Matematiska uppgifter

Matematiska uppgifter

Givna i studentexamen på

reallinjen vt 1881 – ht 1948

Urval med svar och anvisningar för
Allmän kurs
av
B. Wahlström
Tolfte upplagan

Stockholm

Svenska Bokförlaget

P. A. Norstedt & Söner

Innehåll

Algebra och algebraiska ekvationer

1. Två positiva tal a och b äro givna. Om A betecknar de båda talens aritmetiska medium, G deras geometriska medium (= talens medelproportional) och H deras harmoniska medium d.v.s. $\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, så skall bevisas, att

$$A \geq G \geq H$$ (vt 15)

---

2. Lös ekvationen $(x+1)^5 = x^5 + 1$ (jan. 38)

3. Lös x ur ekvationen

$$(ax+b)(bx+c)(cx+d)(dx+a) = (a+bx)(b+cx)(c+dx)(d+ax).$$ (jan. 12)

4. Bestäm x och y ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 156 \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 104. \end{cases}$$ (ht 95)

5. Bestäm x och y ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)((x - y) = 16xy \\ (x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = 640x^2y^2. \end{cases}$$ (ht 95)

6. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = 7a^4. \end{cases}$$ (ht 21)

7. Bestäm alla värdesystem, x, y, som satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2) = 4 \\ (x-y)^2 + (x+y)^2 = 12. \end{cases}$$ (vt 33)

8. Bestäm de system av värden på x och y, som satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = xy \\ 2x^2 + 2y^2 + xy = 27. \end{cases}$$ (vt 34)

9. Bestäm alla värdesystem x, y, som satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = 1 \\[2mm] \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ (vt 35)

10. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2y - 3x^2 - 1 = 0 \\ 3xy + 12x - 10y + 2 = 0 \end{cases}$$

har lösningen $x = 1\,;\, y = 2$. Bestäm de övriga lösningarna. (vt 37)

11. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = a^2 - b^2 \\ 2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = a^2 + b^2 y. \end{cases}$$

Talen a^2 och b^2 antages vara olika och intetdera $= 0$. (aug. 37)

12. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{1}{x+y} = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$$

(aug. 38)

13. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4xy \\ xy = x + y. \end{cases}$$

(jan. 39)

14. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} \\ xy = \dfrac{1}{a^2 - b^2} \end{cases}$$

(vt 39)

15. Varje värdepar $(x;\ y)$, som satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 = 2x + 3y \\ xy = 2x - 3y \end{cases}$$

skall även satisfiera ekvationen $y^2 = ax + by$. Bestäm konstanterna a och b. (ht 41)

---

16. Bestäm alla system av värden x, y, z, som satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29. \end{cases}$$

(ht31)

17. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ xy + yz = 12xz \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

(vt 36)

18. Bestäm tre tal så, att deras summa är $= a$, att det mellersta av dem är aritmetiska mediet till de båda andra samt att det mellerstas kvadrat är medelproportional till de båda andras kvadrater. (aug. 35)

19. Bestäm alla värdesystem x, y, z, som satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 63. \end{cases}$$

(jan. 40)

20. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=7 \\ xy-yz-zx=\dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2=12+z^2. \end{cases} \qquad \text{(vt 41)}$$

21. Bestäm z ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=b^2 \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=z \end{cases} \qquad \text{(aug. 43)}$$

---

22. Det finns ett värde på a, för vilket ekvationerna

$$x^4-5x^3-x^2+23x-a=0 \quad \text{och}$$
$$x^4-7x^3+x^2+35x-a=0$$

hava två gemensamma rötter. Bestäm detta och lös sedan ekvationerna. (aug. 35)

23. Om konstanterna a och b i polynomen

$$x^3-7x^2+ax+2a+1 \quad \text{och} \quad x^2+bx-3$$

väljas lämpligt, blir det första polynomet jämnt delbart med det andra. Bestäm de värden på a och b, för vilka detta inträffar samt röterna till de ekvationer som erhållas, då de båda polynomen (med ifrågavarande värden på a och b) sättas lika med noll. (ht 29)

24. I likheten $\dfrac{6\sqrt{3}-5x-2-x\sqrt{3}}{1-4x\sqrt{3}-2x+2\sqrt{3}}=7\sqrt{3}-y$ äro x och y rationella tal. Bestäm deras värden. (vt 28)

---

25. Vilken ekvation av andra graden har till rötter kuberna på de inverterade värdena av rötterna till ekvationen $x^2+bx+c=0$ (ht 14)

26. Summan av kvadraterna på rötterna till en andragradsekvation är 45 och summan av rötternas inverterade värden är $\dfrac{1}{2}$. Angiv ekvationen. (ht 17)

27. I de båda polynomen $4x^2+ax-1$ och $4x^2+bx+c$ skola koefficienterna a, b och c bestämmas så, att polynomen får samma värde för $x=1$. Vidare skola rötterna till den ekvation som erhålles, då det första polynomet sättes $=0$, vara tre enheter mindre än varsin av röttena till den ekvation som fås, då det andra polynomet sättes $=0$. Vilka äro värdena på a, b och c? (vt 29)

28. Visa, att om förhållandet mellan rötterna till ekvationen $x^2+ax+b=0$ är lika med förhållandet mellan rötterna till ekvationen $y^2+cy+d=0$, så är $a^2d=bc^2$. (ht 34)

29. Beräkna värdet av 7^x, där $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}$ samt a och b rötterna till ekvationen $7t^2+7t+1=0$. (ht 35)

30. För att rötterna x_1 och x_2 till ekvationen

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

skola satisfiera ekvationen

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) \tag{2}$$

måste konstanterna p och q uppfylla vissa villkor. Angiv dessa och pröva resultatet genom att i (2) insätta de värden på x_1 och x_2, som i dessa fall ehållas ur (1). (jan. 36)

31. Bestäm värdet på konstanten a i ekvationerna $4x^2 + ax - 3 = 0$ och $4y^2 - 16y + 3a = 0$, så att för vardera ekvationen summan av rötternas inverterade värden blir en och densamma. Angiv även ekvationernas rötter, sedan värdet på a bestämts. (jan. 41)

---

32. Bevisa, att om a är ett helt positivt tal > 1 och r en rot till ekvationen

$$x^2 - ax + 1 = 0$$

så är även $r^3 + \dfrac{1}{r^3}$ ett helt positivt tal. (ht 09)

33. Med r betecknas en rot till ekvationen

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Visa, att $2 - r^2$ också är en rot till ekvationen, och bestäm ekvationens tredje rot, uttryckt i r. (ht 30)

34. Summan av två tal är a, summan av deras tredje digniteter är $10a^3$. Beräkna summan av deras fjärde digniteter, uttryckt i a. (ht 32)

Heltalslära

35. Bevisa från "n till $n+1$" riktigheten av formeln

$$1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \text{(vt 11)}$$

36. En geometrisk serie består av de olika stora termerna $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$. Var och en av termerna $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ multipliceras successivt med var och en av de termer i serien, som ha högre ordningsnummer. Summan av dessa produkter betecknas med S. Summan av de r första termerna i den geometriska serien betecknas med s_r. Bestäm seriens kvot, så att sambandet $S = \frac{3}{4}s_{n-1} \cdot s_n$ kommer att gälla. (aug. 42)

---

37. Bevisa formeln

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad \text{(jan. 42)}$$

38. Bevisa riktigheten av formeln

$$\frac{1}{\cos v} + \frac{\sin^2 v}{cos2v \cos v} + \frac{\sin^2 v}{\cos 3v \cos 2v} + \cdots + \frac{\sin^2 v}{\cos(n+1)v \cos nv} = \frac{cosnv}{\cos(n+1)v} \qquad \text{(aug. 43)}$$

39. Ett mosaikmönster består av regelbundna kongruenta månghörningar. Varje linje i mönstret utgör sida i två månghörningar. Varje hörnpunkt i mönstret utgör hörn i de månghörningar, som där sammanstöta. Undersök, hur många dylika mönster som äro möjliga, och angiv deras beskaffenhet. (aug. 41)

Logaritmer och exponentialekvationer

40. Det tal, som angiver en stjärnas storleksklass, kan beräknas om man känner dess ljusstyrka. Man har därvid valt enheterna så, att nämnda tal är lika med minus 2,5 gånger logaritmen för ljusstyrkan. Beräkna på grund därav storleksklassen hos en dubbelstjärna, som består av två stjärnor, vilkas storleksklasser äro respektive 3,0 och 4,0. (ht 19)

41. Lös ekvationen

$$10^{-0,4x} = 10^{-0,4a} + 10^{-0,4b}$$

för $a = 5,41$ och $b = 6,19$. (jan. 37)

42. Beräkna värdet på x, då $x = 2^y$ och $\log y = -\frac{1}{2} \cdot \log 2$. (ht 14)

43. Beräkna $\log 45$, då man vet att $\log 24 = a$ och $\log 54 = b$. Med beteckningen log avses 10-logaritmen. (ht 36)

44. Beräkna värdet av uttrycket

$$2^x \cdot 2^y + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{y}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{z}},$$

där y och z äro rötterna till ekvationen $2x^2 + 5x + 1 = 0$. (aug. 40)

Serier

45. Fyra tal bilda aritmetisk serie. Deras produkt är 384 och summan av deras kvadrater 120. Vilka äro talen. (vt 07)

46. Man bildar alla möjliga bråk, i vilka täljaren är mindre än nämnaren samt såväl täljaren som nämnaren är ett av talen $1, 2, 3, \ldots, n$. Beräkna summan av dessa bråk. (vt 34)

47. I en aritmetisk serie med första termen 10 är summan av alla termer med udda ordningsnummer 28 och summan av de övriga termerna 21. Beräkna termantal och differens. (aug. 37)

48. I en aritmetisk serie är femte termen lika med summan av första och tredje termernas kvadrater, och det inverterade värdet av andra termen är lika med summan av tredje och sjätte termernas inverterade värden. Bestäm serien. (ht 40)

49. Två aritmetiska serier, 80, 78, 76, …och 3, 7, 11, …äro givna. Av den senare serien skola tagas dubbelt så många termer som av den förra. Hur många termer av den förra serien kan man högst taga, om dennas summa skall vara större än den senares? (ht 43)

50. De för blotta ögat synliga fixstjärnorna tänkas med avseende på ljusstyrkan vara indelade i 6 s. k. storleksklasser, varvid en stjärna inom en storleksklass alltid antages vara q gånger så ljusstark som en stjärna av nästföljande storleksklass. Om man vidare antager, att det inom varje storleksklass finns 3 gånger så många stjärnor som inom den nästföregående, så förhåller sig den sammanlagda ljusstyrkan hos alla för blotta ögat synliga stjärnor till den sammanlagda ljusstyrkan inom de första tre klasserna som 68 till 25. Hur stort är talet q? (ht 13)

51. I en geometrisk serie är summan av de 20 första termerna $\frac{1}{3}$ av summan av de 10 första termernas kvadrater. Summan av de 30 första termerna är $\frac{1}{3}$ av summan av de 10 första termenas kuber. Bestäm serien. (ht 34)

52. I en geometrisk serie med nio termer är den andra termen = 2 och produkten av alla nio termerna är 1728. Beräkna seriens summa. (jan. 37)

53. Två geometriska serier ha båda kvoten 2. Av den första serien, vars första term är 1, medtagas dubblet så många termer som av den andra, vars första term är 43. Hur många termer måste minst medtags för att den första seriesumman skall *överstiga* 3 gånger den senare? (vt 38)

54. Summan av alla termerna i en geometrisk serie med kvoten 2 är 381; summan av de två sista termerna är 288. Vilken är serien? (aug. 41)

55. För ett rektangulärt papper m. m. användas i viss utsträckning de s. k. DIN-formaten. De erhållas genom successiva vikningar av ett grundformat på sådant sätt, att samtliga format bli likformiga. Grundformatet benämnes A0; dess yta är $1\ \mathrm{m}^2$. Genom att vika detta mitt itu, så att rektangelns längre sidor halveras, erhåller man formatet A1. Dess yta blir alltså hälften av A0:s yta. Genom att vika A1 på samma sätt erhåller man A2, o. s. v. Bevisa, att om A1 är likformigt med A0, så blir samtliga övriga format likformiga med dessa. Bestäm förhållandet mellan den större och den mindre sidan i formaten. Beräkna längden av sidorna i formatet A6 (brevkortsformat), uttryckt i mm. (ht 41)

56. Summan av en geometrisk serie med 50 termer är 30. Produkten av de 20 första termerna är $\frac{1}{100}$ av produkten av de 10 första termernas kvadrater. Beräkna seriens kvot och första term. (ht 42)

57. Ett obegänsat antal punkter i ett koordinatsystem, $(x_1;\, y_1)$, $(x_2;\, y_2)$, $(x_3;\, y_3)$,..., $(x_n;\, y_n)$, ..., äro så belägna att storheterna $(y_2 - y_1)$, $(y_3 - y_2)$, $(y_4 - y_3)$,...bilda en geometrisk serie med kvoten $\frac{1}{2}$ och första termen -1. Storheterna x_1, $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_2)$, $(x_4 - x_3)$,...bilda en geometrisk serie med kvoten 2 och första termen 1. Vidare är $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Bestäm y_1 och härled ett av n oberoende samband mellan x_n och y_n. Utpricka i koordinatsystemet läget av några punkter i den ovan angivna punktföljden. (vt 43)

---

58. Fyra tal bilda en aritmetisk serie. Om de ökas med respektive 2, 4, 8 och 15, bilda de en geometrisk. Vilka äro de? (ht 01)

59. I en aritmetisk serie är summan av första, andra, femte och sista termen 80. Dessa fyra termer bilda dessutom en geometrisk serie. Vilken är den aritmetiska serien? (jan. 40)

60. I en aritmetisk serie med olika termer och första termen 1 betecknas summan av de n första termerna med S_n. Summorna S_{27}, S_{36} och S_{48} bilda i nämnd ordning en geometrisk serie. Angiv det enklaste uttrycket för S_n. (vt 43)

---

61. Man betraktar summorna av de båda oändliga serierna

$$s = 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - \dots$$
$$s_1 = 2 - \frac{x}{2} - 2x^2 + \frac{x^3}{2} + 2x^4 - \frac{x^5}{2} - 2x^6 + \dots$$

I den första serien hava de två första termerna tecknet +, de två följande tecknet −, de två därpå följande tecknet + o. s. v. Motsvarande gäller om den andra serien från och med dess fjärde term. Dessutom äro i denna serie koefficienternas värden, bortsett från tecknen, omväxlande 2 och $\frac{1}{2}$. Bestäm de värden på x, för vilka

$$s^2 + s_1^2 = 3,4 \qquad \text{(ht 27)}$$

62. I en oändlig geometrisk serie bilda första termen, kvoten och summan en geometrisk serie, under det att kvoten, första termen och summan bilda en aritmetisk serie. Angiv den oändliga geometriska serien. (ht 37)

63. I en oändlig konvergent geometrisk serie divideras var tredje term från och med den tredje med 2. Därigenom blir seriens summa $\frac{13}{14}$ av det ursprungliga värdet. Huru stor är den givna seriens kvot? (vt 39)

64. I var och en av två konvergenta geometriska serier är första termen lika med kvoten. Den ena seriens summa är hälften så stor som den andras. Dividerar man den förra seirens termer i ordninng med den senares, erhåller man en ny konvergent geometrisk serie, vars summa är tre gånger så stor som den största av de förstnämnda summorna. Beräkna de tre seriernas kvoter. (ht 39)

65. I en oändlig geometrisk serie är summan medelproportional till första och tredje termerna. Skillnaden mellan tredje och andra termerna är = 1. Beräkna seriens summa. (aug. 40)

66. Mellan första och andra, mellan andra och tredje, mellan tredje och fjärde o. s. v. termerna i en konvergent oändlig geometrisk serie inskjutas tvenne nya termer, så att en ny geometrisk serie bildas, bestående av både de ursprungliga och de nya termerna. Hur stor är kvoten i den ursprungliga serien, om den nya seriens summa är dubbelt så stor som den ursprungligas? (vt 41)

67. En aritmetisk serie och en konvergent oändlig geometrisk serie ha samma första term. Den förra seriens differens är dubblet så stor som den senares kvot. Tionde termen i en aritmetiska serien är lika med den andra termen i den geometriska serien, och tredje termen i den förra serien är lika med den senare seriens summa. Vilka äro serierna? (vt 42)

68. Första termen i en oändlig geometrisk serie är positiv. Mellan vilka värden skall kvoten ligga, för att summan av de 20 första termerna skall understiga seriens summa med mindre än 0,1 % av denna? Gränsernas värden skola angivas approximativt med tre riktiga decimaler. (aug. 43)

---

69. Bevisa, att summan av den oändliga serien

$$\cos^2 v - \sin^2 v + \cos^4 v - \sin^4 v + \cos^6 v - \sin^6 v + \dots$$

är

$$= \frac{4\cos 2v}{\sin^2 2v}. \qquad \text{(ht 10)}$$

70. Lös ekvationen

$$\tan x - \tan^3 x + \tan^5 x - \tan^7 x + \cdots = \frac{1}{3} \qquad \text{(vt 32)}$$

71. Man har ett oändligt system likformiga rätvinkliga trianglar så beskaffade, att varje efterföljande triangels större katet är lika me den föregående triangelns mindre katet. Sök villkoret för att den första triangelns yta skall vara lika med summan av ytorna till alla följande trianglar med jämn index, alltså summan av den andra, fjärde, o. s. v. (vt 15)

72. I en rät cirkulär kon, vars höjd är 3 gånger så stor som bottenytans radie, är en med denna likformig kon inskriven på det sätt, att denna andra kons spets ligger i medelpunkten för den förstas bottenyta. På samma sätt är i den andra konen en tredje med de förra likformig kon inskriven, i denna en fjärde o. s. v. i oändlighet. Huru stor är summan av samtliga dessa koners volymer, om den första konens bottenradie är r? (vt 17)

73. Från mittpunkten av siadan AB i en liksidig triangel ABC drages en normal mot BC, från dess fotpunkt drages en normal mot AC, från dess fotpunkt drages en normal mot AB, från dess fotpunkt en normal mot BC o. s. v. i samma ordning i oändlighet. Visa att dessa normaler obegränsat närma sig sidorna i en viss triangel. (vt 18)

74. En reguljär polygon med n sidor är inskriven i en cirkel med radien r. Man sammanbinder närliggande sidorns mittpunkter och får sålunda en ny polygon, med vilken man förfar på samma sätt som med den första, o. s. v. i oändlighet. Sök summan av alla dessa polygoners ytor. (vt 20)

75. I en likbent triangel, där basen är a och den mot basen stående vinkeln α, är inskriven en oändlig följd av varandra successivt tangerande cirklar, vilkas medelpunkter äro belägna på den mot basen stående höjden. Hur stor är summan av alla dessa cirklars ytor? (ht 20)

76. OAB är en given cirkelsektor med medelpunkten O, medelpunktsvinkeln $AOB = 2v$, som antages mindre än 120, och radien $OA = OB = r$. I densamma inskrives en ny sektor $O_1A_1B_1$ med samma medelpunktsvinkel $2v$, vars medelpunkt O_1 ligger i mittpunkten av bågen AB; radiernas ändpunkter A_1 och B_1 ligga på radierna OA resp. OB. I sektorn $O_1A_1B_1$ inskrives på analogt sätt en sektor $O_2A_2B_2$ med medelpunktsvinkeln $2v$, så att sålunda O_2 ligger i mittpunkten av bågen A_1B_1 och att A_2 och B_2 ligga på O_1A_1 resp. O_1B_1. I sektorn $O_2A_2B_2$ inskrives på analogt sätt en sektor $O_3A_3B_3$ med medelpunktsvinkeln $2v$, o. s. v. Man får på detta sätt en oändlig följd av sektorer, vilkas medelpunkter obergänsat närma sig en viss punkt. Bestäm denna punkts läge. (vt 33)

