-a)\,dv}{v - v^2 + av}
\end{aligned}$$

Efter högra membrums uppdelning i partialbråk med nämnarna v och $(v - a - 1)$ fås

$$\frac{dx}{x} = \frac{-a\,dv}{v(a+1)} - \frac{dv}{(a+1)(v-a-1)}$$

Härur fås genom integrering

$$\ln x = \frac{-a}{a+1} \ln v - \frac{1}{a+1} \ln(v - a - 1) + \ln C$$

eller

$$\ln x + \frac{1}{a+1} \cdot \ln[v^a (v - a - 1)] = \ln C$$

$x^{a+1} \cdot v^a (v - a - 1) = C^{a+1}$ eller efter insättning av $v = \dfrac{y}{x}$ $y^a \cdot (y - ac - x) = C_1$.

$$(y^2 - x^2)\,dx = 2xy\,dy.$$

Sätt $v = \dfrac{y}{x}$

$$(v^2x^2 - x^2)dx = 2x^2v(v\,dx + x\,dv)$$
$$-(v^2 + 1)\,dx = 2xv\,dv$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{2v\,dv}{x^2 + 1} = 0$$
$$\ln x + \ln(v^2 + 1) = \ln C$$
$$x \cdot \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = C$$
$$y^2 + x^2 - Cx = 0.$$

Exempel:

161. $(y - x)\,dy + y\,dx = 0.$

162. $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0.$

163. $(2x^3 - 5y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0.$

164. $x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$

165. För vilka kurvor är summan av abskissan och radius vector från origo lika med subtangenten? (Ledning: Problemet leder till följade differentialekvation. $y\dfrac{dy}{dx} = x + r$ eller $y\,dx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy$.)

166. $xy + y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = 0.$

167. $y^2 - x^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0.$

168. Från punkten P på en kurva drages ordinatan PA och linjen PO till origo. Från A fälles en perpendikel mot PO. Denna träffar y-axeln i B. Linjen BP slutligen är tangent till kurvan i P. Sök kurvans ekvation.

169. Förbinder man en punkt P på en kurva med origo O, så är bisektrisen till den vinkel, som OP bildar med P:s ordinata tangent till kurvan i P. Sök kurvans ekvation.

C. Lineära differentialekvationer av första ordningen

Härmed förstås ekvationer av typen $\dfrac{dy}{dx} + y \cdot f(x) + g(x) = 0$, där $f(x)$ och $g(x)$ äro funktioner av enbart variabeln x eller konstanter. Dessa ekvationer kunna integreras, därigenom att man inför substitutionen $y = u \cdot v$, där u och v äro två variabler, vilka sedan tilldelas lämpliga värden. Ur $y = u \cdot v$ fås

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Efter insättning av värdena för y och $\dfrac{dy}{dx}$ kan första ekvationen skrivas

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + uf(x)\right) + g(x) = 0.$$

Då nu den ena variabeln, t.ex. u, kan väljas godtyckligt (om u är bestämd, är även v bestämd, ty deras produkt är $= y$), tilldelas den ett sådant värde, att koefficienten för v blir 0. Ekvationen sönderfaller alltså i två:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + u \cdot f(x) = 0 \\ u\dfrac{dv}{dx} + g(x) = 0. \end{cases}$$

Hur behandlingen av dessa båda fortsätter, framgår av följande exempel:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} - (x+1)^3 = 0.$$

Substitutionen $y = uv$ ger

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2uv}{x+1} - (x+1)^3 = 0 \quad \text{eller}$$
$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) - (x+1)^3 = 0,$$

vilken sönderfaller i de två ekvationerna

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - \dfrac{2u}{x+1} = 0 \\ u\dfrac{dv}{dx} - (x+1)^3 = 0. \end{cases}$$

Ur den första av dessa erhålles $u = C(x+1)^2$ (ekvationen är separabel), vilket värde på u insättes i den andra ekvationen, som då efter division med $(x+1)^2$ kan skrivas

$$C\frac{dv}{dx} - (x+1) = 0.$$

Även denna ekvation är separabel. Ur densamma fås

$$C \cdot v - \frac{(x+1)^2}{2} = C_1$$

samt, efter insättning av värdena på v och u,

$$y = (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + C_1\right].$$

Exempel:

170. Integrera på samma sätt $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2$.

171. Integrera på samma sätt $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + x \cdot y = a$.
(Ledning: Ekv. leder bl.a. till följ. integral $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$). Denna löses genom substitutionen $x = \sin z$.)