77. I kvadraten $ABCD$, vars sida är a, inskrives en kvadrat $A_1B_1C_1D_1$ med A_1 i mittpunkten av AB, B_1 i mittpunkten av BC o. s. v. I $A_1B_1C_1D_1$ inskrives på samma sätt en ny kvadrat $A_2B_2C_2D_2$ med A_2 i mittpunkten av A_1B_1. I $A_2B_2C_2D_2$ inskrives på samma sätt kvadraten $A_3B_3C_3D_3$ o. s. v. i oändlighet. Den spiralformigt brutna linjen $AA_2A_4A_6$ ... drages, och därigenom bildas en oändlig följd av trianglar AA_1A_2, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$, ...Hur stor är summan av alla dessa trianglars ytor? (vt 36)

78. L och M är två mot varandra vinkelräta linjer, som skära varandra i O. Från en punkt A på L drages en rät linje till B på M, så att vinkeln $OAB = v$; från B drages en rät linje till C på L, så att vinkeln $OBC = v$; från C drages en rät linje till D på M, så att vinkeln $OCD = v$ o. s. v. i oändlighet. Bestäm vinkeln v, så att den brutna linjen $ABCD$ ... blir dubbelt så lång som OA. (vt 37)

79. I en cirkel har man inskrivit en fyrhörning, vars sidor i följd äro 2 cm, 6 cm, 6 cm och 2 cm. I denna fyrhörning inskrives en cirkel och i denna cirkel en ny fyrhörning, likformig med den förstnämnda, i denna fyrhörning åter en cirkel, i denna cirkel en med de nämnda fyrhörningarna likformig fyrhörning o. s. v. i oändlighet. Beräkna summan av alla nämnda cirklars ytor. (aug. 39)

80. Från en punkt P på en sida i en given kvadrat drages en linje L, som med den nämnda sidan bildar en vinkel $v < 45°$. Linjen L skär den följande kvadratsidan i en punkt P_1, varifrån linjen L_1 drages vinkelrätt mot L; L_1 skär den därpå följande kvadratsidan i P_2, varifrån linjen L_2 drages vinkelrätt mot L_1; L_2 skär den därpå följande kvadratsidan i P_3. Samma konstruktion upprepas, varvid i ordning erhållas punkterna P_4, P_5, P_6,...Bevisa, att dessa punkter obegränsat närma sig till hörnen i en kvadrat, som är oberoende av punkten P:s läge på den givna kvadratens omkrets men beorende av vinkeln v. (vt 40)

---

81. Vilken är den aritmetiska serie med n termer, vilkens summa är $4n + 5n^2$ oberoende av värdet på n? (vt 91)

82. Beräkna seriesumman $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, då man vet, att densamma är lika med ett polynom av tredje graden i n. (ht 00)

83. I en aritmetisk serie är summan av ett godtyckligt antal termer lika med kvadraten på termantalet. Sök serien. (vt 12)

---

84. Sök förhållandet mellan nionde och åttonde termerna i utvecklingen av

$$\left(\frac{2x^2}{y^3} + \frac{y^2z}{4}\right)^{13}$$ (vt 38)

Sammansatt ränta

85. Ett lån på 60 000 skall amorteras på följande sätt. Vid slutet av vart och ett av de 10 första åren betalas 6% av det ursprungliga lånebeloppet. Vid slutet av det 10:e året betalas dessutom en så stor summa, att återstoden med lika stora årliga inbetalningar som förut blir fullständigt betald på ytterligare 15 år. Räntefoten under de första 10 åren är 4%, unde de övriga 15 åren 5%. Hur stor var den summa, som på en gång betalades? (vt 23)

86. En fader insätter åt sin son vid hans födelse och sedan vid varje födelsedag, tills sonen fyllt 18 år. a kr. Å de insatta pengarna erhålles 5% ränta på ränta. Sonen lyfter, då han fyller 19 år, b kronor och sedan lika mycket varje år, till dess han fyllt 25 år, då pengarna äro slut. Huru stort är a, om $b = 1000$ kr? (ht 25)

87. En person erbjuder sig att för en gård betala 6000 kr kontant och 2500 kr vid vart och ett av de närmaste 10 årens slut. En annan bjuder 9000 kr kontant och 3500 kr vid vart och ett av de närmaste 5 årens slut. Säljaren kan beräkna 6% ränta. Vilket anbud är bäst, och hur mycket är det ena bättre än det andra? (vt 31)

88. En studerande fick vid början av vart och ett av sina fem studieår låna 2000 kr på följande villkor. Under studietiden var han befriad från alla inbetalningar av kapital och ränta. De fem följande åren skulle han årligen vid årets slut betala 500 kr. Därefter skulle han vid varje års slut inbetala en viss summa, vilken bestämdes så, att skulden var betald efter ytterligare tio år. Hur stor var denna summa? Långivaren beräknade 5% ränta på ränta. (ht 31)

89. En stipendiefond på 4000 kr insattes vid början av 1933 i en bank mot 4% årlig ränta. Vid varje års slut uttagas 100 kr till ett stipendium. När fonden vid slutet av ett år, sedan räntan lagts till kapitalet och stirpendiet utbetalats, överstiger 8000 kronor, skola från och med det följande året två stipendier utbetalas. När kan detta ske första gången? (ht 33)

90. Ett lån, på vilket 5% årlig ränta på ränta beräknas, skall amorteras på 40 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Varje inbetalning utgör till en del ränta, till en del kapitalavbetalning å skulden. Vid vilken inbetalning inträffar det för första gången, att räntan blir mindre än kapitalavbetalningen? (ht 35)

91. På en egendom finnes – förutom ungskog – avverkningsmogen skog till en sammanlagd kubikmassa av 1 700 000 m^3 med en genomsnittlig massatillväxt av $1,1\%$ per år. Man vill helt och hållet avverka denna del av skogen under en tidrymd av 50 år, på så sätt att årligen lika stor kubikmassa uttages. Därutöver beräknar man en årlig avverkning av 3900 m^3 genom gallring i yngre bestånd. Till huru många m^3 per år uppgår skogens hela avkastning under tidrymden i fråga? Kalkylen antages utförd vid början av ett år avverkningarna kunna tänkas förlagda till årets slut. (jan. 36)

92. Ett lån å 60 000 kronor, å vilket 3½% årlig ränta på ränta beräknas, skall amorteras på 25 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Huru stor summa av den tionde inbetalningen åtgår till täckande av räntan under det tionde året? (ht 36)

93. En person vill disponera ett kapital, som är placerat mot 5% ränta på ränta, på sådant sätt atthan vid slutet av varje år tar ut sammanlagt a kronor, varvid kapitalet beräknas räcka precis 10 år. Efter slutet av 5:e året sjunker emellertid räntefoten till 4%. Till vilket belopp måste nu de årliga uttagen minskas, för att kapitalet skall räcka så länge som från början avsetts? (vt 37)

94. En person skall under tio år amortera ett lån genom lika stora annuiteter på 647,60 kr. Han erhåller dock tillstånd att i stället erlägga endast upplupen ränta under vart och ett av de fem första åren och sedan amortera skulden genom inbördes lika stora annuiteter under de senare fem åren. Hur stora skola dessa annuiteter vara, om räntefoten är 5%? (aug. 37)

95. En person utlånade vid början av ett år en viss summa pengar till en fastighetsägare mot 5% årlig ränta. Den vid varje års slut erhållna räntan insattes omedelbart i en bank mot 3% årlig ränta. Efter 10 år återbetalades lånet. Vilken effektiv ränta kan han sägas ha haft på sitt kapital under denna tid, d. v. s. till vilken procent borde samma kapital ha varit utlånat för att med ränta på ränta ge honom samma behållning vid tionde årets slut? (ht 37)

96. En person lånar en summa mot 3½% ränta. Efter vilken räntefot skall han låna ut samma summa, för att han skall få sin egen skuld betald genom att inbetala den erhållna räntan vid slutet av varje år under 35 års tid? (jan. 38)

97. En tjänsteman insatte, då han fyllde 35 år, 600 kr i en bank. detsamma gjorde han varje följande födelsedag till och med den, då han fyllde 64 år. Av det samalde kapitalet uttog han därefter på varje födelsedag från och med den, då han fyllde 65 år, en viss summa. Han dog vid en ålder av 76½ år. Det i banken innestående kapitalet var då 24 380 kr. Hur stor var den summa som årligen uttogs? Pengarna voro placerade på kapitalräkning, där räntan halvårsvis lades till kapitalet. Räntefoten var hela tiden 4%. (aug. 38)

98. En person önskar genom insättningar i en bank tillförsäkra sig ett årligt belopp av 1200 kronor under 15 år från och med början av det år han fyller 60. Vilket belopp måste han fördenskull årligen inbetala under 20 på varandra följande år, om första inbetalningen sker vid början av det år då han fyller 30? Räntan beräknas efter 3% för år och kapitaliseras vid varje års slut. (vt 39)

99. En studerande lånar vid början av 5 på varandra följande år 2400 kr. Skulden amorteras genom 20 lika stora inbetalningar som göras med ett halvt års mellanrum och första gången 2 år efter det att sista lånebeloppet erhållits. Hur stor är varje inbetalning, om räntefoten antages vara 4% och räntan kapitaliseras vid varje halvårs slut? (aug. 39)

100. En fabriksanläggning, som togs i bruk vid årsskiftet 1914–1915, har åsamkat en fastighetsägare i grannskapet en årlig förlust, som uppskattas till 100 kronor. Samma förlust beräknas årligen under all framtid. Varje års förlust tänkes förlagd till årets slut. Efter ingången överenskommelse skall fabriken till fastighetsägaren på en gång vid årsskiftet 1939–1940 utbetala värdet av alla dessa förluster. Hur stort blir detta värde, om ränta på ränta beräknas efter p%. Undersök grafiskt, hur värdet ändras, då p antar värden från 3 till 6. (vt 40)

101. En person testamenterade till två gossar en summa av 10 000 kr, som skulle tillfalla dem vid årsskiftet närmast efter hans död och då fördelas på så sätt, att båda gossarna kunde beräknas ha att lyfta en lika stor summa vardera vid slutet av de år, under vilka de skulle fylla 19 år. Samma år testator dog, fyllde gossarna 9 respektive 14 år. Hur fördelades arvet, om ränta på ränta beräknades efter 4%? (ht 40)

102. Två från början lika stora kapital växa med ränta på ränta under ett jämnt antal år. Den ena förräntas halva tiden efter p% och halva tiden efter q%. Det andra förräntas hela tiden efter $(p+q)/2$%. I vilket fall blir slutkapitalet störst? (jan. 41)

103. En skuld op 12 000 kr skall amorteras under 20 år på så sätt, att vid slutet av vart och ett av femte, tionde, femtonde och tjugonde åren etfer lånets upptagandeinbetalas 3000 kr och vid slutet av vart och ett av de 20 åren dessutom en viss summa. Hur stor blir denna, om räntefoten är 5%? (aug. 41)

104. En studerande som börjar sina universitetsstudier det år han fyller 20 år, upptar vid årets början ett lån på 2500 kr. Vid början av vart och ett av de närmast följande åren lånar han ett lika stort belopp, tills han avlagt sin första akademiska examen. Han lyckas då få en anställning, som ger honom någon inkomst, så att han från och med det år han fyller 25 år kan minska lånebeloppet till 1500 kr om året. Det år han fyller 29 år, disputerar han för filosofie doktorsgrad och måste då, utöver de 1500 kr till levnadsomkostnaderna (det sista av detta skags lån han behöver upptaga), låna 1500 kr för att gälda kostnaden för doktorsavhandlingen. Det år han fyller 30 år, får han en befattning, vilken han beräknar behålla till utgången av det år, under viklet han fyller 65 år, då han är skyldig att avgå med pension. Han vill nu amortera sina studieskulder genom lika stora annuiteter, av vilka den första betalas det år han fyller 30 år, och den sista det år han fyller 65 år, då skulderna skola vara slutbetalda. Hur stor blir annuiteten, om ränta beräknas etfer $4{,}5$% och inga avbetalningar gjorts tidigare? Alla lån tänkas upptagna vid årets början och alla avbetalningar tänkas gjorda vid årets slut. (ht 41)

105. En person köpte i början av ett år aktier i ett bolag till ett pris av 130 kr per aktie. Under de första fem åren lyfte han vid slutet av varje år en utdelning av 5 kr per aktie. Av vissa skäl måste bolaget därefter inställa all utdelning under fem år. Vid slutet av vart och ett av de fem därpå följande åren var utdelningen 6 kr per aktie. Vid början av det 16:e året önskade personen sälja aktierna. Hur mycket borde han då begära för varje aktie för att få 4% ränta på sitt insatta kapital? (jan. 43)

106. En stipendiefond på 20 000 kr är placerad i 4% obligationer. Räntan, som utbetalas halvårsvis den 30 april och den 31 oktober, insättes omedelbart på sparkasseräkning mot 2½% ränta, vilken kapitaliseras vid varje års slut. Från sparkasseräkningen uttages varje år den 15 december en summa av 600 kr till stipendier. Första obligationsräntan erhölls och insattes den 30 april 1941. Första uttagningen till stipendier gjordes den 15 december 1941. Till vilket belopp har fonden vuxit vid årsskiftet 1950–1951? Den icke utfallna räntan på obligationerna 1/11–31/12 1950 medräknas icke. (ht 43)

Planimetri

a. Uppgifter som lämpligen behandlas utan trigonometriska funktioner

107. En cirkel, vars diameter AB är 6 dm, tangerar en rät linje i punkten A. Huru stor är radien i en cirkel, som har sitt centrum på den förra cirkelns omkrets, går genom B och tangerar den räta linjen? (ht 08)

108. I en cirkel med radien r är en liksdig triangel inskriven. Beräkna längden av den korda, som genom triangelns sidor delas i tre lika delar. (ht 18)

109. Från en yttre punkt drages tangenter till en cirkel med radien r. I cirkeln är inskriven en rektangel, som har ett hörn beläget i vardera tangeringspunkten och ena sidan lika stor som radien. Angiv den yttre punktens avstånd från cirkelperiferin för de båda fall, som kunna ifrågakomma. (ht 22)

110. Från en punkt på en cirkels periferi utgå tvenne kordor, som med varandra bilda 60° vinkel, och som ha längderna 5 cm och 8 cm. Hur lång är den korda i cirkeln, som delar vinkeln mellan nämnda kordor mitt itu? (ht 28)

111. Tre cirklar med radierna a, b, c tangera varandra två och två utantill. Hur stor är radien i den cirkel, som går genom de tre tangeringspunkterna? (vt 29)

112. Två kordor i en cirkel skära varandra i en punkt inom cirkeln under en vinkel av 60° så, att den ena kordans delar bliva 3 cm och 8 cm och den andra kordans delar 4 cm och 6 cm. Beräkna cirkelns radie. (ht 30)

113. I parallellogrammen $ABCD$ är $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm och vinkeln mellan dessa sidor 60°. E är mittpunkten på CD och F skärningspunkten mellan sammanbindningslinjerna AE och BD. Beräkna ytan av fyrhörningen $BCEF$. (jan. 36)

114. I en rätvinklig triangel är avståndet mellan medelpunkterna i den inskrivna och den omskrivna cirkeln lika med diametern i den inskrivna cirkeln. Sök förhållandet mellan radierna i de nämnda cirklarna. (vt 36)

115. Från en punkt P på en given cirkel äro dragna två lika långa kordor PA och PB, som bild 60° vinkel med varandra. Man söker en tredje korda CD. ej parallell med AB, som skär PA i E och PB i F så, att $CE = FD$ och $EF =$ cirkelns radie. Konstruera CD, och beräkna dess längd, uttryckt i cirkelns radie (r). (maj 36)

116. I en triangel med sidorna a, b och c äro r_a och r_b radierna till de vid sidan a resp. sidan b vidskrivna cirklarna. Bevisa, att triangeln är rätvinklig, om $r_a + r_b = c$. (aug. 36)

117. I en rätvinklig triangel delas hypotenusan av den mot densamma dragna höjden i förhållandet $m : n$. Angiv förhållandet mellan de i deltrianglarna inskrivna cirklarnas ytor som en rationell funktion av m och n. (jan. 37)

118. I en likbent triangel är förhållandet mellan sidan och basen $3 : 2$. En cirkel går genom basens ändpunkter och tangerar de andra sidorna. I vilket förhållande delar cirkeln den linje, som förenar basens ena ändpunkt med mittpunkten på höjden mot basen? (vt 40)

119. Två kongruenta kvadrater äro placerade så, att de fullständigt täcka varandra. Den ena vrides i kvadraternas plan en vinkel av 30° kring diagonalernas skärningspunkt. Hur många procent av vardera kvadratens yta utgör ytan av den figur, som efter vridningen blir gemensam för kvadraterna? (vt 41)

120. Visa, att en triangel är rätvinklig, om radien i en av de vidskrivna cirklarna är lika med summan av radien i den inskrivna cirkeln och radierna i de båda andra vidskrivna cirklarna. (ht 43)

---

121. I ett parallelltrapets äo de parallella sidorna respektive 6 cm och 4 cm och var och en av de övriga sidorna 3 cm. Hur stort är ett med detta likformigt trapets, som kan inskrivas i en cirkel med radien 6 cm? (ht 17)

122. Ett parallelltrapets är omskrivet kring en cirkel med radien 12 cm. Huru långa äro de båda parallella sidorna i fall de båda övriga äro resp. 30 cm och 40 cm? (vt 22)

123. I ett parallelltrapets $ABCD$ är $AB = BC = CD = 2$ dm och vinkeln $A = 30°$. Mittpunkten E av AD sammanbindes med C, och B sammanbindes med D. Linjerna EC och BD skära varandra i F. Beräkna ytan av fyrsidingen $ABFE$. (jan. 39)

b. Uppgifter som lämpligen behandlas med trigonometriska funktioner

1. Uppgifter som kunna behandlas utan hjälp av triangelteoremen

124. a och b äro två sidor i en triangel ABC och m medianen till den tredje. Beräkna triangelns vinklar, när
$$2a = 3b = 3m.$$ (vt 14)

125. Sök vinklarna i en rätvinklig triangel, om längderna av de från den räta vinkelns spets dragna inre och yttre bisektriserna förhålla sig till varandra som 3 till 4. (ht 17)

126. Genom en korda är en cirkel delad i två segment och i vart och ett av dessa är en kvadrat inskriven. Beräkna segmentens medelpunktsvinklar, då man vet, att den ena kvadraten har dubbelt så stor sida som den andra. (ht 18)

127. I en triangel förhålla sig vinklarna till varandra som $2 : 3 : 5$. Hur förhåller sig den längsta medianen till den längsta sidan? (ht 21)

128. En kvadrat är inskriven i en annan kvadrat på det sätt, att den förras hörn ligga på var sin av den senares sidor. Hur stora vinklar bilda den ena kvadratens sidor med den andras, då kvadraternas ytor förhålla sig till varandra som 3 till 4? (ht 25)

129. Sök vinklarna i en rätvinklig triangel, som är så beskaffad, att medianen till den ena kateten är vinkelrät mot medianen till hypotenusan. (vt 26)

130. I en rätvinklig triangel drages höjden mot hypotenusan. Summan av höjdens projektioner på de båda kateterna förhåller sig till ena kateten som $6 : 5$. Beräkna triangelns vinklar. (ht 26)

131. Bestäm vinklarna i ett parallelltrapets, som uppfyller följande villkor. De två icke parallella sidorna samt den mindre av de parallella sidorna äro alla tre lika långa. Drages genom diagonalernas skärningspunkt en rät linje parallell med de båda parallella sidorna i trapetset, så delar den de icke parallella sidorna i förhållandet $3 : 5$. (ht 27)

132. I en likbent triangel är den vid basen vidskrivna (= utantill inskrivna) cirkelns radie aritmetiska mediet till radierna i den inskrivna cirkeln och i den cirkel, som är vidskriven en av de lika sidorna. Sök triangelns vinklar. (vt 34)