172. Integrera $\frac{dy}{dx} + y \cdot \cos x = \sin x \cos x$.

173. Integrera $\frac{dy}{dx} + 2x \cdot y = 2x^3$.

De båda sista ekvationerna utgöra specialfall av den generellare ekvationen

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f'(x) = f(x) \cdot f'(x)$$

174. Visa, att integralen till denna ekvation är

$$y = C \cdot e^{-f(x)} + f(x) - 1$$

175. Om i en godtycklig punkt på en kurva tangenten utdrages, tills den råkar y-axeln, så är storleken av den yta, som begränsas av tangenten, y-axeln, x-axeln och punktens ordinata, konstant. Sök kurvans ekvation.

176. Om en växelspänning med amplituden V_0 och frekvensen ω påtryckes en spole med motståndet R och självinduktionskoefficienten L, uppstår i spolen en elektrisk ström av styrkan I. Mellan dess storheter råder sambandet

$$V_0 \cdot \sin \omega t = RI + L \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Lös denna differentialekvation, d.v.s. härled ”Ohms lag för växelström”, vilken har följande formulering:

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin(\omega t - \phi), \quad \text{där} \quad \tan \phi = \frac{\omega L}{R}.$$

D. Differentialekvationer av andra ordningen

Om i en dylik ekvation av de enklaste typerna en av variablerna x eller y saknas, kan ekvationen integreras genom att substitutionen $\frac{dy}{dx} = p$ införes. Härigenom kommer ordningen att sänkas, enär $\frac{d^2y}{dx^2}$ blir $= \frac{dp}{dx}$.

Exempel: $\frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot y$.

Sätt $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. Då fås $\frac{dp}{dx} = ay$, men $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$. Alltså fås

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = ay$$

$$\int p\,dp = a \int y\,dy$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{ay^2}{2} + \frac{C}{2}$$

$$p^2 = ay^2 + C = \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{ay^2 + C}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + C}} = x + C_1 \quad \text{etc.}$$

Eftersom här två integrationer äga rum, kommer lösningen till en differentialekvation av andra ordningen att innehålla två godtyckliga konstanter.

Exempel:

177. $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$.

178. $\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = 0$.

En kropp rör sig från A utmed AB med hastigheten V. En annan kropp utgår samtidigt från O och rör sig i riktning mot den första kroppen med hastigheten $2V$. På vilken kurva rör den sig och när och var råkas de?

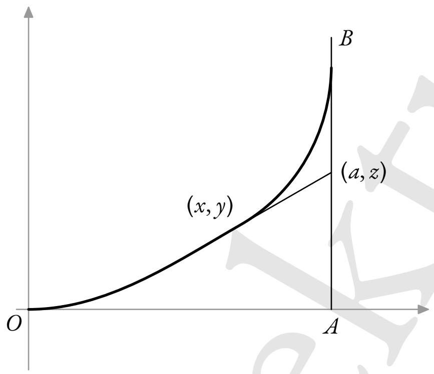

fig. 19

$$y - z = \frac{dy}{dx}(x - a)$$

$$\frac{dy}{dx}(a - x) = z - y. \quad \text{Derivera.}$$

$$-\frac{dy}{dx} + (a - x)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = (a - x)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Vidare är $\Delta s = 2\Delta z$ (enär hastigheterna förhålla sig som $2 : 1$). Alltså är $\frac{ds}{dx} = 2\frac{dz}{dx}$. Vi får således