133. I en likbent triangel drages från basens ena ändpunkt en linje, som delar motstående sida i förhållandet $1 : 2$. Vinkeln mellan den dragna linjen och basen är $60°$. Beräkna triangelns vinklar. (aug. 35)

134. Två lika stora liksidiga trianglar med sidan = 10 cm hava ett hörn A gemensamt. Vinkeln mellan dears från A utgående höjder är $45°$. Beräkna ytan av den fyrhörning, som utgör trianglarnas gemensamma del. (jan. 37)

135. En cirkel med radien r, som har sin medelpunkt i mittpunkten av den större av de parallella sidorna i ett likbent parallelltrapets, tangerar trapetsets tre övriga sidor. Trpatesets area är $19r^2/8$. Beräkna dess vinklar. (ht 38)

136. Från ett hörn i en triangel dragas höjden samt den den räta linje, som förbinder hörnet med den omskrivna cirkelns medelpunkt. Vinkeln mellan dessa linjer är $30°$ och längderna av höjden och den omskrivna cirkelns radie äro 8 cm och 6 cm respektive. Beräkna triangelns vinklar. (vt 39)

137. Ett gräsbevuxet fält har formen av en rektangel med sidorna 24 m och 10 m. Två hästar äro tjudrade i varsin ändpunkt av en diagonal i rektangeln. Vartdera tjudret är så avpassat, att hästen kan avbeta de delar av fältet, vilkas avstånd från tjudrets fästpunkt är lika med eller mindre än fältets halva diagonal. Hur stor procent av fältets yta kan inte avbetas? (ht 39)

138. I ebn triangel är höjden mot den längsta sidan fjärdeproportional till till de tre sidorna samt tredjeproportional till de båda andra höjderna. Beräkna triangelns vinklar. (aug. 42)

139. Beräkna ytan av en triangel, i vilken den inskrivna) cirkelns radie är 1 cm, en sida 4 cm och en intill denna liggande vinkel $60°$. (ht 42)

2. Tillämpningar på triangelteoremen

140. Diametern i en halvcirkel är delad i två delar, den ena 13 cm och den andra 5 cm; på vardera delen såsom diameter är en halvcirkel uppritad. Huru stor är radien i den cirkel, som tangera dessa tre halvcirklar, och huru stor är den vinkel, som föreningslinjen mellan sistnämnda cirkels och den största halvcirkelns medelpunkter bildar med halvcirklarnas gemensamma diameter? (ht 95)

141. Kring triangeln ABC är en cirkel omskriven; dess tangenter i punkten A råkar sidan BC:s förlängning i T. Vinkeln A är $45°17'$, B är $58°13'$, cirkelns radie är 11,72 dm. Beräkna stycket AT. (ht 00)

142. En triangels yta är $600\,\mathrm{m}^2$. Den i triangeln inskrivna cirkeln har radien 10 m. En av de vidskrivna (utantill inskrivna) cirklarna har radien 20 m. Beräkna triangelns sidor och vinklar. (ht 25)

143. I en triangel är en sida 8 dm, triangelns yta $4\,\mathrm{dm}^2$ och den kring triangeln omskrivna cirkelns radie 5 dm. Beräkna triangelns vinklar. (vt 27)

144. I en triangel är en vinkel 60°, denna vinkels bisektris 2 dm och radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln 2 dm. Beräkna triangelns sidor och vinklar. (ht 29)

145. I en triangel ABC är sidan AB 96 cm, vinkeln A 30° samt den kring triangeln omskrivna cirkelns radie 50 cm. Huru stora äro sidorna AC och BC? (vt 32)

146. A, B, C, D och E äro fem på varandra följande hörn i en regelbunden niohörning. I vilket förhållande delas diagonalen AD av diagonalen CE? (vt 33)

147. I triangeln ABC är sidan BC aritmetiska mediet till de båda andra sidorna. Medianen (mittlinjen) till BC är medelproportional till AB och AC. Beräkna vinkeln BAC. (ht 34)

148. I fyrhörningen $ABCD$ äro sidorna AB, BC och CD lika långa. Vinklarna B och C äro 100° och 110°. Beräkna vinklarna A och D. (vt 35)

149. Två vinklar i en triangel äro 58° och 74°. Radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln är 40 cm. Hur stor är radien i den i triangeln inskrivna cirkeln? (aug. 35)

150. I triangeln ABC är sidan $AC = 19{,}3$ cm, sidan $BC = 8{,}6$ cm och vinkeln $B = 52{,}17°$. Sidan CA förlänges till en punkt D utanför A, så att $AD = \frac{1}{2}AB$. Beräkna vinklarna i triangeln ABD. (ht 35)

151. I en cirkel med radien 5 cm är inskriven en sexhörning $ABCDEF$, i vilken sidorna AB, CD och EF äro lika långa och var och en av dem dubbelt så lång som var och en av de övriga sidorna. Beräkna sexhörningens yta. (ht 35)

152. Skillnaden mellan den största och den minsta sidan i en triangel är hälften så stor som radien i den i triangeln inskrivna cirkeln. Den tredje sidan är aritmetiska mediet till de båda andra sidorna. Beräkna den största vinkeln. (ht 35)

153. I triangeln ABC är $AB = 6{,}2$ cm och vinkeln $BAC = 56{,}48°$. På AC (mellan A och C) tages punkten D, så att $BD = AB$, varvid $CD = 2BD$. Solvera triangeln. (aug. 37)

154. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm och $DA = 4$ cm samt diagonalen $AC = 7$ cm. Sök vinkeln mellan diagonalerna. (ht 37)

155. I en parallellogram $ABCD$ är vinkeln $ABC = 150°$, och den vinkel, som sidan AB bildar med diagonalen BD, är 40°. DA utdrages till E, så att $AE = AD$. Vilken vinkel bildar EB med AB? (jan. 38)

156. AB är sida i en i en cirkel inskriven regelbunden femhörning. I det mindre av de segment, som AB avskär av cirkeln, inskrives en triangel ABC, i vilken sidorna AB och AC förhålla sig som $1:3$. Beräkna förhållandet mellan ytorna av de cirkelsegment, som ligga utanför sidorna AC och BC. (aug. 38)

157. I ett parallelltrapets äro de parallella sidorna a och b, de övriga sidorna c och d samt diagonalerna e och f. Visa, att

$$e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab. \qquad \text{(aug. 38)}$$

158. I en triangel ABC är $AB = 10$ cm, $BC = 6{,}5$ cm och vinkeln $A = 36{,}3°$. På AB väljes en punkt D, så att $AD = 3{,}5$ cm. Beräkna längden av CD. (ht 38)

159. I en triangel förhålla sig radierna i de vidskrivna cirklarna som $3 : 4 : 6$. Beräkna triangelns vinklar. (jan. 39)

160. I en triangel ABC är H höjdernas skärningspunkt. Beräkna triangelns vinklar, då $AH : BH = 3 : 2$ samt vinkeln $AHB = 110°$. (aug. 39)

161. I en triangel delar en av bisektriserna triangelns yta i två delar, som förhålla sig till varandra som $2 : 3$. Om denna bisektris utdrages, delar den omkretsen av den kring triangeln omskrivna cirkeln i förhållandet $3 : 4$. Sök triangelns vinklar. (ht 39)

162. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel med radien 65 mm. Sidorna AB och AD äro lika långa, diagonalen AC är 104 mm, sidorna BC och CD förhålla sig som $11 : 21$. Bestäm sidornas längder. (aug. 40)

163. I en triangel ABC är vinkeln $A = 70°$. Medianen till sidan AC förhåller sig till sidan AB som $5 : 4$. Beräkna vinklarna B och C. (ht 40)

164. Flera fysikaliska formler (t. ex. linsformeln) kunna skrivas $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Då två av storheterna a, b och f äro kända, kan man bestämma den återstående genom att använda ett s. k. nomogram. Detta utgöres här av en triangel AOB, där vinkeln $O = 120°$, sidan $OA = b$, sidan $OB = a$ samt längden av bisektrisen till vinkeln $O = f$. Visa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \qquad \text{(vt 42)}$$

165. Vinkeln mellan de linjer, som i en romb förena en sidas mittpunkt med den motstående sidans ändpunkter, är 45°. Beräkna rombens vinklar. (aug. 42)

166. I en triangel ABC är vinkeln $C = 100°$ och $CA : CB = 5 : 3$. Medianen till sidan AB utdrages, tills den skär den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln i D. Visa, att $DB : DA = 5 : 3$, och beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka cirkelns yta delas av kordan CD. (ht 42)

167. I en triangel äro två sidor 37,23 m och 48,31 m. Den ena av de mot dessa sidor stående vinklarna är 4,68° större än den andra. Beräkna den tredje sidan och vinklarna i triangeln. (jan. 43)

168. Från spetsen A i den likbenta triangeln ABC drages en rät linje, som delar toppvinkeln i två olika stora delar, α och β. På denna linje är punkten D så belägen, att vinklarna ADB och ADC äro lika stora ($= v$). Visa, att storleken av vinkeln v är oberoende av α och β. (jan. 43)

169. Två trianglar ha lika stora ytor. Sidorna i den ena äro 40 cm, 60 cm och 80 cm. Vinklarna i den andra äro 40°, 60° och 80°. Beräkna den minsta sidan i den senare triangeln. (vt 43)

170. I en likbent triangel bildar medianen till en av de lika stora sidorna en vinkel av 80° med denna sida. Beräkna triangelns vinklar i det ena av de båda fall, som är möjliga. (ht 43)

---

171. Två räta linjer skära varandra i punkten A under 40° vinkel. På den ena av linjerna ligga på samma sida om A två punkter B och C, så att $AB = 16$ cm och $AC = 25$ cm. Från vilken punkt på den andra linjen ser man avståndet BC under största möjliga synvinkel, och huru stor är denna? (vt 37)

3. Praktiska "tillämpningar".

172. På en slätt ligger platsen A 2000 m rätt norr om platsen B. En sfärisk luftballongs centrum C observeras från A på 30° höjd över horisonten i ett vertikalplan, som gör en vinkel av 50° med meridianen, från norr åt öster räknat. Från B är sistnämnda vinkel blott 40°. Beräkna ballongens höjd över marken samt dess avstånd från A och B. (ht 91)

173. Man har uppmätt avståndet mellan tre punkter A, B och C på en horisontell slätt och funnit $AB = 92{,}5$ m, $BC = 60{,}1$ m, $AC = 110{,}4$ m. I en punkt P, belägen på förlängningen av linjen AB åt B till, har man uppmätt vinkeln BPC, som befunnits vara 12,5°. Huru stort är avståndet PC? (ht 11)

174. Man önskar bestämma avståndet från en punkt A till en därifrån osynlig och oåtkomlig punkt B. Från punkterna C och D på en från A utgående rät linje ACD är emellertid B synlig. Genom mätning finner man $AC = 236{,}7$ m, $CD = 215{,}9$ m, $\wedge\, ACB = 142°37'$, $\wedge\, ADB = 76°13'$. Beräkna AB. (ht 13)

175. Från ett skepp, som seglar från söder mot norr, observeras två fyrar rakt i väster. Efter en timmes seglats synes den ena av dessa fyrar i sydväst, den andra i sydsydväst. Avståndet mellan fyrarna är 8 km. Beräkna skeppets hastighet. (vt 19)

176. För att bestämma höjden av en bergstopp P har man uppmätt en baslinje $AB = 198$ m i sådan riktning, att vertikalplanet genom AB går genom P. Baslinjen är ej horisontell, utan ändpunkten B, som är närmast P, ligger 8,4 m högre än A. Syftlinjerna AP och BP bilda vinklarna 25,7° och 31,8° med horisontalplanet. Bestäm höjdskillnaden mellan P och B. (vt 36)

177. Från en punkt P synas spetsarna av en flaggstång A och ett torn B i rät linje under höjdvinkeln 15,36°. Om man härifrån avlägsnar sig 50 m i riktning från tornet till en punkt Q med samma höjdnivå som P och belägen i samma plan som A, B och P, synas spetsarna av A och B under höjdvinklarna 6,38° resp. 12,52°. Beräkna härav avståndet mellan flaggstången och tornet. (vt 37)

178. Ett fartyg A gick med 20 knops fart i ostnordostlig riktning. Då man ombord på A siktade en hamn i sydostlig riktning på 15 nautiska mils avstånd, såg man ett skepp B lämna densamma. Det senare fartyget hade en hastighet av 16 knop. Efter en halvtimmes förlopp, under vilken tid de båda fartygen närmat sig varandra, lågo de i rät linje med hamnen. Bestäm B:s kurs och dess avstånd till A vid det senare tillfället. 1 knop = 1 nautisk mil per timme. (vt 40)

179. Från en punkt på land iakttogs med vinkelinstrument en stor ångare, som bogserades. Dess längd var 100 m. Första observationen gjordes kl 10. Efter 6 min hade synlinjen till ångarens för vridit sig 30°. Vid detta tillfälle konstaterades, att båten från för till akter upptog en synvinkel av 3°. Genom fortsatta observationer fastställdes det ögonblick, då den nämnda synlinjen vridit sig ytterligare 30°, vilket inträffade kl 10:15. Hur många knop gjorde ångaren, om den antages röra sig med konstant hastighet och utan kursändring? 1 knop = 1852 m/tim. (Ändrat.) (ht 40)

---

180. Shetlandsöarna ligga på 60° nordlig latitud och 1° västlig longitud. Galapagosöarna ligga på ekvatorn och på 91° västlig longitud. Jorden antages vara en sfär med omkretsen 4000 mil. Hur stort är det kortaste avståndet längs jordytan mellan dessa ögrupper (d.v.s. avståndet längs den storcirkel, som går genom dem)? (jan. 38)

181. Los Angeles och Osaka ligga på ungefär samma geografiska bredd, 34,5° N. Longituderna för de båda städerna äro 117,5° V respektive 134,5° O. Beräkna det kortaste avståndet mellan orterna a) utefter parallellcirkeln, b) utefter jordytan, d.v.s. utefter storcirkeln genom orterna. Jorden betraktas som en sfär med omkretsen 4000 mil. (jan. 41)

Trigonometriska ekvationer och teorem

182. Lös ekvationen $\cos x = 2(1 + \cos 2x)\sin x$. (vt 09)

183. Lös ekvationen $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. (ht 15)

184. Lös ekvationen $\sin x \cos x = \sin x + \cos x$. (vt 17)

185. Lös ekvationen $\sin 3x + \sin 2x = 3\sin x$. (vt 19)

186. Lös ekvationen $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (vt 21)

187. Angiv alla lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}.$$ (ht 24)

188. Lös ekvationen $1 + \cos x + \cos 2x + \sin x + \sin 2x = 0$. (vt 25)

189. Visa, att man kan bestämma ett siffervärde på a så, att likheten

$$\sin(60^\circ - x)\cdot\sin x\cdot\sin(60^\circ + x) = a\cdot\sin 3x$$

gäller för alla vinklar x. (vt 25)

190. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$2\sin 2x + 2 = \tan x + \cot x.$$ (vt 26)

191. Bestäm alla de vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x.$$ (ht 27)

192. Bestäm alla de vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\sin x\cdot\tan 2x = 4\cos x\cdot\sin 2x - \cos x.$$ (vt 28)

193. Bestäm alla de vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\sin 2x - \sin x + 1 - \cos x = 0.$$ (ht 28)

194. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$3\tan x + 2\tan 2x - 3\cot x = 0.$$ (ht 29)

195. Lös ekvationen

$$\sin\left(\frac{2}{3}x - 45^\circ\right) + \cos\left(\frac{2}{3}x + 45^\circ\right) = 0$$ (ht 30)

196. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\sin 3x\cdot\sin 4x = \cos 4x\cdot\cos 5x.$$ (vt 31)

197. Lös ekvationen $\cot 3x + 3\cot x + \tan x = 0$. (vt 35)

198. Lös ekvationen $\cot 2x + \cot^2 x = 1$. (aug. 35)

199. Vilka värden antager funktionen $f(x) = \sin 2x + 2\sin^2 x$ för de värden på x, som satisfiera ekvationen

$$\cos 2x + 2\sin x\cos x = 0.$$ (jan. 36)

200. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\cos^2 x - \sin^2 = \frac{3}{5}(1 + \tan x). \qquad \text{(ht 36)}$$

201. För vilka spetsiga eller trubbiga vinklar gäller olikheten

$$4 + 2\cos 2x - 5\sin x > 0? \qquad \text{(ht 39)}$$

202. Lös ekvationen

$$\frac{\sin 3x}{\cos x} + 2\tan x + \cot x = 6\sin 2x. \qquad \text{(jan. 40)}$$

203. Lös ekvationen

$$\cos px + \cos(p-2)x = 2\cos x \cdot \cos(p+1)x,$$

där p är en konstant. (vt 40)

204. Lös ekvationen $4\cos x\cos 2x = 1.$ (aug. 40)

205. Lös ekvationen $\sin(3x - 180°)\cos(270° - x) = \frac{1}{2}.$ (ht 40)

206. Lös ekvationen

$$\cos 4x + 2\sin 2x\cos x + 2\cos 2x + 1 = 0. \qquad \text{(jan. 41)}$$

207. Ekvationen $\tan x - \tan 2x = a\sin x$, där a är en konstant, satisfieras av $x = 60°$. Bestäm samtliga vinklar, som satisfiera ekvationen. (vt 41)

208. Lös ekvationen $\sin x\sin 3x + \cos 2x = 1.$ (ht 41)

209. Lös ekvationen $\sin 4x = 4\cos x.$ (vt 42)

210. Lös ekvationen $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 4x + \cos 4x.$ (aug. 42)

211. Lös ekvationen $\sin x + \cos x = 2\cos 2x.$ (ht 42)

212. Lös ekvationen

$$(\cos x + \cos 2x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 = 1. \qquad \text{(jan. 43)}$$

213. Lös ekvationen $\sqrt{2 + 2\cos x} = \tan x.$ (vt 43)

214. Lös ekvationen $2\sin 3x - 3\cos 3x = 1.$ (aug. 43)

215. Visa, att man kan bestämma sådana värden på konstanterna a, b och c, att likheten $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = (a + b\cos x + c\sin x)^2$ gäller för alla värden på x. (ht 43)

---

216. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \tan x = \frac{1}{2}\tan y \\ x + y = 30° \end{cases} \qquad \text{(ht 20)}$$

217. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{3}{4} \\ \cos(x - y) = \dfrac{24}{25} \end{cases} \qquad \text{(vt 22)}$$

218. Två vinklars summa är 130°, och deras sinus förhålla sig till varandra som 3 till 2. Vilka äro dessa vinklar? (vt 30)

219. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \tan x + \cot y = -\frac{1}{4} \\ \cot x + \tan y = 2. \end{cases}$$ (maj 36)

220. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sin 3x + \sin 3y = 1\frac{3}{8} \\ \sin x + \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$ (vt 37)

221. I en rätvinklig triangel känner man längderna av hypotenusan $BC = 3$ m och det stycke $BD = 2$ m av vinkelns B:s bisektris, som ligger inom triangeln. Beräkna vinkeln B och kateterna. (vt 08)

222. I en triangel ABC är vinkeln B 3 gånger så stor som vinkeln C. Sidan BC delas i förhållandet $1 : 5$ av tangeringspunkten för den inskrivna cirkeln. Sök vinklarna B och C. (vt 10)

223. I en likbent triangel är cosinus för vinkeln vid spetsen 3 gånger så stor som cosinus för vinkeln vid basen. Hur stora äro vinklarna? (vt 12)

224. I en triangel är en sida 5 m, en annan 8 m och den mellanliggande vinkeln $= \alpha$. Om α vore $24°37'$ större, skulle triangelns ytinnehåll vara 4 m^2 större. Hur stor är vinkeln α? (ht 16)

225. I en triangel ABC är sidan $AB = 3748$ cm, sidan $BC = 5927$ cm och vinkeln B dubbelt så stor som vinkeln C. Beräkna vinklarna i triangeln. (ht 19)