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2(a - x)\frac{d^2y}{dx^2}; \quad \text{Sätt } \frac{dy}{dx} = p$$

$$\sqrt{1 + p^2} = 2(a - x)\frac{dp}{dx}.$$

Denna ekvation är separabel. När hänsyn tages till utgångsbetingelserna $x = y = y' = 0$ samtidigt, erhålles kurvans ekvation:

$$y = -\frac{\sqrt{a-x}}{3\sqrt{a}}(2a+x) + \frac{2a}{3}$$

varur för $x = a$ erhålles $y = \frac{2a}{3}$ och tiden $= \frac{2a}{3V}$.

Härled kedjelinjens ("katenarians") ekvation. (se ex. 135)

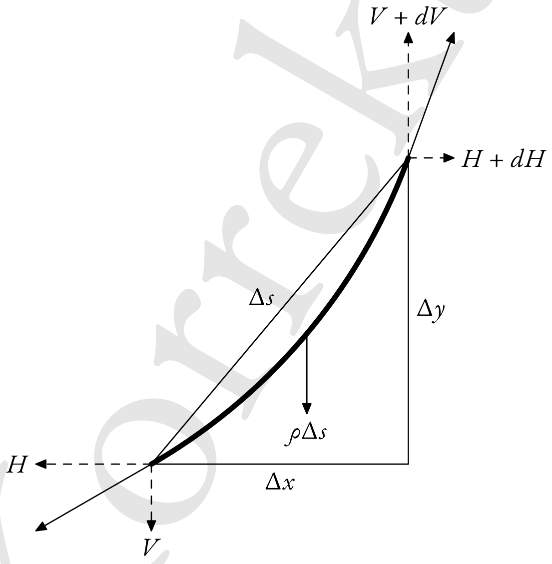

fig. 20

ρ = tätheten.

Enligt lagarna för jämvikt fås

$$H = H + dH$$
$$V + \rho \cdot ds = V + dV$$

vilket ger

$$dH = 0$$
$$dV = \rho \cdot ds$$

Men vi har också att

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Om ds elimineras ur de båda sista ekvationerna fås

$$\frac{dV}{dx} = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{men} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}$$

vilket ger $V = H \cdot \frac{dy}{dx}$ varur fås $\frac{dV}{dx} = H \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$. Om detta värde sättes lika med det förra värdet på $\frac{dV}{dx}$, erhålles

$$H \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Härmed har man kommit fram till den differentialekvation av 2:dra ordningen, som nu skall lösas. Fördenskull sätter man $\frac{dy}{dx} = p$ och $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

$$H \cdot \frac{dp}{dx} = \rho\sqrt{1 + p^2}.$$

Denna ekvation är separabel.

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\rho}{H} \int dx.$$
$$x = \frac{H}{\rho} \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + C.$$

Välj C så att $p = 0$ för $x = 0$, d.v.s $C = 0$.

Vi har nu ekvationen

$$e^{\frac{\rho x}{H}} = p + \sqrt{1 + p^2}.$$

Vi flyttar över p och kvadrerar denna ekvation

$$e^{\frac{2\rho x}{H}} + p^2 - 2p \cdot e^{\frac{\rho x}{H}} = 1 + p^2$$

Lös ut p.

$$p = \frac{e^{\frac{2\rho x}{H}} - 1}{2e^{\frac{\rho x}{H}}} = \frac{e^{\frac{\rho x}{H}} - e^{-\frac{\rho x}{H}}}{2} = \frac{dy}{dx}$$

vilket ger

$$y = \frac{1}{2}\int \left(e^{\frac{\rho x}{H}} - e^{-\frac{\rho x}{H}}\right) dx = \frac{H}{2\rho}\left(e^{\frac{\rho x}{H}} + e^{-\frac{\rho x}{H}}\right) + C_1.$$

Välj C_1 så att $y = \frac{H}{\rho}$ för $x = 0$vilket ger $C_1 = 0$. Sätt vidare $\frac{H}{\rho} = a$. Den sökta ekvationen är då

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

Problemet behandlades först av Galilei, som trodde att kurvan var en parabel. Rätta lösningen fanns av Jacob Bernoulli år 1691.