226. Från två orter, vilka ligga rätt i norr och söder från varandra med en breddskillnad av $8°54'$, observeras en meteor i det ögonblick, då den befinner sig mellan dem och i deras meridianplan. De höjdvinklar, på vilka meteoren då synes från de båda orterna, befinnas vara $9°30'$ och $14°20'$. Beräkna härur meteorens höjd över jordytan. Jorden antages sfärisk och dess radie = 6370 km. (vt 30)

227. I en triangel ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B. Bestäm den mot vinkeln A stående sidan som funktion av triangelns båda övriga sidor. (ht 30)

228. I en cirkel är inskrivet ett parallelltrapets, i vilket tre sidor äro lika långa och var och en av dem dubbelt så lång som den fjärde sidan. Beräkna de medelpunktsvinklar, som trapetsets sidor upptaga, samt trapetsets yta, då cirkelns radie är 1,6 dm. (ht 33)

229. Den kring en triangel omskrivna cirkelns radie är lika med aritmetiska mediet mellan två av sidorna och på samma gång lika med dubbla medelproportionalen till dessa sidor. Beräkna den vinkel sidorna i fråga omsluta. (jan. 36)

230. I triangeln ABC är M mittpunkten av BC. AB är dubbelt så lång som AC, och vinkeln CAM är tre gånger så stor som vinkeln BAM. Beräkna vinkeln BAC. (aug. 36)

231. $ABCD$ är en i en cirkel inskriven fyrhörning. AB är 8,1 dm och AD 6,8 dm. Diagonalen AC bildar med AB vinkeln 24,3° och med AD vinkeln 52,6°. Beräkna AC. (aug. 36)

232. På periferin till en given cirkel avsättes bågen $AB = 90°$. En punkt B_1 på denna båge sammanbindes med B, och parallellt med BB_1 drages kordan AA_1, varvid den mellan dessa kordor liggande delen av cirkeln blir $\frac{1}{5}$ av hela cirkelytan. I vilket förhållande delas bågen AB av punkten B_1? (ht 36)

233. I en triangel är en vinkel 75° och den däremot stående sidan 2 dm. Beräkna förhållandet mellan de delar, vari denna sida delas av den mot densamma dragna höjden, om denna är 1 dm. (ht 37)

234. I en cirkel med radien r är inskrivet ett parallelltrapets som har tre lika långa sidor. Vardera diagonalen är $\frac{2}{3}$ av cirkelns diameter. Bestäm parallelltrapetsets yta. (jan. 38)

235. I en triangel ABC är förhållandet $AB : AC = 2 : 3$. Vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln B. Beräkna triangelns vinklar. (vt 38)

236. I triangeln ABC är $AB = a$, $AC = 2a$ och vinkeln $A = 90°$. Punkten P är belägen inom triangeln, så att vinklarna APB, BPC och CPA äro lika stora. Bestäm längden av PA samt de vinklar, som PA bildar med kateterna. (vt 38)

237. I parallelltrapetset $ABCD$, där AB är parallell med CD, är $DA = 5$ cm, $AB = 4$ cm och $BC = 3$ cm. Vinkeln BCD är tre gånger så stor som vinkeln BAC. Beräkna vinklarna i parallelltrapetset. (jan. 40)

238. I en triangel ABC är vinkeln $C = 120°$. De vid sidorna AC och BC vidskrivna cirklarnas radier förhålla sig som $5 : 9$. Bestäm triangelns vinklar. (aug. 40)

239. I triangeln ABC förhåller sig vinkeln B till vinkeln C som $2 : 3$. Från A dragas bisektrisen samt medianen till den motstående sidan. Avståndet mellan deras skärningspunkter med sidan BC utgör $\frac{1}{14}$ av denna sidas längd. Bestäm triangelns vinklar. (aug. 41)

240. I en triangel ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B och sidan BC dubbla medelproportionalen till de övriga sidorna. Beräkna triangelns vinklar. (jan. 42)

241. I två likbenta trianglar äro benen lika stora och förhållandet mellan baserna $3 : 8$. Vinkeln vid spetsen är i den ena triangeln tre gånger så stor som i den andra. Beräkna trianglarnas vinklar. (aug. 43)

---

242. Bestäm vinklarna A, B, C i en triangel, ifall

$$2\sin A + \sin B - 2\sin C = 0 \quad \text{och}$$
$$\sin A + 3\sin B - 3\sin C = 0.$$

(ht 22)

243. Mellan vinklarna A, B, C i en triangel består följande relation

$$\cot B = \frac{\sin A + \sin(C - B)}{\cos(C - B)}.$$

Bevisa, att triangeln är rätvinklig. (vt 25)

244. Visa, att i varje triangel är

$$a\sin A - b\sin B = c\sin(A - B),$$

om a, b och c äro motstående sidor till resp. A, B och C. (vt 36)

245. En triangels vinklar äro α, β, γ. De punkter, i vilka triangelns bisektriser råka den kring triangeln omskrivna cirkelns periferi, förenas medelst räta linjer, varvid en ny triangel uppkommer. Visa, att förhållandet mellan ytan av den ursprungliga och ytan av den sålunda bildade triangeln är $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. (jan. 39)

246. En triangel, vars sidor äro a cm, b cm och c cm ($a > b > c$), är så beskaffad, att om dess höjder tagas till sidor i en ny triangel, så blir denna likformig med den givna triangeln och får hälften så stor yta. Visa, att sidan b är medelproportional till a och c och att dess motstående vinkel är 45°. Beräkna triangelns övriga vinklar. (vt 39)

247. I en triangel inskrives en cirkel, och i denna cirkel inskrives en med den förra likformig triangel. Visa, att förhållandet mellan motsvarande sidor i den in- och omskrivna triangeln är

$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2},$$

där A, B och C äro vinklarna i trianglarna. (aug. 39)

248. En triangels vinklar äro A, B och C. Visa, att om $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ och $\cot\frac{C}{2}$ bilda en aritmetisk serie, så är $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$. (aug. 41)

249. I en cirkel med 65 cm radie är en fyrhörning $ABCD$ inskriven. Sidorna AB, BC och CD äro i ordning 66 cm, 78 cm och 50 cm. Visa, utan att använda tabell, att cirkelbågen $ABCD$ är en halvcirkel. (jan. 42)

Stereometri

250. $ABCD$ är en parallellogram och P en punkt vilken som helst. Visa att

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 - \overline{PD}^2$$

är oberoende av P:s läge. (vt 18)

251. Givna äro två räta linjer i rummet, som icke skära varandra. P är en rörlig punkt på den ena, Q en rörlig punkt på den andra linjen. Visa att orten för mittpunkten av räta linjen PQ är ett plan. (vt 18)

---

252. $ABCD$ är en tetraeder. Genom AD lägges ett plan, som delar vinkeln mellan planen BAD och CAD mitt itu och träffar BC i E. Bevisa, att $BE : CE = \triangle ABD : \triangle ACD$. (vt 81)

253. Från en punkt O utgå tre begränsade räta linjer OA, OB och OC så, att de två och två med varandra bilda en rät vinkel. Deras längder äro i ordning 3, 4, och 5 dm. beräkna vinkeln mellan planet ABC och planet OAB. (ht 27)

254. I en fyrsidig pyramid med kvadratisk basyta äro baskanterna 10 cm och sidokanterna 13 cm. Beräkna vinkeln mellan två varandra skärande sidoytor på pyramiden. (vt 28)

255. Basytan i en pyramid är en regelbunden sexhörning $ABCDEF$. Höjden från pyramidens topp O mot basytan råkar denna i dess medelpunkt och är dubbelt så stor som sexhörningens sida. Beräkna cosinus för vinkeln mellan de plan, som innehålla sidoytorna OAB och OCD. (ht 31)

256. I en tresidig pyramid är basen en vid A rätvinklig triangel. De tre från toppen D utgående kantlinjerna äro lika långa. Vidare är vinkeln $ADB = 30°$ och vinkeln $ADC = 60°$. Beräkna vinkeln mellan sidoytorna ABD och ADC. (ht 34)

257. I en rät stympad pyramid äro basytorna liksidiga trianglar, vilkas sidor förhålla sig som $2 : 3$. Sammanbindningslinjen mellan den övre (mindre) basytans mittpunkt och mittpunkten på en kant i den nedre basytan bildar en vinkel av 60° med sistnämnda basyta. Beräkna vinkeln mellan två sidoytor på den stympade pyramiden. (aug. 38)

258. O är spetsen i en regelbunden fyrsidig pyramid $OABCD$, i vilken alla kantlinjerna äro lika. Beräkna vinkeln (α) mellan sidoplanet OAD och den räta linje, som går genom mittpunkterna på kantlinjerna BC och OC. (aug. 39)

259. I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är vinkeln mellan två närliggande sidoytor 120°. Beräkna vinkeln mellan en sidoyta och basytan. (jan. 40)

260. I en regelbunden tresidig pyramid förhåller sig en sidokant till en baskant som $3 : 2$. Bestäm vinkeln mellan en sidokant och basytan samt vinkeln mellan en baskant och en av sidoytorna. (aug. 41)

261. Höjden i en regelbunden tresidig pyramid är hälften så stor som baskanten. Beräkna vinkeln mellan två sidoytor. (ht 41)

262. $ABCD$ är basyta i en kub och E ett av kubens hörn så beläget, att AE är diagonal i kuben. Man kan då finna en punkt P på AE och en punkt Q på basytans diagonal BD, så att linjen PQ blir vinkelrät såväl mot AE som mot BD. Sök läget av P och Q. (aug. 42)

263. $ABCD$ är en regelbunden tetraeder. Ett med begränsningsytan ABC parallellt plan skär kantlinjerna DA, DB och DC i A', B' och C' respektive. D' är mittpunkten i triangeln ABC. Vinkeln mellan två genom D' gående sidoytor i tetraedern $A'B'C'D'$ är 120°. I vilket förhållande delas kantlinjerna DA, DB och DC av planet $A'B'C'$? (ht 42)

---

264. AB och CD äro två kantlinjer i en regelbunden tetraeder, vilka inte råkas. Tetraederns kantlinje har längden a. På AB har man tagit punkten P så, att $AP = \frac{1}{2}a$, och på CD punkten Q så, att $CQ = \frac{2}{5}a$. Beräkna sträckan PQ. (ht 28)

265. I en tresidig pyramid $ABCT$ är basytan ABC en liksidig triangel. De tre från T utgående kantlinjerna äro lika långa och var och en dubbelt så lång som AB. Ett plan skär kantlinjen TA i A' så, att $TA' = \frac{1}{4}$ av TA, samt samt kantlinjerna TB och TC i punkterna B' och C' resp. så, att $TB' = TC' = 3TA'$. Beräkna vinkeln $B'A'C*$ i den triangel $A'B'C'$, som planet utskär av pyramidens sidoytor. (vt 33)

266. I en regelbunden tresidig pyramid är varje baskant $= a$ och varje sidokant $= b$. Bestäm avståndet mellan mittpunkten av en baskant och mittpunkten av motstående sidokant. (aug. 36)

267. I en rätvinklig parallellepiped är diagonalen 7 cm. Sidoytorna förhålla sig som $1 : 2 : 3$. Beräkna kantlängderna. (ht 38)

268. $ABCD$ är en av begränsningsytorna till en parallellepiped. Kantlinjerna AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 skäras av ett plan i punkterna A_2, B_2, C_2 respektive D_2. Vidare är $AA_2 = a$, $BB_2 = b$, $CC_2 = c$, $DD_2 = d$. Bevisa, att $a + c = b + d$. (aug. 40)

---

269. I en pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från spetsen utgående kantlinjerna äro lika långa. Det kring pyramiden omskrivna klotets radie är två tredjedelar av pyramidens höjd. Bestäm de vinklar, som baskanterna bilda med sidoytorna. (aug. 37)

270. Genom spetsen av en liksidig kon drages en rät linje l, som bildar 45° vinkel med konens axel. Beräkna vinkeln mellan de tangentplan till konen, som gå genom l. (vt 39)

---

271. Från en kub, vars kant är a, bortskäras de åtta hörnen av åtta plan, av vilka vart och ett går genom mittpunkterna av de tre sidoytor av kuben, som sammanstöta i samma hörn. Hur stor är den återstående solida figurens yta? (ht 08)

272. En trekantig pyramid, som till bas har en liksidig triangel, har de tre sidokanterna av lika längd. Beräkna förhållandet mellan bottenytan och en av sidoytorna, då sidoplanen skära varandra under räta vinklar. (ht 12)

273. Sök volymen av den pyramid, som bortskäres från en regelbunden oktaeder med kantlängden a genom ett plan, vilket innehåller en av oktaederns kanter och skär två andra mitt itu. (ht 23)

274. I en regelbunden tresidig pyramid hava sidoytorna toppvinkeln α, och längden av var och en av de där ihopstötande kanterna är $= 1$. Uttryck pyramidens volym såsom funktion av α. (ht 24)

275. Kantlinjen i en kub har längden a. Man bortskär kubens hörn på så sätt, att vid vart och ett av hörnen bortskäres en pyramid genom ett plan, som går genom mittpunkterna av de tre kantlinjer i kuben, vilka utgå från hörnet i fråga. Beräkna volymen och ytan av den kropp, som återstår, sedan på detta sätt alla kubens hörn bortskurits. (vt 27)

276. En kub har kantlinjen a. Genom vart och ett av dess hörn lägges ett plan, som är parallellt med planet genom ändpunkterna av de tre kantlinjer i kuben, vilka utgå från hörnet i fråga. Dessa paln begränsa en kropp, vars yta och volym skola beräknas. (vt 29)

277. I en regelbunden fyrsidig pyramid ha alla sidoytorna tillsammans nio gånger så stor yta som basytan. Genom ett med basen parallellt plan avskäres en toppyramid så, att totala ytan hos den återstående, stympade pyramiden är $0,8$ av den ursprungliga pyramidens totala yta. Hur stor är den stympade pyramidens volym jämförd med den ursprungliga pyramidens volym? (vt 31)

278. En pyramid har till bas en rektangel $ABCD$. Dess spets O ligger rakt över basytans mittpunkt. Genom kantlinjen AB lägges ett plan, som går genom mittpunkten av kantlinjen OC. Detta plan delar pyramiden i tvenne delar. Beräkna förhållandet mellan dessa delars volymer. (vt 32)

279. I en oregelbunden tetraeders sidoytor dragas medianerna. Deras skärningspunkter med varandra i resp. sidoytor tagas till hörn i en ny tetraeder. Visa, att de båda tetraedrarnas sidoytor bliva parvis parallella och likformiga, samt bestäm förhållandet mellan tetraedrarnas volymer. (ht 33)

280. Omkring en given kub, vars kant är $= a$, är en regelbunden kvadratisk pyramid omskriven så, att fyra av kubens hörn ligga i pyramidens bottenyta, medan de övriga ligga på var sin av pyramidens sidokanter. Bestäm pyramidens höjd, då dess volym är $= \frac{8}{3}a^3$. (aug. 35)

281. Ur en rätvinklig parallellepiped, vars kantlinjer äro resp. 4, 5 och 7 cm, avskäres en trekantig pyramid genom ett plan, lagt genom tre av parallellepipedens hörn. Angiv denna pyramids volym och dess fyra höjder. (maj 36)

282. En regelbunden pyramid och en rätvinklig parallellepiped ha båda kvadratisk basyta. Parallellepipedens ena basyta går genom pyramidens spets, och den andra ligger i pyramidens basyta. Parallellepipedens sidokanter skära pyramidens sidokanter mitt itu. Hur stor del av pyramidens volym ligger inuti parallellepipeden? (vt 40)

283. Av en pyramid, vars höjd är 12 cm och basyta 48 cm^2, skall genom två med basytan parallella plan utskäras en skiva med tjockleken 3 cm och volymen 31 cm^3. Beräkna planens avstånd från pyramidens topp. (vt 41)

284. En kub och en regelbunden oktaeder genomtränga varandra på så sätt, att varje kantlinje i kuben skäres mitt itu av en av oktaederns kantlinjer, vilken själv halveras i skärningspunkten. De utanför de båda kropparnas gemensamma del belägna delarna av kuben ha tillsammans volymen v_1, medan motsvarande delar av oktaedern tillsammans ha volymen v_2. Bestäm förhållandet mellan v_1 och v_2. (vt 42)

---

285. En rät kon, vars höjd är h och vars mantel med bottenplanet gör en vinkel $= \alpha$, skäres av ett med basen parallellt plan så, att den stympade konens hela yta är lika med den ursprungliga konens mantel. På vilket avstånd från toppen ligger det skärande planet, och för vilka värden på α är uppgiften möjlig? (vt 97)

286. En rak kons toppvinkel är rät. Vad är förhållandet mellan volymerna av konen och den däri inskrivna kuben? (vt 03)

287. Visa, att volymerna av de dubbelkoner, som uppstå, då en triangel roterar kring var och en av sina sidor, äro proportionella mot dessa sidors inverterade värden. (vt 06)

288. I ett koniskt kärl med spetsen nedåt ifylles kvicksilver och ovanpå detta en lika stor vikt vatten. Hur förhåller sig vattnets höjd till kvicksilvrets? Kvicksilvrets specifika vikt är 13,6. (ht 11)

289. Vilket är förhållandet mellan basytorna till en stympad kon, ifall dess buktiga yta delas i två lika stora delar genom ett plan, som skär den stympade konens höjd i förhållandet 1 : 2? (vt 12)

290. En pelare, som har formen av en rät cirkulär cylinder med radien $\frac{1}{2}$ m, står på marken och belyses från en punktformig ljuskälla, vars avstånd från pelarens axel är 2 m. Hur stor del av pelarens buktiga yta synes belyst, då den betraktas från en punkt, som ligger lika högt över marken som ljuskällan och vars avstånd från pelarens axel och från ljuskällan äro respektive 3 m och 4 m? (vt 17)

291. En rät cirkulär kon skäres av ett med basytan parallellt plan, vars avstånd från basplanet är 2 m. Den så uppkomna stympade konens volym är $= 36\text{ m}^2$, och dess båda basytor förhålla sig till varandra som $5 : 3$. Hur stor är den ursprungliga konens toppvinkel? (vt 24)

292. Två räta koner ha gemensam basyta. Den ena konens höjd är fyra gånger så stor som den andras, och dess toppvinkel är hälften av den senares. Sök förhållandet mellan deras mantelytor. (ht 36)

293. Om en likbent triangel roterar kring höjden mot basen eller kring en av de lika sidorna, uppkomma två olika rotationskroppar. Bestäm triangelns toppvinkel, om förhållandet mellan volymerna av den förra och den senare rotationskroppen är $1 : 3$. (ht 37)

---

294. På ett plan ligga tre sfärer, vilkas radier äro 3 dm och som tangera varandra ömsesidigt. Ovanpå dem ligger en fjärde lika stor sfär, som tangerar de tre. En rät kon tangerar alla fyra sfärerna, de tre förra med både basen och manteln, den fjärde endast med manteln. Beräkna mantelns yta. (ht 03)

295. Genom tre mot varandra vinkelräta diametralplan delas en sfär i åtta s. k. ”oktanter”. I en av dem är en sfär inskriven. Beräkna förhållandet mellan oktantens och den sistnämnda sfärens volymer. (vt 04)

296. En sfär delas av ett plan i två segment, vilkas buktiga ytor förhålla sig till varandra som m till n; huru förhålla sig till varandra segmentens volymer? (vt 07)

297. Den nordamerikanska staten Colorados område är begränsat av två parallellcirklar på respektive $37°$ och $41°$ nordlig latitud och av två meridianbågar på respektive $102°$ och $109°$ västligt longitud. Hur stort är statens ytinnehåll, om jorden antages sfärisk och dess omkrets är $40\,000\text{ km}^2$? (ht 14)

298. En reguljär tetraeder med kantlinjen s delas mitt itu medelst ett plan genom en av kantlinjerna, varigenom uppkomma två oregelbundna tetraedrar. Hur stor är radien till den sfär, som kan omskrivas kring en av dem? (ht 15)

299. Genom ett plan, som går genom mittpunkten av en radie i en sfär vinkelrätt mot radien, är sfären delad i två segment, och i det mindre av dessa är en kub inskriven. Hur stor är kuben i förhållande till det nämnda segmentet? (ht 18)

300. En dubbelpyramid, bildad av två på samma basyta stående, men åt motsatta håll riktade tetraedrar, har var och en av alla nio kantlängderna $= s$. Bestäm den inskrivna sfärens radie. (ht 20)

301. I en rät cirkulär kon med bottenradien r är inskriven en sfär, vars yta är $= \frac{2}{3}$ av konens mantelyta. Beräkna konens höjd. (ht 21)

302. Huru långt från medelpunkten till en sfär med radien r bör en punkt ligga, för att den buktiga yta, som alstras av de från punkten till sfären dragna tangenterna, skall hava samma ytinnehåll som sfären? (vt 22)

303. En sfär är inskriven i en stympad reguljär fyrsidig pyramid, vars volym är dubbelt så stor som sfärens. Hur stor är den stympade pyramidens hela yta i förhållande till sfärens yta? (vt 23)

304. Medelpunkten till ett klot med radien 4 m är belägen på ytan av ett klot med radien 6 m. Beräkna volymen av den för de båda kloten gemensamma linsformiga kroppen. (ht 23)

305. En klotskiva är 2 cm tjock. Radierna till de parallella småcirklar, som begränsa den, är 6 cm och 8 cm. Beräkna klotskivans totala yta. (ht 24)

306. En rät cirkulär stympad kon är omskriven kring en sfär. Sök förhållandet mellan sfärens volym och den stympade konens volym, om konens buktiga yta är dubbelt så stor som sfärens yta. (ht 24)

307. En rät cirkulär kon, vars sida är lika med basytans diameter, och en rät cirkulär cylinder äro omskrivna kring en sfär. Visa, att de tre kropparnas volymer förhålla sig till varandra såsom deras ytor. (vt 25)

308. En rät cirkulär kon har sin topp på ytan av ett klot, och dess axel går genom klotets medelpunkt. Hur stor skall toppvinkeln i konen vara, för att dess mantelyta (som tänkes obegränsat utdragen) skall dela klotets volym i två lika stora delar? (vt 26)

309. I en pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från toppen utgående kantlinjerna äro lika långa. Det i pyramiden inskrivna klotets radie är en tredjedel av pyramidens höjd. Beräkna förhållandet mellan en kantlinje i basytan och en av de från toppen utgående kantlinjerna. (ht 26)

310. En rät cirkulär kon är given. Ett klot har sin medelpunkt i konens topp och tangerar konens basyta. Hur stort måste förhållandet mellan bottenradien och höjden i den givna konen vara, för att klotets yta skall dela konen i två delar med lika stora volymer? (vt 28)

311. I ett sfäriskt segment har man inskrivit ett klot, som tangerar segmentets buktiga yta i en punkt samt dess plana yta i dennas medelpunkt. Det inskrivna klotets volym är en sjättedel av segmentets volym. Beräkna förhållandet mellan det inskrivna klotets yta och segmentets totala yta. (ht 28)

312. En cirkel har medelpunkten O. Från en yttre punkt A drages en tangent till cirkeln; tangeringspunkten är B. Då figuren roterar kring (den utdragna) linjen OA, så alstras av cirkeln ett klot och av triangeln OAB en dubbelkon. Hur stort är avståndet AO (uttryckt i cirkelns radie r), om denna dubbelkon har halva sin volym utanför klotet? (vt 29)

313. Ett klot och en kub ha samma medelpunkt. Hälften av klotets yta är utanför kuben. Hur stor del av klotets volym befinner sig utanför kuben? (ht 29)

314. Ett halvklot är inskrivet i en rät cirkulär kon, så att det förras plana gränsyta faller utefter konens basyta. Beräkna förhållandet mellan kropparnas volymer, om konens sida är 2,5 gånger så stor som halvklotets radie. (ht 32)

315. AOB är en cirkelsektor, där OA och OB äro de radier, som tillsammans med bågen AB begränsa sektorn. Medelpunktsvinkeln AOB är mindre än 120°. Sektorn roterar ett varv kring en genom O gående, i sektorns plan belägen axel, som med bisektrisen till vinkeln AOB bildar 60°. Hur stor skall vinkeln AOB vara, för att den vid rotationen alstrade kroppen skall få en volym, som är en tredjedel av volymen av ett klot med samma radie som sektorn? (ht 32)

316. Den plana begränsningsytan av ett halvklot med radien r är bas i en rät cirkulär kon, som skär halvklotet så, att $\frac{1}{3}$ av halvklotets buktiga yta faller inom konen. Beräkna konens volym. (ht 33)

317. Ett klot skäres med två parallella plan. Därvid delas dess yta i tre delar, som, tagna i sådan ordning att den mellan planen belägna delen blir den minsta, förhålla sig som $2 : 1 : 3$. Beräkna förhållandet mellan de tre delarnas volymer. (vt 34)

318. Två klot, det ena med 10 cm, det andra med 7,5 cm radie, skära varandra så, att den del av den mindre sfären, som ligger utanför den större, blir en konkavkonvex lins, vars största tjocklek är 1 cm. Beräkna linsens volym. (ht 34)

319. På ett horisontellt bord ligga fyra klot, vartdera med radien 8 cm, ordnade så, att deras medelpunkter bilda en kvadrat med sidan 16 cm. Ovanpå dessa klot lägges ett femte, som tangerar de fyra och vars radie är 25 cm. Hur högt över bordet ligger dess medelpunkt? (vt 35)

320. En rät cirkulär kon har sin topp på ytan av ett klot, och dess axel går genom klotets medelpunkt. Konens mantelyta (som tänkes obegränsat utdragen) delar klotets yta i två delar, så att den del, på vilken konens topp är belägen, är dubbelt så stor som konens innanför klotet belägna mantelyta. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka klotets volym delas genom konens mantelyta. (vt 35)

321. I ett klot med radien r är en regelbunden tresidig pyramid inskriven, vars sidokanter äro dubbelt så långa som baskanten. Bestäm baskantens längd. (aug. 35)

322. I ett klot göres en utborrning, vars gränsyta är mantelytan till en kon med toppen i klotets medelpunkt och toppvinkeln = 80°. Sedan fortsättes utborrningen, tills gränsytan blir mantelyta i en kon med samma bascirkel och samma axel som den första men med toppen mitt emellan klotets medelpunkt och yta. Beräkna förhållandet mellan volymerna av de delar, som borttages andra och första gången. (ht 35)

323. Från en punkt, som ligger lodrätt över medelpunkten till ett klot med radien r, lägges en tangentkon till klotet. Punktens avstånd från klotets medelpunkt är a. Volymen mellan klotets övre yta och konens mantelyta delas i två delar av det plan, som tangerar klotet i dess högsta punkt. Visa, att delarnas volymer förhålla sig till varandra som $a : r$. (vt 36)

324. I en rät cirkulär kon är förhållandet mellan mantelytan och basytan = 4. Huru förhåller sig konens volym till volymen av det inskrivna klotet? (jan. 37)

325. En rät kon, vars toppvinkel är 49°40′, är omskriven kring en sfär. Vad är förhållandet mellan konens och sfärens volymer? (vt 37)

326. Hörnpunkterna till en triangel äro (0; 0), (+4; 0) och (0; +6). En sfär vars radie är 7 längdenheter och vars medelpunkt ligger ovanför triangelns plan, går genom triangelns hörn. Beräkna volymen av den del av sfären, som ligger under triangelns plan. (vt 38)

327. I en rät cirkulär cylinder med bottenradien 25 cm lägger man först två lika klot med radien 12 cm på bottnen, så att de tangera såväl varandra som cylinderns botten- och mantelyta. Utan ändring av dessa klots lägen lägger man i cylindern ännu ett klot av samma storlek, som tangerar de båda förra och cylinderns mantelyta samt ligger så långt ned som möjligt. Då slutligen ett plant lock pålägges, visar sig detta tangera det översta klotet. Sök cylinderns höjd. (ht 39)

328. En sfärisk sektor, som är mindre än en halvsfär, kan uppdelas i ett sfäriskt segment och en kon. Förhållandet mellan volymerna av dessa delar, tagna i nyss nämnd ordning, är $5 : 3$. Bestäm förhållandet mellan sektorns sfäriska och koniska ytor. (vt 40)

329. I en rät cirkulär kon är höjden lika stor som basdiametern. Ett klot ligger så, att konens höjd utgör diameter i detsamma. Bestäm förhållandet mellan de delar av klotet, som ligga innanför och utanför konen. (ht 40)

330. I en rät cirkulär kon, där bottenytans radie är 6 cm och höjden 8 cm, är ett klot inskrivet. Detta tangeras av ett plan, som är parallellt med konens bottenyta. Sök förhållandet mellan volymerna av den avskurna toppkonen, klotet och hela konen. (aug. 41)

331. En halvsfär och en regelbunden fyrsidig pyramid tänkas placerade på samma plana underlag. Pyramidens basyta är omskriven kring halvsfärens plana yta. Pyramidens kanter äro alla lika långa. Hur stor del av halvsfärens volym faller utanför pyramiden? (jan. 42)

332. Volymen av en sfärisk sektor är $\frac{1}{5}$ av hela sfärens volym. I sektorn inskrives en ny sfär, så att den tangerar såväl sektorns sfäriska yta som dess koniska yta. Hur stor del av den ursprungliga sfärens volym utgör volymen av den nya sfären? (vt 42)

333. Ett klot skäres av ett plan i två delar, vilkas totala ytor förhålla sig som $5 : 8$. Beräkna förhållandet mellan delarnas volymer. (jan. 43)

334. En parallellt stympad rät cirkulär kon är omskriven kring en sfär och inskriven i en annan sfär. Förhållandet mellan den stympade konens mantelyta och den mindre sfärens yta är $25 : 16$. Bestäm förhållandet mellan den stympade konens mantelyta och den större sfärens yta. (vt 43)

335. En regelbunden tetraeders kantlinje är 30 cm. En sfär tangerar en sidoyta och de tre kantlinjer, som icke ligga i denna sidoyta. Beräkna sfärens radie samt höjden i de sfäriska segment, som ligga utanför tetraedern. (ht 43)

Analytisk geometri och funktionslära

a. Räta linjen

336. O är origo i ett rätvinkligt koordinatsystem. En triangel ABC har spetsen A i punkten $(-1; -1)$. Spetsen B ligger på räta linjen $x + 5 = 0$, spetsen C på räta linjen $y - 3 = 0$. Vidare råka triangelns höjder varandra i O. Beräkna triangelns yta. (vt 29)

337. I ett rätvinkligt koordinatsystem är O origo, A en punkt på x-axeln och B en punkt på y-axeln. En rät linje genom A träffar OB i en punkt C mellan O och B så, att $OC : OB = 2 : 3$. En rät linje genom B träffar OA i en punkt D mellan O och A så, att $OD : DA = 3 : 2$. Linjerna AC och BD skära varandra i E. Från O är en linje dragen genom E; den träffar AB i F. Bestäm förhållandet $AF : FB$. (Uppgiften kan lösas antingen med analytisk geometri eller med euklidisk geometri.) (ht 35)

338. Genom punkten $(4; 0)$ drages en rät linje, som tillsammans med x-axeln och linjen $4x - y + 8 = 0$ bildar en triangel med ytan 12 ytenheter. Bestäm ekvationen för denna räta linje. (aug. 37)

339. En rät linje, som går genom punkterna $(1; 3)$ och $(3; 4)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem, råkar y-axeln i punkten A. Genom punkten $(3; 2)$ går en mot denna linje vinkelrät rät linje, som råkar densamma i punkten B och x-axeln i C. Beräkna ytinnehållet av den fyrsiding, vars hörn utgöras av origo samt punkterna A, B och C. (ht 37)

340. Beräkna avståndet mellan medianernas skärningspunkt och bisektrisernas skärningspunkt i en triangel, i vilken två sidor äro $AB = 10$ och $AC = 16$ cm och mellanliggande vinkel 60°. (ht 37)

341. Från skärningspunkten mellan de räta linjerna $y = 2x + 3$ och $y = 3x - 2$ drages en normal mot linjen $8x + 11y + 2 = 0$. Sök normalens ekvation och längd. (jan. 38)

342. En likbent triangel, vars bas är lika med dess höjd, har sin bas utefter räta linjen $3x - 2y - 4 = 0$. Triangelns tyngdpunkt är $(-1; 3)$. Beräkna triangelns yta. (aug. 38)

343. Två konsekutiva hörnpunkter i en parallellogram ha koordinaterna $(0; 0)$ och $(-1; -1)$ resp. En sida lligger utefter linjen $y = 2x$. Sök ekvationerna för de linjer, utefter vilka de andra sidorna ligga, om parallellogrammens yta är 2 ytenheter. (ht 38)

344. Koordinaterna för mittpunkterna på två sidor i en triangel äro $(2; 0)$ och $(0; 4)$. Höjden mot den tredje sidan träffar denna sida i punkten $(5\frac{1}{2}; 3)$. Bestäm sidornas ekvationer. (jan. 30)

345. En triangel har sina hörn i punkterna $(0; 0)$, $(4; 0)$ och $(0; 3)$. Varje hörn förbindes med den punkt, i vilken den inskrivna cirkeln tangerar motstående sida. Visa, att de tre räta linjerna gå genom samma punkt. (aug. 39)

346. En rätvinklig triangel, vars yta är 130 ytenheter, har den räta vinkelns spets i origo och hypotenusan utefter den räta linjen $x+y = 10$. Beräkna koordinaterna för mittpunkten på hypotenusan. (ht 39)

347. Kateterna i en rätvinklig triangel ligga utefter linjerna $2x-y+5 = 0$ och $x+2y+3 = 0$. Hypotenusans mittpunkt är punkten $(-4; -5)$. Bestäm ekvationen för den linje, utefter vilken hypotenusan ligger. (ht 40)

348. Två av en triangels hörn ligga i punkterna $(2; 0)$ och $(6; 2)$, det tredje ligger på den räta linjen $x = -2$. Den del av triangelns yta, som ligger inom andra kvadranten, är 2 ytenheter. Bestäm triangelns yta. (jan. 41)

349. En triangels hörn ligga i punkterna $A\,(-1\frac{3}{4}; -2)$, $B\,(1; 3\frac{1}{2})$ och $C\,(4; -3)$. Höjden från C och dennas förlängning skära koordinataxlarna i punkterna D och E. Bevisa, att triangeln ADE är likbent. (vt 41)

350. En punkt P på linjen $2x + 5y = 10$ sammanbindes med punkterna $A\,(1; 0)$ och $B\,(-1; 0)$. I triangeln ABP är den ena av vinklarna A och B 90° större än den andra. Beräkna koordinaterna för punkten P. (ht 41)

351. I en godtycklig triangel är H höjdernas skärningspunkt, M medianernas skärningspunkt och N mittpunktsnormalernas skärningspunkt. Bevisa – lämpligen medelst analytisk geometri – att H, M och N ligga i rät linje samt att M delar sträckan HN innantill i förhållandet $2 : 1$. [Satsen om Eulers linje.] (jan. 42)

352. Punkterna $A\,(2;\,4)$ och $B\,(3;\,-1)$ äro hörn i en triangel ABC. Bestäm för de möjliga fallen koordinaterna för punkten C, så att triangelns yta blir 7 ytenheter och linjen $y = 2x$ en median i triangeln. (vt 42)

353. En rät linje genom punkten $P\,(5;\,4)$ bildar med x-axeln och den räta linjen $2x - y - 6 = 0$ en triangel. Då den förstnämnda linjen vrider sig kring P, inträffar det för vissa lägen, att triangelns yta blir 14 ytenheter. Vilken är då linjens ekvation? (aug. 42)

354. I triangeln ABC utgöres ett hörn av punkten $A\,(2;\,2)$, hörnet B ligger på linjen $x - 3y + 6 = 0$, och medianen till sidan AC är 3 längdenheter. Medianerna skära varandra i origo. Bestäm koordinaterna för B och C. (ht 42)

355. Ekvationerna för två av en triangels sidor äro $x + y + 2 = 0$ och $2x - y + 4 = 0$. Den tredje sidan är parallell med linjen $5x - y - 9 = 0$. Bestäm denna sidas ekvation, om triangelns tyngdpunkt ligger på linjen $2x + y + 1 = 0$. (jan. 43)

356. Två räta linjer med ekvationerna $2x + y + 1 = 0$ och $x + 2y - 1 = 0$ äro givna. Sök ekvationen för den räta linje genom punkten $(4;\,-4)$, som med de givna linjerna bildar en rätvinklig triangel, samt beräkna ytan av denna triangel. (vt 43)

357. Ekvationerna för sidorna i en triangel AOB äro $2y = x$, $y = 2x$ och $x + 4y - 3 = 0$. Triangeln vrides $90°$ kring origo O, så att den kommer att intaga läget A_1OB_1 i andra kvadranten. Sidorna AB och A_1B_1 skära varandra i punkten C. Angiv ekvationen för linjen OC. (aug. 43)

b. Kurvor

358. Bevisa, att tangenten till kurvan $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{3} - 2x$ i den punkt, vars abskissa är 1, går genom kurvans skärningspunkt med negativa x-axeln. (vt 12)

359. Vilket värde måste konstanten a ha, för att x-axeln skall vara tangent till kurvan $y = x^2 - 2x + 3 + a(x - 1)$? (ht 17)

360. I punkten $(-1;\,-6)$ på kurvan $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ är en tangent dragen. Visa, at det stycke av tangenten, som ligger mellan tangeringspunkten och tangentens skärningspunkt med y-axeln, delas mitt itu av x-axeln. (ht 19)

361. Till kurvan $3y = 2x^3 - 3x$ kunna dragas två tangenter, som äro parallella med linjen $x - y = 0$. Var och en av dessa tangenter råkar lurvan i en annan punkt än tangeringspunkten. Bestäm dessa punkter. (ht 33)

362. På kurvan $y = x^3$ har man tagit punkten P så, att normalen i P med koordinataxlarna bildar en triangel, vars yta är $2\frac{2}{3}$ ytenheter. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka triangelns yta delas av kurvans tangent i punkten P. (vt 34)

363. I den utanför origo belägna skärningspunkten mellan kurvorna $y = ax^2$ och $y = x^3$ uppritas normalen till vardera kurvan. Visa, att ytan av den triangel, som bildas av dessa normaler och ordinataxeln, har ett av konstanten a oberoende värde. (ht 34)

364. På kurvan $y = x^3 - 3x$ har man tagit en punkt P, vars x-koordinat betecknas med a. Tangenten till kurvan i P skär denna dessutom i en punkt R. En triangel har två hörn i P och R och det tredje i origo. Beräkna dess yta uttryckt i a. (vt 35)

365. En rät linje, som tangerar kurvan $y = x^3 - \frac{5}{3}x$ i en punkt A utanför origo med abskissan x, skär kurvan i en annan punkt B med abskissan $-2x$. Sök vinkelkoefficienten för den räta linjen AB, om den i B skär kurvan under rät vinkel. (aug. 35)

366. Det finnes två normaler till kurvan $9y = x^4 - 18x^2 + 3x$, som äro parallella med kurvans normal i origo. Bestäm dessa normalers ekvationer. (vt 36)

367. Upprita en kurva över funktionen $y = x^3 - 3x$. Från punkten $(+1\frac{1}{3};\ -4)$ dragas tangenter till kurvan. Var tangera dessa? Sök även tangenternas ekvationer och den vinkel, de bilda med varandra. (maj 36)

368. Till kurvan $y = x^2 - 2x - 1$ drages en korda genom de punkter på densamma, vilkas x-koordinater äro resp. $+2$ och -2. Bestäm ekvationen för den med kordan parallella tangenten till kurvan samt avståndet mellan kordan och tangenten. (aug. 36)

369. Genom origo drages en rät linje, som (utom i origo) skär kurvan $y = x^2 - \frac{1}{3}x^3$ i A och B. Sök ekvationen för linjen, om kurvans tangenter i A och B äro vinkelräta mot varandra. (aug. 36)