Några fysikaliska och kemiska tillämpningar

179. Till ett belysningsnät med den konstanta spänningen V anslutes en spole med motstånder R och självinduktionskoefficienten L. Sök sambandet mellan strömstyrkan och tiden.

180. Till en kondensator med kapaciteten C och uppladdad till spänningen V_0 anslutes en spole med självinduktionskoefficienten L och försumbart motstånd. Sök sambandet mellan kondensatorspänningen och tiden.

181. Samma uppgift som i föregående problem, men motståndet är ej försumbart.
Följande differentialekvation erhålles: $V = R \cdot I + L\frac{dI}{dt}$. Här insättes $I = -C\frac{dV}{dt}$, varvid erhålles $V = -RC\frac{dV}{dt} - LC\frac{d^2V}{dt^2}$ eller $L\frac{d^2V}{dt^2} + R\frac{dV}{dt} + \frac{V}{C} = 0$.

Denna ekvation satisfieras av $V = V_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$. Här är $\delta = \frac{R}{2L}$ och $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Härur erhålles villkoret för att en dämpad svängning skall uppstå: ω skall vara reell, d.v.s. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

182. Samma uppgift, men motståndet är induktionsfritt ($L = 0$).

183. En spole med självinduktionskoefficienten L och motståndet R kortslutes, samtidigt med att strömstyrkan i densamma är I_0. Sök sambandet mellan strömstyrkan och tiden.

184. En strålning av något slag träffar en platta, varvid en del av densamma absorberas. Den absorberade intensiteten är proportionell mot den infallande samt mot plattans tjocklek, om denna är oändligt liten. Sök sambandet mellan den genomgångna och den påfallande intensiteten (I_0), om plattans tjocklek är x.

Vid sockerinvertering gäller, att den under en viss liten tid inverterade sockermängden är proportionell mot tiden och mot den kvarvarande mängden oförändrat socker. Om alltså den ursprungliga mängden är a och efter tiden t mängden x har inverterats, fås ekvationen

$$dx = k(a - x)dt.$$

Efter integration kan x (eller k) lösas.

185. Av 65.45 g rörsocker $C_{12}H_{22}O_{11}$, lösta i en liter vatten, försatt med något saltsyra, hade efter 30 minuter 5.75 g inverterats. Hur mycket oförändrat socker är kvar efter 90 minuter?

Om två ämnen reagera med varandra, är enligt massverkningslagen den under en viss liten tid bildade reaktionsproduktens koncentration proportionell mot produkten av de kvarvarande mängderna av de ursprungliga ämnena samt mot tiden, $dx = k(a-x)(b-x)dt$. Här kunna naturligtvis a och b vara lika.

186. En lösning, som på 1 liter innehöll $0,0301$ mol acetylacetat och lika många moler natriumhydroxid innehöll efter 6 minuter $0,0127$ mol natriumhydroxid. Hur mycket osönderdelad ester finnes efter ytterligare 6 minuter?

187. I en liter i avseende på racemdibrombärnstenssyrat natron $0,04504$-molar och i avseende på NaOh $0,02252$-molar lösning bildas på 12 minuter $0,01394$ mol NaBr och lika många moler mono-oxisyrat natron. Berökna reaktionshastighetskonstanten (k).

Blandade exempel:

188. Integrera $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + bx = 0.$

189. Integrera $3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} - 6y = 0.$

190. Integrera $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2x \cdot \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$ (Ledning: sätt $\dfrac{dy}{dx} = p$..)

191. Integrera $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1+x^2} \cdot y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}.$

192. Integrera $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2}.$

193. Integrera $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\dfrac{dy}{dx}$. (Ledning: sätt $x = \xi + a$ och $y = \eta + b$, och välj a och b så, att konstanterna försvinna.)

194. Integrera $y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$

195. Integrera $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}\sin 2x + y\cos x = 0.$

196. Integrera $(3x + 5y + 6)\,dy - (x + 7y + 2)\,dy = 0.$

197. Integrera $y\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{2}y^2 = \cos x$. (Ledning: sätt $y^2 = z$.)

198. För vilka kurvor är subtangenten medelproportional mellan tangeringspunktens abskissa och ordinata?

199. I en rörlig punkt på en kurva drages tangenten. Ytan, som begränsas av tangenten,subtangenten och punktens ordinata är konstant ($k^2/2$). Sök kurvans ekvation.

200. Integrera $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 + 2xy - 2x^2}{2xy + x^2}$.

201. Integrera $dy - xdx = xy\,dx$.

202. Integrera $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 0$.

Svar till exemplen

1. $2 \cdot e^{2x}$.
2. $x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x$.
3. $2x \cdot a^{x^2} \cdot \ln a + \dfrac{a^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot \ln a$.
4. $a^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln a$.
5. $1 + \ln x$.
6. $\dfrac{\sin x}{x} \cdot {}^a\log x + \cos x \cdot {}^a\log x$.
7. $x^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \dfrac{\dfrac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$.
8. $\dfrac{2}{x} \cdot \ln x \cdot x^{\ln x}$.
9. $x^{e^x} \cdot e^x\Big(\dfrac{1}{x} + \ln x\Big)$.
10. $x^{x^x} \cdot x^x\Big(\dfrac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\Big)$.
11. $x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot x^{x^{\sin x}}\Big(\ln x \cdot \cos x + \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{1}{x \ln x}\Big)$.
12. $x^{\ln \sin x}\Big(\dfrac{\ln \sin x}{x} + \cot x \cdot \ln x\Big)$.
13. $\sqrt[x]{\dfrac{1}{x}} \cdot \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$.
14. $(\tan x)^x \cdot \Big(\dfrac{2x}{\sin 2x} + \ln \tan x\Big)$.
15. $(\sin x)^{\cos x} \cdot \Big(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln x\Big)$.
16. $\dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$.

17. $(\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\cot x \cdot \ln x + \dfrac{\ln \sin x}{x} \right).$

18. $\dfrac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}.$

19. $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x}{(1 + \ln y) \sin x}.$

20. $-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{e^{\arctan x}}{1 + x^2}$

23. $\dfrac{1}{2}$

24. $-\dfrac{x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x)}{x^2 \sqrt{1 - x^{2/x}}}$

25. $-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

26. $\arcsin x$

27. $\dfrac{-1}{(x + 1)\sqrt{2x + 1}}$

28. $\dfrac{x + x^2 \arctan x}{1 + x^2}$

29. $(\arctan x)^x \cdot \left(\ln \arctan x + \dfrac{x}{(1 + x^2) \arctan x} \right)$

30. $(\arcsin x)^{\ln x} \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x} + \dfrac{\ln \arcsin x}{x} \right)$

31. $\dfrac{-1}{2x\sqrt{x - 1}}$

34. 3; $\frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

35. $\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$
$\cos 5x = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x$

37. 1

38. -2

39. 0

40. $\frac{7}{8}$

41. $\frac{1}{2}$

42. 0

43. 1

44. 1

45. $-\frac{2a \cdot e^a}{\pi}$

46. 0

47. $\frac{1}{2}$

48. $xy = \frac{k^2}{4}$

49. $xy = \pm\frac{k^2}{2}$

50. $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$

51. $y^2 - r^2 = \pm 2rx$

52. $y^2 = \frac{4(x-2a)^3}{27a}$

54. $y^2 = -16ax$

55. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (Cissoiden)

56 $\dfrac{x^2}{\left(\frac{26}{6}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$