370. En triangel bildas av tangenten och normalen i origo till kurvan $y = x(x-1)(x-2)$ samt av tangenten till kurvan i dennas skärningspunkt med den förstnämnda tangenten. Hur stor är triangelns yta? (ht 36)

371. I maximi- och minimipunkterna till kurvan $y = 4x^3 - 3x$ dragas tangenterna. Var och en av dessa råkar kurvan i ännu en punkt. I dessa punkter dragas likaledes tangenter. Beräkna ytan av den fyrhörning, som begränsas av dessa fyra tangenter. (aug. 37)

372. Tangenten i punkten $P(-3;\ -2)$ till kurvan $y = x^3 + 3x^2 - 2$ skär kurvan i en punkt Q. Beräkna vinkeln mellan tangenten i P och tangenten i Q. (jan. 38)

373. Uppriat kurvan $10y = 2x^3 - 15x^2 + 125$ i dess huvuddrag. Två punkter på kurvan äro så belägna, att skillnaden mellan deras abskissor är 3 längdenheter. En fyrhörning begränsas av ordinatorna i dessa punkter, sammanbindningslinjen mellan punkterna och x-axeln. Undersök hur ytan av denna fyrhörning varierar, då punkterna röra sig på den av kurvan, som ligger ovanför x-axeln. (vt 38)

374. Bestäm konstanten a så, att räta linjen $x + y = a$ blir tangent till kurvan $2y = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$. Visa, att den räta linjen samtidigt blir normal till kurvan, och angiv de punkter på kurvan, genom vilka tangenten resp. normalen gå. (aug. 38)

375. Genom den punkt på kurvan $y = x^3$, vars abskissa är 2, lägges linjen med vinkelkoefficienten $\frac{13}{4}$. Den skär kurvan i två andra punkter, P och Q.Beräkna ytan av den fyrhörning, som begränsas av linjen, x-axeln och normalerna till kurvan i P och Q. (ht 38)

376. En kurvas ekvation är $y = 16 + 5x - 2x^2$. I punktem $(2;\ 18)$ på kurvan är tangenten dragen. En rät linjen genom punkten $(2;\ 0)$ är parallell med denna tangent och skär kurvan i A och B. Beräkna längden av kordan AB, (jan. 39)

377. En tangent till parabeln $y = x^2$ skär x-axeln i punkten A. Tangenten $y = 2x-1$ skär den förstnämnda tangenten i punkten B och x-axeln i punkten C. Ytan av triangeln ABC är lika med 3 ytenheter. Sök tangentens ekvation. (vt 39)

378. Genom origo drages en rät linje, som skär kurvan $y = 2x - x^3$ i ytterligare två punkter A och B. Visa, att linjen är normal till kurvan, då kvadraten på längden av sträckan AB är maximum eller minimum. (vt 39)

379. Beräkna den spetsiga vinkeln mellan de normaler till kurvan $2y = x^2 - 8$, som gå genom kurvans skärningspunkt med positiva x-axeln. (aug. 39)

380. En punkt A på kurvan $y = x^3 - 3x$ sammanbindes med origo. Sammanbindningslinjen skär kurvan ytterligare i punkten B. Studera, jur längden av sträckan AB varierar, då punkten A beskriver kurvan. Angiv också den vinkel, som linjen bildar med x-axeln i några lägen av särskilt intresse. (ht 39)

381. I de punkter på kurvan $4y = x^4 - 10x^2 + 9$, där x-koordinaten är 2 resp. -2, dragas tangenterna och normalerna till kurvan. Bestäm ytan av den fyrhörning, som dessa linjer begränsa. (jan. 40)

382. Från punkten $P\,(10;\,0)$ drages en linje till en punkt Q på kurvan $2y = 2x^2 + 8x - 7$. Undersök, hur sträckan PQ varierar, då Q beskriver kurvan. Bestäm särskilt PQ:s maximi- och minimivärden. (jan. 40)

383. En triangel har ett hörn i punkten $(0;\,6)$, ett i punkten $(6;\,0)$ och det tredje på kurvan $3y = -x^3$. Undersök, med angivande av eventuella maxima och minima, hur triangelns yta varierar, då det rörliga hörnet beskriver kurvan. (vt 40)

384. Diskutera kortfattat utseendet av kurvorna $y = x^n$ för olika positiva heltalsvärden av n. På en sådan kurva väljes en godtycklig punkt P med positiva koordinater. Genom P drages dels en rät linje parallell med x-axeln, dels normalen till kurvan i punkten. Dessa linjer bilda tillsammans med y-axeln en rätvinklig triangel. Undersök, om det finns något värde på n, för vilket ytan av denna triangel är oberoende av P:s läge, och angiv i så fall ytan för detta n-värde. (aug. 40)

385. Bestäm ekvationerna för de två tangenterna till kurvan $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 8$, som äro parallella med linjen $2x + y - 2 = 0$, samt beräkna ytan av det parallelltrapets, som bildas av dessa båda tangenter och koordinataxlarna. (ht 40)

386. Diskutera och upprita kurvan $y = ax^3 + bx^2$, då man vet, att den skär x-axeln i punkten $(4,5;\,0)$ och att dess normal i denna punkt skär x-axeln i $(0;\,\frac{2}{3})$. (jan. 41)

387. A och B äro två godtyckliga punkter på kurvan $y = x^2$. Tangenterna till kurvan i dessa punkter skära varandra i C. Visa, att abskissan för C är aritmetiskt medium till abskissorna för A och B samt att ordinatan för C är medelproportional till ordinatorna för A och B, med positivt eller negativt tecken, allt efter som A och B ligga på samma eller olika sidor om y-axeln. (jan. 41)

388. Angiv ekvationen för den gemensamma tangenten till de båda kurvorna $y = x^3$ och $y = x^3 + 4$. Bestäm därefter koordinaterna för de punkter, där tangenten skär kurvorna. (vt 41)

389. I skärningspunkterna mellan den räta linjen $x + y = 3$ och kurvan $x^2 = 4y$ dragas tangenterna till kurvan. Sök skärningspunkten mellan dessa tangenter. (aug. 41)

390. Diskutera och upprita kurvan $y = ax^4 + bx^3$, då man vet, att den har ett minimum i punkten $(1;\,-1)$. (ht 41)

391. Visa, att normalen i punkten $(-2;\,0,5)$ till kurvan $y = x^2 + 8x + 12,5$ går genom origo. Finns ytterligare någon normal till kurvn med samma egenskap? Angiv i så fall dess ekvation. (jan. 42)

392. Den kurva, som motsvarar ekvationen $y = ax^4 + bx^2$, där a och b äro konstanter, har ett minimum och två maxima, vilka utgöra hörn i en liksidig triangel. Bestäm tecknen för a och b, och angiv det algebraiska sambandet mellan dessa konstanter. (vt 42)

393. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y = a + bx - x^2$, så att motsvarande kurva går genom punkterna $(-1;\,0)$ och $(0;\,2)$. Beräkna därefter ytan av den triangel, som bildas av kurvans normaler i de nämnda punkterna samt dessa punkters sammanbindningslinje. (aug. 42)

394. Kurvan $y = (x - 1)^3$ skär x-axeln i A och y-axeln i C. Tangenterna och normalerna till kurvan i A och C bilda en fyrhörning $ABCD$. Beräkna dennas yta. (ht 42)

395. Diskutera utseendet av kurvan $y = x^3 + ax + b$, där a och b äro konstanter. Angiv kurvans skärningspunkter med tangenten i en punkt på kurvan med abskissan c. (jan. 43)

396. Upprita kurvan $y = x^3 - 4x^2 + 4x$. Origo sammanbindes med en punkt P på kurvan, och från P fälles normalen PQ mot x-axeln. Undersök och åskådliggör i samma koordinatsystem, hur ytan av triangeln OPQ varierar, då P genomlöper kurvan. (vt 43)

397. Upprita kurvan $y = x^3 - 3x^2 + 3x$. P och Q äro två punkter på kurvan, så belägna att tangenterna till densamma i dessa punkter äro parallella. De nämnda tangenterna skära x-axeln i punkterna A och B. Visa att sträckan AB är $\frac{2}{3}$ av sträckan PQ:s projektion på x-axeln, var än P är belägen. (aug. 43)

398. En rät linje, vinkelrät mot linjen $y + 3x = 0$, är normal till kurvan $y = 9x - x^3$ i en punkt P_1 och skär kurvan i ytterligare två punkter P_2 och P_3. Beräkna längden av sträckan P_2P_3. (ht 43)

399. Upprita kurvan $4y = x^4 - 4x^3$ i dess huvuddrag. Bestäm ekvationen för den tangent till kurvan, som tangerar densamma i tvenne punkter. (ht 43)

---

400. Undersök, hur antalet skärningspunkter mellan kurvan $y = 12x^2 - 4x^3 - 3x^4$ och räta linjen $y = k$ varierar med värdet på k, och bestäm med tillhjälp härav, hur många positiva och hur många negativa rötter ekvationen

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + k = 0$$

får för olika värden på 4k. (ht 32)

---

c. Uppgifter å max. och min.

401. Bestäm koefficienterna i uttrycket

$$x^2 - 2ax + b$$

så, att det minsta värde, som uttrycket kan få för reella värden på x, blir -9, och att den ekvation, som erhålles, då uttrycket sättes lika med noll, får två rötter, vilka förhålla sig som $2 : 1$. (ht 26)

402. Man kan finna ett sådant värde på det konstanta talet a i polynomen

$$x^3 - 3x^2 + 3ax + 18,$$

att polynomen, betraktad som funktion av x, får ett maximi- och ett minimivärde och att summan av dessa värden blir 20. Bestäm detta a-värde. (ht 27)

403. Beräkna det minsta värde uttrycket

$$p = x \cos 120° + y \sin 120°$$

kan antaga, om x och y äro koordinaterna för en rörlig punkt på kurvan $y - 1 = x^2$. (jan. 36)

---

404. Genom en punkt P på en given triangels bas drages två räta linjer, som äro parallella med sidorna och alltså jämte dem bilda en parallellogram. Var skall P tagas för att denna parallellogram må bliva så stor som möjligt? (vt 09)

405. Sök maximivärdet för ytan av ett likbent parallelltrapets, där den mindre av de parallella sidorna är a cm och var och en av de icke parallella sidorna är medelproportional till de båda parallella sidorna. (vt 35)

406. I en triangel ABC drages en transversal DE parallell med BC. Från D, som ligger på AB, drages transversalen DF parallell med AC och från E transversalen EG parallell med AB. Sök läget av D, då ytan av parallelltrapetset $DEGF$ får sitt maximivärde. ($AD > \frac{1}{2}AB$.) (ht 36)

407. I en likbent triangel är basen 4 cm och höjden 8 cm. Bestäm maxmimiytan för ett i triangeln inskrivet parallelltrapets, som har den kortare av de parallella sidorna utefter triangelns bas och ett hörn på var och en av de andra sidorna samt två vinklar lika med 120°. (ht 37)

408. På sidan AB i en triangel ABC är en punkt P given. Hur skall en med AB parallell transversal RQ dragas, för att den i ABC inskrivna triangeln PQR skall få största möjliga yta? (vt 38)

409. Från A avgår kl 9 en båt med hastigheten 1 mil i timmen mot B, som ligger 2 mil rakt öster om A. Kl 10 avgår från A en annan båt med hastigheten 2 mil i timmen mot C, som ligger 2,5 mil från A och rakt norr om B. Vid vilken tidpunkt efter kl 10 äro båtarna varandra närmast, och hur stort är då deras avstånd? (ht 38)

410. Genom en godtycklig punkt P på sidan AB i rektangeln $ABCD$ drages normalen mot DP. Denna skär antingen sidan BC eller sidan CD. Om skärningspunkten kallas R, avskäres i förra fallet en triangel BPR, i senare fallet en fyrhörning $BPRC$. Vilket villkor måste rektangelns sidor uppfylla, för att den nämnda avskurna figuren, oberoende av punktens P:s läge på AB, skall bli en triangel? Var på AB skall P vara belägen, för att den avskurna triangelns yta skall bli så stor som möjligt? (vt 41)

411. I en triangel är höjden mot en sida dragen. Var på denna höjd skall en punkt P vara belägen, för att summan av kvadraterna på avstånden från P till triangelns hörn skall vara så liten som möjligt? (jan. 42)

412. AB är diameter i en cirkel med radien r. Från en punkt P på cirkeln drages normalen till tangenten i B. Normalens fotpunkt är C. Sök maximum för summan av AP och PC. (vt 42)

---

413. I en rät kon av trä är höjden tre gånger så stor som basytans radie ($= r$). Man önskar av konen utskära en rät cylinder med största möjliga begränsningsyta. Sök cylinderns basdiameter och höjd. (vt 10)

414. I en sfär inskrives en pyramid med kvadratisk basyta och största möjliga volym. Uttryck denna pyramids höjd och basyta i sfärens radie (r). (vt 12)

415. Undersök hur ytan av den kring en rätvinklig parallellepiped omskrivna sfären varierar, då parallellepipedens dimensioner variera på ett sådant sätt, att en av de genom ett hörn gående kantlinjerna ständigt förblir lika med en av de andra samt med den tredje har en konstant summa $= k$. Angiv de största och minsta värdena hos nämnda yta. (ht 13)

416. I en halvsfär är en rät cirkulär kon med största möjliga volym inskriven, så att konens spets sammanfaller med sfärens medelpunkt. Hur stor är konens toppvinkel? (vt 14)

417. Sök den största möjliga volymen av en i en sfär med radien R inskriven parallellepiped, som är underkastad villkoret, att basytans ena kant är dubbelt så lång som den andra. (vt 15)

418. Bestäm baradien i den räta cirkulära cylinder med största möjliga volym, vars hela yta är lika med ytan av en sfär med radien r. (vt 19)

419. Räta linjen AT tangerar en cirkel med radien r i punkten A. CD är en en med AT parallell korda i cirkeln. På vilket avstånd från AT skall CD dragas, för att den solida figur, som uppstår, då triangeln ACD roterar kring AT, skall få så stor volym som möjligt? (vt 25)

420. En pyramid är given. Pyramiden skäres av ett med basytan parallellt plan. Snittytan väljes till basyta i en annan pyramid, vars topp ligger i den ursprungliga pyramidens basyta. Hur skall planet läggas, för att den nya pyramiden skall få så stor volym som möjligt, och hur stor blir denna, uttryckt i den ursprungliga pyramidens volym? (ht 30)

421. Man betraktar den rotationskropp, som uppkommer, då ett likbent parallelltrapets (de båda icke parallella sidorna lika långa) roterar kring den längsta av de båda parallella sidorna. Vilket är det största värde, som denna rotationskropps volym kan antaga, om den sida, kring vilken rotationen sker, är konstant och $= a$ samt de övriga sidorna variera så, att det likbenta trapetsets omkrets förblir konstant och $= 3a$? (ht 34)

422. I ett halvklot skall ett regelbundet prisma med kvadratisk basyta inskrivas, så att en rektangulär sidoyta ligger i halvklotets plana yta och de fyra återstående hörnen i klotytan. Bestäm maximivärdet för prismats volym, om klotets radie är r. (ht 35)

423. I en cirkel med radien R är en viss rätlinig figur inskriven; dess yta är S och dess omkrets l. I en rät cirkulär kon med basradien R och höjden H är ett rakt prisma inskrivet. Dess basytor äro likformiga med den nyss nämnda rätliniga figuren. Huru stor är prismats totala yta, då den är maximum? (jan. 36)

424. En sfär med radien $= r$ är given. Man tänker sig en del av sfärens volym bortskuren förmedelst en sfärisk yta med medelpunkten på den givna sfärens yta och med radien $= x$. Huru skall x väljas, för att den återstående delen av den givna sfären må få så stor begränsningsyta som möjligt? (maj 36)

425. A och B äro två punkter, vilkas avstånd är a. Med B som medelpunkt uppritas en cirkel med radien x. C är tangeringspunkten för den från A dragna tangenten. Beräkna x så, att den koniska yta, som AC beskriver vid figurens rotation kring AB, blir så stor som möjligt. (aug. 36)

426. Ett klot med radien r skäres av ett plan, så att den mot planet vinkelräta diametern delas i förhållandet $1 : 2$. I det därvid uppkommande mindre segmentet skall en cylinder inskrivas med ena basytan i den plana ytan. Bestäm cylinderns höjd och basradie, så att volymen blir så stor som möjligt. (jan. 37)

427. I en triangel är summan av bas och höjd 12 cm. Triangeln får rotera omkring basen, så att en dubbelkon uppkommer. Bestäm bas och höjd så, att dubbelkonens volym blir så stor som möjligt. (jan. 38)

428. Diametern i ett klot med radien r delas i förhållandet $3 : 5$. Genom delningspunkten lägges ett plan vinkelrätt mot diametern. I det större av de erhållna klotsegmenten inskrives en rät pyramid med kvadratisk basyta så, att pyramidens spets faller i medelpunkten av klotsegmentets plana yta. Bestäm avståndet från klotets medelpunkt till pyramidens basyta, då pyramidens volym är så stor som möjligt. (aug. 38)

429. I en given halvsfär inskrives ett rakt regelbundet 6-sidigt prisma så, att en av prismats basytor sammanfaller med halvsfärens plana begränsningsyta. Beräkna förhållandet mellan volymerna av prismat och halvsfären, då prismats volym är så stor som möjligt. (ht 38)

430. Ett variabelt reguljärt 3-sidigt prismas totala begränsningsyta är konstant ($= a^2$). Beräkna maximum av dess volym och angiv förhållandet mellan basytans sida och prismats höjd, när detta maximum inträffar. (jan. 39)

431. En likbent triangel med konstant omkrets roterar kring bisektrisen till vinkeln mellan de lika stora sidorna. Bestäm förhållandet mellan triangelns sidor, då den uppkomna rotationskonen har så stor volym som möjligt. (aug. 39)

432. Ett klot tangerar sidoytorna till ett hörn i en regelbunden tetraeder eller deras förlängningar. Tetraederns höjd är h. Om klotets radie är tillräckligt liten, ligger klotet helt inom tetraedern. Om radien växer, inträffar det, att endast en del av klotet ligger inom tetraedern. Växer radien ytterligare, kommer slutligen klotet att ligga helt utom tetraedern. Studera, hur den inom tetraedern belägna sfäriska ytan varierar, och åskådliggör även variationen grafiskt. (jan. 40)

433. I en rät cirkulär kon, vars höjd och bottenradie äro lika stora, inlägges ett regelbundet tresidigt prisma, så att en av sidoytorna ligger i konens bottenyta och de båda hörn, som icke höra till denna sidoyta, bli belägna på konens mantelyta. Bestäm förhållandet mellan baskanten och sidokanten i det största prisma, som uppfyller dessa villkor. (aug. 40)

434. En rät pyramids basyta är en liksidig triangel. Pyramidens spets ligger i medelpunkten till en given sfär. Basytans hörn ligger på sfärens yta. Bestäm det största värde, som förhållandet mellan pyramidens och sfärens volymer kan antaga. (jan. 41)

435. Genom en punkt P på kantlinjen AB i en regelbunden oktaeder lägges ett plan parallellt med två motstående sidoytor. Oktaederns övriga sidoytor avgränsa av planet en sexhörning. Beräkna var P skall vara belägen på AB, för att sexhörningens yta skall bli så stor som möjligt. (ht 41)

436. En given rät cirkulär kon är liksidig (d.v.s. en plan sektion genom höjden är en liksidig triangel). Ett sfäriskt segment har samma plana begränsningsyta som konen och är vänt åt samma håll som denna. En sfär, belägen utanför segmentet, tangerar dettas buktiga yta och dessutom längs en cirkel konens mantelyta. Bestäm förhållandet mellan höjderna i segmentet och konen, då summan av sfärens och segmentets ytor är så liten som möjligt. (aug. 42)

437. En sfärisk sektor är inskriven i ett klot med radien r, så att dess medelpunkt ligger på det givna klotets yta. Bestäm den sfäriska sektorns totala yta, då dess volym är så stor som möjligt. (ht 42)

438. Genom en punkt P på en diagonal AB i en kub lägges normalplanet till AB. Undersök, hur ytan av den inom kuben belägna delen av detta plan varierar, då P rör sig från A till B. (jan. 43)

439. Summan av kvadraterna på avstånden från en punkt på en diagonal i en kub till hörnen i en sidoyta är en funktion av punktens avstånd till diagonalens ena ändpunkt. Bestäm denna funktions största och minsta värde. (vt 43)

440. Två givna räta cirkulära koner ha gemensam bottenyta och äro vända åt motsatta håll. Toppvinkeln i den ena är 2α, toppvinkeln i den andra är supplementvinkel till denna. Båda konerna stympas genom var sitt plan, parallellt med bottenytan. Avståndet mellan planen är lika stort som bottenytans radie. I vilket förhållande delas detta avstånd av bottenytan, då summan av de stympade konernas mantelytor är så stor som möjligt? (aug. 43)

Uppgifter, givna jan. 1944 – H.T. 1948

Jan. 1944

1. I ekvationen $ax^2 - a^2x = 1$ är a en positiv konstant. Visa, att ekvationens rötter äro reella. Beräkna det värde på a, för vilket summan av rötterna och deras inverterade värden blir så stor som möjligt.
2. I triangeln ABC är vinkeln $A = 66{,}7°$. Mittpunktsnormalen till sidan BC träffar sidan AB i punkten D, så att $AD : DB = 1 : 2$. Beräkna vinklarna B och C.
3. Bevisa, att om a, b, c och d i nämnd ordning äro termer i en geometrisk serie, så är
$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2.$$
4. I en regelbunden tetraeder $OABC$ är M mittpunkten på AB och N mittpunkten på AC. Beräkna den spetsiga vinkel, som bildas av riktningarna för linjerna OM och BN.
5. Lös utan att använda tabell ekvationssystemet
$$\begin{cases} x\cos 56° + y\cos 26° = \cos 116° \\ x\sin 56° + y\sin 26° = \sin 116°, \end{cases}$$
och angiv de exakta värdena för x och y i enklaste form.
6. Ekvationen för en sida i en triangel är $2y = x$, ekvationen för medianen till en annan sida $y = 2x$ och ekvationen för höjden mot den tredje sidan är $2x - 3y - 4 = 0$. Sök ekvationerna för triangelns båda sistnämnda sidor.
7. En rät cirkulär cylinders basradie är r och höjd h. Genom axelns mittpunkt drages en rät linje parallellt med cylinderns basytor, och genom denna linje lägges ett plan, som skär basytorna längs kordorna AB och CD. Vilket är det största värde, som ytan av fyrhörningen $ABDC$ kan antaga?
8. Bestäm den funktion $y = f(x)$ av andra graden, vars motsvarande kurva tangerar linjerna $y = 4$, $y = x + 2$ och $y = -2x + 12$.