58. $3\sqrt[3]{axy}$

60. Då P:s abskissa är $\dfrac{a}{2}$

69. $-\ln\cos x$

70. $\ln\tan\dfrac{x}{2}$

71. $\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

72. $-\dfrac{1}{5}\cos 5x$

73. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x$

74. $\dfrac{a^{4x}}{4} \cdot {}^{a}\log e$

75. $\dfrac{x^2}{4}(\ln x^2 - 1)$

76. $(x \cdot a^x - a^x \cdot {}^{a}\log e)^{a}\log e$

77. $e^{\sin x}(\sin x - 1)$

78. $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

79. $\dfrac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}$

80. $x \cdot \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

81. $\ln \dfrac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^3}$

82. $\ln(x+2)^2(x+3)^3$

83. $\ln \dfrac{(x+2)^3}{(x-4)^5(x-1)^2}$

84. $\ln x^2 \cdot (x-3)^4 - \dfrac{1}{x}$

85. $\ln x \cdot (x-1)^2 + \dfrac{3}{x-1}$

86. $\ln(x+2)(x^2+2) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

87. $\dfrac{(x+1)^2}{2} + \ln \dfrac{(x-2)^4}{(x-3)^3}$

88. $-\ln \arccos x$

89. $\ln(e^x + a)$

90. $\ln \tan x$

91. $\dfrac{2}{3} \arcsin \sqrt{\dfrac{x^3}{a^3}}$

92. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}$

93. $\dfrac{x^4}{4}\left(\ln x - \dfrac{1}{4}\right)$

94. $\ln \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

95. $\dfrac{a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}$

96. $\dfrac{x + \sqrt{1-x^2}}{2} e^{\arcsin x}$

97. $\sqrt{1-x^2} - \ln(1 + \sqrt{1-x^2}) + (1 - \sqrt{1-x^2}) \ln x$

98. $\dfrac{x^2}{2} + \ln(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1} + \dfrac{5}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

99. $\dfrac{x^2}{2} + \ln\sqrt{x^2-1}$

100. $\sqrt{x^2+3x+2} + \dfrac{1}{2}\ln(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2})$

101. $\dfrac{2\sqrt{a+bx}}{3b^2}(bx-2a)$

102. $\arccos \dfrac{a-x}{a}$

103. $\dfrac{1}{8}\left[\arcsin x - (x-2x^3)\sqrt{1-x^2}\right]$

104. $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

105. $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

106. $\dfrac{\cos^2 x}{2} - \ln(1+\cos^2 x)$

107. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$

108. $\dfrac{2}{\sqrt{a}} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{a}}\right) - \dfrac{1}{x}\ln(x^2+a)$