V.T. 1944

1. Ekvationen $x^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$ har rötterna $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Bestäm konstanterna a och b.
2. Bestäm ekvationen för den kortaste medianen i en triangel, vars sidor falla utefter linjerna $y = 4x + 11$, $2y = x + 1$ och $2x + 3y = 5$. Beräkna även medianens längd.
3. Två liksidiga trianglar, vardera med sidan a, täcka varandra fullständigt. Man vrider den ena triangeln 90° kring en mot trianglarnas plan vinkelrät axel genom trianglarnas gemensamma tyngdpunkt. Därefter sammanbindas trianglarnas hörnpunkter, så att en konvex sexhörning uppkommer. Bevisa, att denna är likvinklig, och beräkna den exakta längden av dess omkrets.
4. På kurvan $y = (x-a)^2$, där a är en positiv konstant, är en punkt P så belägen, att tangenten till kurvan i denna punkt och dess avskärningar av de positiva koordinataxlarna bilda en triangel med största möjliga yta. Normalen till kurvan i samma punkt går genom origo. Bestäm konstanten a.
5. Hörnen i två parallella begränsningsytor, $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$, i en kub äro så betecknade, att AA_1, BB_1, CC_1 och DD_1 äro kantlinjer i kuben. E är mittpunkt på AB, F mittpunkt på AD och G mittpunkt på AA_1. Man sammanbinder E med D_1, F med B_1 och G med C. Bevisa, att dessa linjer råka varandra i en och samma punkt och dela varandra i samma förhållande.

6. En rät cirkulär kon med största möjliga volym inskrives i ett klot. I ett mot konens axel vinkelrätt plan utskäres en cirkelring av klotytan och konens mantelyta. Undersök, hur förhållandet mellan cirkelringens och klotets yta varierar, då planet ändrar läge mellan konens spets och basyta.

7. Härled för $\cos 3v$ en formel, vari endast $\cos v$ ingår. Använd därefter denna formel för att lösa ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$, sedan x i denna utbytts mot $2y$. Ekvationens rötter skola angivas var för sig i såväl exakt som approximativ form.

8. I en triangel är den omskrivna cirkelns radie $= R$, den inskrivna cirkelns radie $= r$ och avståndet mellan de nämnda cirklarnas medelpunkter $= d$. Mellan storheternas R, r och d gäller då sambandet

$$R^2 - d^2 = 2Rr \quad \text{(en sats av Euler).}$$

Bevisa denna sats för det fall, att triangeln är rätvinklig.

Aug. 1944

1. I en triangel ABC äro sidorna AB och AC lika stora. Hörnet A är beläget i punkten $(2;\ 5)$ och hörnet B i $(4;\ 1)$. Höjden mot sidan BC går genom punkten $(0;\ 1)$. Beräkna koordinaterna för hörnet C.

2. Visa, att kurvorna $8x^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ och $x^2 + 2x + 2y + 2 = 0$ ha endast en punkt gemensam och att de i denna punkt ha samma tangent. Angiv ekvationen för denna tangent och upprita kurvorna.

3. Lös ekvationen $2 \sin 2x + 2 \sin x + 2 \cos x + 1 = 0$.

4. I en tetraeder $ABCD$ äro sidoytorna ABC och ABD vinkelräta mot varandra. Vidare är $AB = 6$ cm, $AC = BC = 7$ cm och $AD = BD = 9$ cm. Bestäm vinkeln mellan sidoytorna ACD och BCD.

5. I en rät cirkulär kon lägges genom höjdens mittpunkt ett plan parallellt med basytan. I den härigenom uppkomna parallellt stympade konen kan man inskriva ett klot, som tangerar den stympade konens mantelyta och båda plana begränsningsytor. Bestäm konens toppvinkel.

6. Från en godtycklig punkt A_1 på siadan BC i en triangel ABC drages A_1B_1 parallellt med AB. Från B_1, som ligger på AC, drages B_1C_1 parallellt med BC. Från C_1, som ligger på AB, drages C_1A_2 parallellt med CA. På motsvarande sätt dragas däefter A_2B_2, B_2C_2 och C_2A_3 parallellt med AB, BC respektive CA. Punkterna B_2, C_2 och A_3 ligga på AC, AB respektive BC. Bevisa, att A_1 och A_3 sammanfalla. Vad är villkoret för att A_1 och A_2 skola sammanfalla?

7. Upprita kurvan $y = x^2(3 - x)$ i dess huvuddrag. Två punkter på kurvan, A och B, ha positiva koordinater, och deras sammanbindningslinje går genom origo. Projektionerna på x-axeln av A och B äro A_1 och B_1. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av parallelltrapetset AA_1B_1B varierar, då linjen AB vrider sig kring origo.

8. En skuld amorteras under ett visst antal år genom lika stora annuiteter, vilka inbetalas vid varje års slut. Räntefoten är hela tiden densamma. I varje annuitet ingår dels ränta, dels amortering. Visa, att de successiva amorteringarna bilda en geometrisk serie med räntefaktorn som kvot.

H.T. 1944

1. Ekvationerna för två sidor i en triangel äro $2x - y + 6 = 0$ och $x + y - 12 = 0$. Bestäm ekvationen för den tredje sidan, då dess mittpunkt är $(3;\ 3)$.

2. Bestäm storleken av den yta, som inneslutes av tangenterna till de båda kurvorna $15y = 73 + 18x - 3x^2$ och $15y = 217 - 48x + 3x^2$ i dessas skärningspunkter.

3. Bestäm summan av n termer i följande serie av 10-logaritmer:

$$\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} + \ldots$$

Bestäm därefter de värden på n, för vilka summan är ett helt positivt tal.

4. För bestämning av vindstyrka och vindriktning på olika höjd över marken användes ofta vätgasfyllda gummiballonger, vilka ha konstant stighastighet. Från en fast observatiosnplats (O), där en avläsningskikare är placerad, släppes en ballong, vars läge sedan med vissa mellanrum iakttages. Man bestämmer sålunda ballongens höjdvinkel v, d.v.s. den vinkel, som syftlinjen från O till ballongen bildar med horisontalplanet, samt den vinkel u, som vertikalplanet genom ballongen och O bildar med meridianplanet genom O, varvid vinkeln räknas från norr åt öster. Vid ett tillfälle avlästes, sex minuter efter det att ballongen lämnat O, $v = 38{,}2°$ och $u = 52{,}3°$. Fyra minuter senare voro vinklarna $v = 31{,}5°$ och $u = 61{,}8°$. Bestäm vindstyrkan i m/sek i de ifrågavarande luftlagren, om den antages vara konstant till storlek och riktning. Ballongens stighastighet antages vara 180 m/min. Från vertikala luftströmmar bortses.
5. I en triangel ABC är vinkeln B 40°. Tangeringspunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln delar sidan AC i förhållandet $1 : 3$. Beräkna triangelns övriga vinklar.
6. Genom en diagonal i en kub med kantlinjen a lägges ett plan. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av den inom kuben belägna delen av detta plan varierar, då skärningspunkten mellan planet och en av kubens kantlinjer genomlöper denna kantlinje.
7. Ekvationen $\cot^2 x + 4\cot x - 3 = 0$ satisfieras av två grupper vinklar; x_1 tillhör den ena gruppen, x_2 den andra. Bevisa, att för dessa vinklar *exakt* gäller likheten:

$$x_1 + x_2 = 45° + n \cdot 180°,$$

där n är ett helt tal, positivt eller negativt.

8. En dubbelkon består av två kongruenta räta cirkulära koner med gemensam basyta. Dubbelkonen delas genom två mot dess axel vinkelräta plan i tre delar, vilka ha lika stora volymer och lika stora totala begränsningsytor. Bestäm konernas toppvinkel.

Jan. 1945

1. I en geometrisk serie med reella termer är summan av de två första termerna 16 och summan av de fyra följande 5. Vilken är serien?
2. I en regelbunden fyrsidig pyramid, i vilken alla kantlinjer äro a längdenheter, inskrives en kub, så att en av dess begränsningsytor ligger i pyramidens basyta och fyra av dess hörn på var och en av pyramidens sidokanter. I den därvid bildade toppyramiden inskrives på samma sätt en ny kub. Genom upprepning av detta förfaringssätt erhåller man slutligen en oändlig serie kuber. Beräkna förhållandet mellan dessa kubers sammanlagda volym och den ursprungliga pyramidens volym. Förhållandet skall anges dels exakt, dels approximativt med tre säkra decimaler.
3. Beäkna förhållandet mellan sidorna i en likbent triangel, i vilken det kortaste avståndet från basens ena ändpunkt till den inskrivna cirkelns periferi är en fjärdedel av triangelns bas.
4. De räta linjerna $y = 2x + 3$ och $y = 2x + 1$ skäras av en tredje rät linje, av vilken den del, som ligger mellan de båda förra linjerna är 5 längdenheter. Bestäm vinkelkoefficienten för den tredje linjen.
5. I en triangel ABC är sidan $AB = 3$ cm, medianen från $A = 4$ cm och vinkeln $B = 73{,}90°$. Beräkna triangelns övriga sidor och vinklar.
6. Sök längden av den minsta korda, som genom punkten (4; 5) kan dragas i kurvan $4y = x^2$.
7. Till ekvationen $8\cos 2x + \sin 2x = 7$ äro x_1 och x_2 två olika rötter, vilkas skillnad icke är en heltalsmultipel av 180°. Bestäm i exakt form det eller de värden, som $\cos(x_1 + x_2)$ kan antaga.

8. En kropp består av en rät cirkulär cylinder och ett halvklot, vars plana begränsningsyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Den sammansatta kroppens totala begränsningsyta är $5\pi a^2$, där a är en konstant. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur den sammansatta kroppens volym varierar, då halvklotets radie ändras. Ange särskilt det värde på radien, för vilket volymen blir så stor som möjligt.

V.T. 1945

1. Lös ekvationen $\sin^2 2x = \sin^2 x + \sin^2 3x$.

2. Upprita kurvorna $16y = 3x^3 - 36x$ och $27y = 27x - x^3$ i deras huvuddrag. Visa, att kurvornas maximi- och minimipunkter utgöra hörn i en kvadrat.

3. I en triangel ABC äro $D\,(3;\,2)$ och $E\,(5;\,0)$ mittpunkterna på sidorna AB och AC samt $F\,(4;\,-3)$ fotpunkten för höjden från A mot BC. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor.

4. På sidan AC i en triangel ABC finns en punkt D så beskaffad, att $AD = BD$ och $CD = AB$. Vinkeln C är 30°. Bestäm triangelns övriga vinklar.

5. I en halvcirkel har man inskrivit en rektangel $ABCD$, i vilken sidan AB faller utefter diametern. Mittpunkten E på halvcirkelns periferi sammanbindes med C och D. Figuren $ABCEDA$ får rotera kring normalen från E mot diametern. Bestäm förhållandet mellan rektangelns sidor, då volymen av den uppkomna rotationskroppen är så stor som möjligt. Förhållandet skall anges dels exakt i förenklad form, dels approximativt med tre decimaler.

6. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är höjden h och de parallella sidorna AB och CD respektive a och b, där $a > b$. Man konstruerar en följd av parallelltrapets CDD_1C_1, $C_1D_1D_2C_2$, …, likformiga med $ABCD$, så att C_1D_1 faller inom $ABCD$, C_2D_2 inom CDD_1C_1 o.s.v. Då konstruktionen upprepas ett obegränsat antal gånger, komma parallelltrapetsen att obegränsat avtaga i storlek och slutligen närma sig en punkt P inom $ABCD$. Sök läget av punkten P, uttryckt i a, b och h.

7. I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är höjden h och basytans diagonal $6h$. Ett plan lägges genom pyramidens topp, parallellt med basytans ena diagonal. Undersök, hur ytan av den inom pyramiden belägna delen av detta plan varierar, då planet vrider sig kring toppen, och upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.

8. En obegränsad rät cirkulär cylinder med radien r skäres av två plan, vilkas skärningslinje ligger helt utanför cylindern. Den mellan planen belägna delen av cylinderns axel har längden h. Sök mantelytan och volymen av den mellan planen belägna stympade cylindern, uttryckta i r och h.

Aug. 1945

1. En regelbunden femuddig stjärnas spetsar sammanfalla med hörnen i en regelbunden femhörning, som är inskriven i en cirkel med 5 cm radie. Stjärnans begränsningslinjer utgöra delar av diagonalerna i nämnda femhörning. Beräkna stjärnans yta och angiv värdet i såväl exakt som approximativ form.

2. En rät linje med riktningsvinkeln 45° tangerar kurvan $3y = x^3 - 4x^2$ i en punkt A och skär den dessutom i en punkt B. Bestäm koordinaterna för punkterna A och B.

3. Bestäm värdet på $\cos 2x$ ur ekvationen $4\cos^4 x + 4\sin^2 x - 3 = a$, där a är en positiv konstant. Beräkna därefter värdena på x för $a = \frac{1}{4}$.

4. I en tresidig pyramid äro fem kantlinjer lika stora och av given längd. Den sjätte kantlinjen är variabel och skall väljas så, att sammanlagda arean av pyramidens begränsningsytor blir så stor som möjligt. Hur stor är då vinkeln mellan de båda sidoytor, vilkas skärningslinje står emot den variabla kantlinjen?

5. I ett koordinatsystem XOY skall väljas punkterna $A\,(a;\,0)$ och $O'\,(2a;\,b)$, där a och b äro positiva tal. Punkten O' tages till origo i ett nytt koordinatsystem $X'O'Y'$, i vilket punkten A kommer att ligga på den negativa abskissaxeln. Båda koordinatsystemen äro så beskaffade, att den positiva abskissaxeln i vartdera systemet sammanfaller med den positiva ordinataxeln efter en vridning kring origo 90° i positiv led. Bestäm koordinaterna för punkten O i $X'O'Y'$-systemet.

6. Två tetraedrar har gemensam basyta och äro vända åt motsatta håll. Den ena är regelbunden, den andras sidoytor äro likbenta rätvinkliga trianglar. I den av de båda tetraedrarna bildade dubbelpyramiden inskrives en sfär. Beräkna dennas radie och förhållandet mellan dess volym och dubbelpyramidens.

7. I en cirkel med radien r drages en diameter AB. Punkten A tages till medelpunkt för en cirkel, som skär den förstnämnda cirkeln i punkterna C och D samt diametern AB i punkten E. Om cirkelsegmentet $CDEC$ roterar kring AB, alstrar det ett sfäriskt segment. Bestäm radien i cirkeln A, då det sfäriska segmentets volym är så stor som möjligt.

8. Ett fartyg gick med konstant hastighet rätlinigt mot en punkt P. Det observerades vid olika tidpunkter en viss dag från en punkt Q. Vinkeln mellan syftlinjen från Q till fartyget och syftlinjen från Q till P var kl. 10.30 79°24′, kl. 11.00 62°12′ och kl. 11.30 47°18′. När kom fartyget fram till P?

H.T. 1945

1. O är origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, A en punkt på negativa x-axeln och B en punkt på negativa y-axeln. På hypotenusan AB och kateten AO i den rätvinkliga triangeln ABO uppritas utåt kvadraterna $ABCD$ och $AOPQ$. Bevisa, att de räta linjerna DO och BQ skära varandra under räta vinklar.

2. En rektangulär dörr $ABCD$, där AB är 90 cm och AD 216 cm, kan vridas kring AD. Om dörren öppnas 40°, hur stor vinkel har diagonalen AC vridits?

3. I en geometrisk serie med fem olika stora termer är skillnaden mellan första och tredje termen $\tan^2 x$ och skillnaden mellan tredje och femte termen $\sin^2 x$. För vilka värden på x är summan av de tre mellersta termerna $3\frac{1}{2}$?

4. Bestäm ekvationen för den gemensamma normalen till de båda kurvorna $y = x^2 - 2x + 1$ och $y = x^2 + 2x - 1$.

5. Summan av termerna i en aritmetisk serie med första termen 2 är 90. Mellan första och andra termen i serien inskjutas tre nya termer, mellan andra och tredje likaså tre nya termer o.s.v., så att en ny aritmetisk serie erhålles, bestående av de ursprungliga och de inskjutna termerna. Denna senare series summa blir 342. Beräkna den ursprungliga seriens differens och termantal.

6. En skål har formen av ett sfäriskt segment, vars höjd är lika med halva radien i sfären. I skålen nedläggas fyra lika stora klot, av vilka vart och ett tangerar två av de övriga. Skålens plana lock tangerar alla fyra kloten. Hur stor del av skålens volym upptages av de fyra kloten?

7. På sidorna i den rätvinkliga triangeln ABC uppritas utåt de likformiga, likbenta trianglarna AP_1B, BP_2C och CP_3A, vilkas toppvinklar P_1, P_2 och P_3 alla äro 120°. Visa, att triangeln $P_1P_2P_3$ är liksidig.

8. Ekvationerna för en triangels sidor äro $x + 3 = 0$, $y + 4 = 0$ och $x + y = 6$. I denna triangel inskrives en triangel ABC, så att dess medianer gå genom origo. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan av triangeln ABC varierar, samt ange det största och minsta värdet av denna yta.