109. $\ln\sin x - x \cdot \cot x - \dfrac{x^2}{2\sin^2 x}$

110. $\dfrac{1}{2}$

111. $e^e - 1$

112. 0

113. $\dfrac{n\pi}{2}$

114. $\dfrac{\pi^2}{8}$

115. 1

116. 1

117. 5π

118. $\ln \frac{4}{3}$

119. $\frac{b}{a^2 + b^2}$

120. $\ln \sqrt{5}$

121. $9 \ln 3 - \frac{26}{9}$

122. $\ln \sqrt{2}$

123. I förhållandet $2 : 1$

124. I förhållandet $2 : 3$

125. πab

126. 1

127. $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)a^2$

128. $6\pi a^2$

129. a) $\frac{\pi a^2}{2}$, b) πa^2

130. $\frac{r_2^3 - r_1^3}{6a}$

131. $\frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}$

132. $\frac{1}{2} \ln 3$

133. $4a\sqrt{3}$

134. $\dfrac{e^2+1}{4}$

135. $\dfrac{a}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$

136. $\dfrac{1}{8}(x^4+6x^2)$

138. $16a$

139. $2\pi a$

140. $1:1$

141. $1:3$

142. $\dfrac{38}{105}\pi a^3$

143. $\dfrac{17}{3}\pi$

144. $\dfrac{\pi r^3}{6}(10-3\pi)$

145. $\dfrac{32\pi}{35}$

146. $\dfrac{4\pi}{3}$

147. $\dfrac{\pi^2}{2}$

148. $\dfrac{4\pi}{3}(3-2\sqrt{2})a^3$

149. $(\dfrac{10a}{3}, 0)$

150. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$

151. $2\pi\sqrt{2}+\pi\cdot\ln(3+2\sqrt{2})$

152. $2\pi b\left(b + \frac{a^2}{c} \cdot \arcsin \frac{c}{a}\right)$

153. $\frac{\pi a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} + \frac{4x}{a}\right)$

154. $\pi\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$

155. $C + \ln \frac{x}{y} = \frac{x + y}{xy}$

156. $x^2 - y^2 = C^2$

157. $x \cdot e^{y^2/x} = C$

158. $y + x = a \cdot \tan \frac{y + C}{a}$

159. $x = \frac{V_0 m}{C}\left(1 - e^{-\frac{Ct}{m}}\right)$

160. $x = \frac{m}{C} \ln \frac{CV_0 t + m}{m}$

161. $y = C \cdot e^{-\frac{x}{y}}$

162. $\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C} = \arctan \frac{y}{x}$

163. $\frac{x^5}{y^3 - x^3} = C$

164. $C^2 x^2 - 2Cy = 1$

165. $y^2 = 2ax + a^2$

166. $y = \frac{2x}{Cx^2 - 1}$

167. $y = \sqrt{\frac{C + x^3}{3x}}$

168. $y^2 = -2x^2 \cdot \ln Cx$

169. $y = \dfrac{C^2x^2 - 1}{2C}$

170. $xy = x^2 + C$

171. $y = ax + C\sqrt{1 - x^2}$

172. $y = C \cdot e^{-\sin x} + \sin x - 1$

173. $y = C \cdot e^{-x^2} + x^2 - 1$

175. $y = \dfrac{2k}{3x} + Cx^2$

177. $y^2 = 2Cx + C_1$

178. $y = C \cdot \dfrac{C_1 e^{Cx} + 1}{C_1 e^{Cx} - 1}$

179. Ur diff. ekv $V = RL + L\dfrac{dI}{dt}$erhålles $I = \dfrac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$

180. $V = V_0 \cdot \cos \dfrac{t}{\sqrt{LC}}$

182. Ur diff. ekv. $\dfrac{V}{R} = -C\dfrac{dV}{dt}$ erhålles $V = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

183. Ur diff. ekv. $RI = -L\dfrac{dI}{dt}$ erhålles $I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$

184. $I = I_0 \cdot e^{-kx}$

185. 49.67 g

186. $0,008$ mol

187. $2,20$

188. $y = -\dfrac{bx^2}{2a} + \dfrac{bx}{a} - \dfrac{C}{a}e^{-ax} + C_1$

189. $y = Ce^{3x} + C_1 e^{-2x/3}$

190. $y = Cx - \frac{C^2}{2}$ (singulär lösning $y = \frac{x^2}{2}$)

191. $y\sqrt{1+x^2} = \ln \frac{Cx}{1+\sqrt{1+x^2}}$

192. $\frac{y}{2x^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right) + \ln \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3} = C$

193. $(y+x-1)^5 \cdot (y-x+1)^2 = C$

194. $(x+C_1)^2 + y^2 = C^2$

195. $y - C \cdot e^{-\sin x} - \sin x + 1 = 0$

196. $x + 5y + 3 = C(x-y+2)^4$

197. $y^2 - C \cdot e^{-x} - \sin x - \cos x = 0$

198. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = C$

199. $y = -\frac{k^2}{x+C}$

200. $x^3 = C(y-x)(y+2x)$

201. $x^2 = \ln C(y+1)^2$

202. $y = C \cdot \ln C_1 x$