Jan. 1946

1. I en triangel är en sida lika stor som den kring triangeln omskrivna cirkelns radie, vilken är 324 cm. En annan sida är 486 cm. Beräkna triangelns yta och dess minsta vinkel.

2. En bank beräknar på sparkasseräkning ränta efter 2%, och räntan lägges vid årets slut till kapitalet. På kapitalräkning beräknas likaså ränta efter 2%, men räntan lägges vid varje halvårs slut till kapitalet. Under ett kalenderår insatte en person på sparkasseräkning i denna bank 100 kr vid varje månadsskifte, första gången den 31 januari och sista gången vid årets slut. Om samma insättningar i stället hade gjorts på kapitalräkning, hur mycket större skulle då behållningen ha blivit vid kalenderårets slut?

3. Bevisa, att lösningarna till ekvationen

$$\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=2$$

utgöras av de gemensamma lösningarna till ekvationerna

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x\right)^2=4 \quad \text{och}$$
$$\left(\sqrt{3}\cdot\sin x\right)^2=(2-\cos x)^2.$$

4. En triangels ena sida ligger utefter linjen $3x-4y+3=0$ och medianen mot denna sida utefter linjen $2x-y+2=0$. Den nämnda sidan är 10 längdenheter. Triangelns tyngdpunkt ligger på y-axeln. Angiv ekvationerna för triangelns övriga sidor.

5. Grafitkärnan i en spetsad blyertspenna hade formen av en rät cirkulär cylinder med en på denna ställd rät cirkulär kon med toppvinkeln 20°. Då pennan använts någon tid, återstod av den koniska delen av grafitkärnan endast en del, begränsad av en sfärisk kalott, som tangerade konens mantelyta utefter basytans omkrets. Hur många procent av grafitkärnans koniska del hade nötts bort?

6. I en triangel ABC är vinkeln A 45°. Sidan AB delas av punkten D, så att delarna AD och DB förhålla sig som $1:2$. Drages linjen CD, komma vinklarna ACD och DCB likaså att förhålla sig som $1:2$. Beräkna de övriga vinklarna i triangeln ABC.

7. Kurvorna $y=x^3+ax$ och $y=x^4+bx$, där a och b äro konstanter, ha minimum i samma punkt. Bestäm övriga gemensamma punkter och upprita kurvorna.

8. Mantelytan i en rät cirkulär kon tangeras av en oändlig följd av varandra successivt tangerande sfärer med medelpunkterna på konens höjd. Den första sfären tangerar även konens basyta. Visa, att förhållandet mellan summan av alla sfärernas volymer och konens volym alltid är mindre än $\frac{2}{3}$.

V.T. 1946

1. Ekvationerna för två sidor i en triangel äro $2x+y-9=0$ och $x+2y+6=0$. Den kring triangeln omskrivna cirkelns medelpunkt är belägen i punkten $(6;\ 2)$. Bestäm den tredje sidans ekvation.

2. Genom mittpunkten M på sidan AB i den liksidiga triangeln ABC drages en rät linje, som skär AC i D och förlängningen av BC i E, så att $MD=DE$. Beräkna vinkeln AMD.

3. I en konvergent oändlig geometrisk serie med reella termer är summan av första och fjärde termen $\frac{19}{8}$ och produkten av de fyra första termerna $\frac{729}{64}$. Beräkna seriens summa.

4. Lös ekvationen $(\sin x+\cos x)^3=\sin 3x+\cos 3x$.

5. I en rät cirkulär kon är avståndet mellan den inskrivna sfärens medelpunkt och en punkt på basytans omkrets medelproportional till de in- och omskrivna sfärernas radier. Bestäm konens toppvinkel.

6. Konstruera kurvan $y=x-\dfrac{x^3}{3}$. Bestäm sedan konstanterna a och b så, att kurvan $y=ax^3-bx$ skär den förra i tre punkter och tangenterna till de båda kurvorna i var och en av dessa skärningspunkter bli vinkelräta mot varandra. Uppritа även den eller de på detta sätt erhållna kurvorna.

7. Summan av en regelbunden sexsidig pyramids samtliga begränsningsytor är lika med en given konstant a^2. Beräkna volymens största möjliga värde samt basytans storlek, när volymen antar detta värde.

8. A, B, C och D äro fyra punkter på jordytan så belägna, att kortaste avståndet längs jordytan mellan två av punkterna blir detsamma, vilka av de fyra punkterna man än väljer. Punkten A har latituden 90° N, punkten B longituden 0°. Bestäm longitud och latitud för punkterna C och D. Jordytan antages vara en sfär. Kortaste avståndet längs jordytan mellan två punkter på denna är avståndet längs storcirkelbågen genom punkterna.

Aug. 1946

1. I en rätvinklig triangel är den ena spetsiga vinkeln 40°. Beräkna vinkeln mellan medianerna mot kateterna.

2. Ett lån, löpande med 4% ränta på ränta, skall amorteras genom lika stora annuiteter, den första ett år efter lånets erhållande. Beräkna annuitetens storlek i procent av lånesumman, om efter 10 år, sedan annuiteten erlagts, endast $\frac{1}{3}$ av lånet skall återstå.

3. Ekvationerna för två sidor i en triangel äro $4x - y + 4 = 0$ och $3x + y - 4 = 0$. Triangelns tyngdpunkt ligger i punkten $(0; -\frac{2}{3})$. Vilken är ekvationen för triangelns tredje sida?

4. Lös ekvationen

$$3\cos^2 x + 2\sin 2x - 2\sin x - 4\cos x + 2 = 0.$$

5. $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$ äro två motstående sidoytor i en kub, A och A_1, B och B_1, o.s.v. ligga på samma kantlinje. Genom AB och C_1D_1 lägges ett plan, genom BC och A_1D_1 ett annat. Beräkna vinkeln mellan dessa plan.

6. I en regelbunden sexsidig pyramid äro sidokanternas längder dubbelt så stora som baskanternas. En sfär har sin medelpunkt i mittpunkten av pyramidens basyta och tangerar sidokanterna. Hur många procent av pyramidens volym ligger inom sfären?

7. Upprita kurvan $y = x^3 + 2x^2$ i dess huvuddrag. Visa, att den räta linjen $3x - 4y + 9 = 0$ tangerar kurvan, och sök ekvationen för en tangent, som är vinkelrät mot nämnda räta linje.

8. Mätetalen för två sidor i en triangel äro rötter till ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$. En cirkel tangerar dessa båda sidor och har sin medelpunkt på den tredje sidan. Bestäm maximivärdet av denna cirkels radie.

H.T. 1946

1. Bestäm konstanterna a och b i ekvationen $y = x^4 - x^3 + ax^2 + bx$, så att tangenten i origo till motsvarande kurva skär denna i punkten (2; 4). Angiv även, var denna tangent ytterligare skär kurvan. (För nöjaktig behandling kräves icke, att kurvan uppritas.)

2. En person har lånat en summa vid början av år 1940. Ett visst antal år behöver han inte göra några inbetalningar men skall sedan amortera skulden genom 10 annuiteter, vilka var och en utgöra 15% av det ursprungliga lånet.När skall han erlägga den första annuiteten? Ränta på ränta beräknas efter 3%.

3. I triangeln ABC är vinkeln A rät, sidan AB 2 cm och vinkeln B 40°. Bisektrisen till sistnämnda vinkel, som skär AC i D, utdrages till E, så att $BD = DE$. Beräkna vinklarna i triangeln AEC.

4. Hörnen i fyrsidingen $OACB$ ha koordinaterna $O\,(0; 0)$, $A\,(a; 0)$, $C\,(2a; 3b)$, $B\,(0; b)$. Linjen CB skär OA i punkten D, linjen CA skär OB i punkten E. Linjerna CO och AB skära linjen DE i punkterna P respektive Q. Visa, att $EP : PD = EQ : QD$.

5. Avståndet mellan två fasta punkter O och P är a. Punkten O tages till medelpunkt för en sfär med variabel radie och punkten P till spets för en rät cirkulär konisk yta, som tangerar sfären utefter en cirkel. Bestäm sfärens radie, så att den del av konen, som ligger mellan den koniska och den sfäriska ytan, får så stor volym som möjligt.

6. I en halvcirkel är AB diametern samt AC och CD kordor, av vilka den senare är parallell med AB. Då vinkeln BAC varierar från 0° till 90°, ändras förhållandet $AC : CD$. Bestäm vinkeln, då förhållandet är = 2.

7. Bestäm de exakta värdena på x ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = \sin v + \cos v \\ 7x^3 - 15x = 6 \sin v \cos 2v. \end{cases}$$

8. En rätvinklig triangel ligger i ett plan P. De båda kateterna bilda vinklarna A och B med ett annat plan Q genom hypotenusan. Planen P och Q bilda med varandra vinkeln C. Visa, att

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B.$$

Jan. 1947

1. En sfärisk sektor delas medelst ett plan i ett sfäriskt segment och en rät cirkulär kon. Härigenom delas sektorns begränsningsyta mitt itu. I vilket förhållande delas dess volym?

2. I de båda serierna $10,\ 10x,\ 10x^2, \ldots$ och $0,\ x,\ 2x,\ 3x, \ldots$ bestämmes x så, att skillnaden mellan termerna med ordningsnummer 11 i de båda serierna, tagna i angiven ordning, blir så liten som möjligt. Beräkna för detta x-värde förhållandet mellan summorna av de 9 första termerna i den aritmetiska och i den geometriska serien.

3. Lös ekvationen $2 \sin 2x - \cos 6x = 4 \sin^2 x \sin 2x$.

4. I parallelltrapetset $ABCD$ är AB 6 cm, BC 10 cm, CD 21 cm och DA 20 cm. Beräkna totala ytan av den kropp, som uppkommer genom att figuren roterar kring en axel, som ligger i figurens plan, är vinkelrät mot de parallella sidorna AB och CD samt går genom den punkt, där de båda övriga sidornas förlängningar skära varandra.

5. Triangeln ABC är placerad i ett koordinatsystem, så att A är belägen i origo, B i punkten $(-10;\ 0)$ och C i punkten $(-4;\ 3)$. Triangeln förskjutes i koordinatsystemets plan till läget $A_1B_1C_1$, så att B_1 kommer att ligga i C och origo på A_1B_1. Bestäm ekvationen för medianen från C_1.

6. En triangels sidor äro 26 cm, 28 cm och 30 cm. En cirkel med radien 2 cm har sin medelpunkt M på en av triangelns sidor. Hur stor yta överfares av cirkeln, då M beskriver triangelns omkrets?

7. Sidovinklarna vid spetsen i en tresidig pyramid äro alla räta. Bevisa, att kvadraten på basytan är lika med summan av kvadraterna på sidoytorna.

8. Upprita kurvan $y = x^2 - 6x + 10$. Undersök, hur avståndet z mellan en punkt P på kurvan och punkten $(5;\ 6)$ varierar, då P genomlöper hela kurvan. Åskådliggör i ett särskilt diagram sambandet mellan z och x genom en ungefärlig kurva.

V.T. 1947

1. I en triangel äro mittpunkterna på två sidor belägna i punkterna $(1,5;\ 0)$ respektive $(3,5;\ 1)$. Medianerna skära varandra i punkten $(2;\ 1)$. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor.

2. Den aritmetiska serien $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$ innehåller som delserie den geometriska serien $1,\ 3,\ 9,\ \ldots$. Hur många termer i den aritmetiska serien måste minst medtagas, för att summan av den geometriska serien skall överstiga 1000, och hur stor är då den aritmetiska seriens summa?

3. En sfär är omskriven kring en rätvinklig parallellepiped, vars basyta är en kvadrat med sidan 15 cm och vars höjd är 7 cm. Kan man i samma sfär inskriva någon annan rätvinklig parallellepiped med kvadratisk basyta och med samma volym som den givna? Bestäm i så fall dess kanter.

4. Lös ekvationen $\sin 3x + 2\sin^2 x - \cos x = 1$.

5. Kurvorna $y = ax^2 - bx$ och $y = ax - bx^2$ skära varandra i två punkter under räta vinklar. Bestäm konstanterna a och b. Upprita kurvorna för dessa värden på a och b, och beräkna ytan av den fyrsiding, som inneslutes mellan tangenterna i kurvornas skärningspunkter.

6. I ett sfäriskt segment är höjden 6 cm och den sfäriska ytans radie 7 cm. I detta segment inskrives ett annat sfäriskt segment, så att dess sfäriska yta tangerar det första segmentets plana yta i mittpunkten och dess plana begränsningsytas omkrets ligger på det första segmentets sfäriska yta. Sök den största volym, som det inskrivna segmentet kan anta.

7. I en konvergent oändlig geometrisk serie med reella termer är första termen a och kvoten k. Man vill lösa uppgiften att med ett givet värde på a bestämma ett sådant värde på k, att seriens summa blir lika med kvadraten på k, och konstruerar fördenskull den kurva, som svarar mot det erhållna sambandet mellan a och k. Undersök, för vilka värden på a den nyss nämnda uppgiften är möjlig, och ange särskilt, för vilka av dessa värden uppgiften har en eller flera lösningar.

8. I en triangel äro två vinklar 45° och 60° och den omskrivna cirkelns radie R. Bestäm vinklarna, och uttryckta i R, sidorna i den triangel, vars hörn utgöra höjdernas fotpunkter i den givna triangeln.

Aug. 1947

1. Upprita kurvan $10y = x^4 - 8x^2 + 7$. Ange särskilt kurvans skärningspunkter med koordinataxlarna samt dess maximi- och minimipunkter.

2. I var och en av två geometriska serier med reella termer är första termen 3. Seriernas kvoter äro varandras inverterade värden. Den ena serien är konvergent och den andra följaktligen divergent. Summan av de 7 första termerna i den ena serien är 64 gånger så stor som summan av de 7 första termerna i den andra. Bestäm summan av den oändliga konvergenta serien.

3. Ett parallelltrapets $ABCD$, vars parallella sidor AB och CD förhålla sig som $1 : 2$, har hörnet A i punkten $(-3;\, 6)$ och hörnet D på x-axeln. Diagonalerna AC och BD skära varandra under räta vinklar i punkten $(-1;\, 2)$. Bestäm sidornas ekvationer.

4. I en rätvinklig triangel med ytan T uppritas den inskrivna cirkeln. Förenas tangeringspunkterna med varandra, erhålles en triangel med ytan t. Bevisa, att förhållandet $t : T$ är lika med förhållandet mellan den inskrivna cirkelns radie och hypotenusan.

5. I ett likbent parallelltrapets är den ena av de parallella sidorna 16 cm, och summan av halva den andra och höjden är 9 cm. Trapetset roterar kring de parallella sidornas mittpunktsnormal. När blir den uppkomna rotationskroppens volym så stor som möjligt?

6. Lös ekvationen $\sin 2x = 2 + 2\sin x + 2\cos x$.

7. En cirkelsektor har radien r och medelpunktsvinkeln v ($v < 180°$). Sektorns båge AB delas genom punkterna C och D i tre lika stora delar, AC, CD och DB. Ett parallelltrapets $CDEF$ inskrives i sektorn, så att E och F äro belägna på radierna OB respektive OA och CD är parallell med EF. Ange läget av E och F, då trapetsets yta är så stor som möjligt. Undersök därefter, mellan vilka värden vinkeln v skall ligga, för att OE skall vara $> \frac{1}{2}r$, då ytan har sitt maximivärde.

8. I en kub äro $ABCD$ och $A'B'C'D'$ två parallella sidoytor, vilkas hörn förenas av kantlinjerna AA', BB', CC' och DD'. Ett plan lägges genom hörnet C' och mittpunkterna på kantlinjerna AB och AD. Bestäm ytan av den del av planet, som faller inom kuben.

H.T. 1947

1. Föenekla uttrycket $\left(\sqrt{p}\right)^{a-\frac{1}{b}} \cdot \left(\sqrt{p}\right)^{b-\frac{1}{a}}$. Beräkna därefter dess exakta värde, om a och b äro rötterna till ekvationen $5x^2 - 24x + 30 = 0$ och $p = \sqrt{5}$.

2. Lös ekvationen $\sin^3 x - \sin 3x = \cos^3 x + \cos 3x$.

3. Den räta vinkelns spets i en rätvinklig triangel ligger i punkten $(-2;\ -5)$ och triangelns tyngdpunkt i $(1;\ -2\frac{2}{3})$. Hypotenusan ligger utefter linjen $11x + 3y - 23 = 0$. Bestäm koordinaterna för triangelns övriga hörn.

4. Kring ett klot omskrives en rät cirkulär kon. Genom den cirkel, längs vilken klotet tangerar konens mantelyta, lägges ett plan. Detta delar klotet i två segment, vilkas volymer förhålla sig som $5 : 27$. Bestäm konens toppvinkel.

5. Tre klot, som ligga på ett horisontellt bord, tangera varandra parvis utantill. Ett av kloten har hälften så stor radie som de båda andra. Ett plan lägges så, att det tangerar alla kloten. Beräkna vinkeln mellan detta plan och bordet.

6. Två räta cirkulära koner ha samma basyta och äro vända åt samma håll. Den ena konens toppvinkel är 60°, den andras 90°. Parallellt med basytan lägges ett plan, som skär båda mantelytorna så, att den cirkelring som utskäres i planet, får största möjliga yta. Beräkna det förhållande, i vilket den mellan mantelytorna befintliga volymen delas av detta plan.

7. I triangeln ABC är vinkeln B dubbelt så stor som vinkeln C. Bisektrisen till vinkeln A skär den motstående sidan i punkten D och den kring triangeln omskrivna cirkeln i punkten E. Hur stora äro triangelns vinklar, om $AD : DE = 5 : 4$?

8. Upprita kurvan $y = 24x - 22x^2 + 8x^3 - x^4$ i dess huvuddrag. I en punkt P på kurvan drages tangenten. Undersök, hur dennas avskärning på y-axeln varierar, när P rör sig längs kurvan och åskådliggör detta i ett särskilt diagram. Ange speciellt, för vilka x-värden den nämnda avskärningen antar maximi- eller minimivärden.

Jan. 1948

1. För en konvergent oändlig geometrisk serie gäller, att summan av termerna med udda ordningsnummer och summan av termerna med jämna ordningsnummer äro rötter till ekvationen $2x^2+3x-2 = 0$. Vilken är serien?

2. I den rätvinkliga triangeln ABC med den räta vinkeln vid B är CD bisektris till vinkeln C. I den rätvinkliga triangeln CDE med den räta vinkeln vid D är vinkeln E lika stor som vinkeln A. Triangeln CDE har fyra gånger så stor yta som triangeln BCD. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.

3. Lös ekvationen $2\sin^3 x = \cos x$.

4. I ett koordinatsystem äro punkterna $A\,(4;\ -1)$ och $C\,(-8;\ -5)$ givna. Bestäm två punkter B och D, så att deras sammanbindningslinje har vinkelkoefficienten 3 och fyrhörningen $ABCD$ är en rektangel. Beräkna även ytan av denna rektangel.

5. I triangeln ABC bildar medianen CD 20° vinkel med sidan CB. Vinkeln A är 40°. Beräkna de övriga vinklarna i triangeln ABC

6. Totala begränsningsytan av en rät cirkulär kon är dubbelt så stor som en given sfärs yta. Sök förhållandet mellan konens och sfärens volymer, när konens volym är så stor som möjligt.

7. I basytorna till en parallellt stympad regelbunden 8-sidig pyramid har man uppritat de inskrivna cirklarna och genom dessa lagt en kon, vars topp ligger utanför den stympade pyramiden. Hur stor del av den stympade pyramidens volym ligger utanför konen?

8. Tangenten i origo till kurvan $y = x^4 - bx^2 + 2x$ skär kurvan i en maximi- eller minimipunkt. Beräkna konstanten b, upprita kurvan samt bestäm ekvationen för en linje, som tangerar kurvan i två punkter.

V.T. 1948

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen $\cos x$, andra termen $\sin x$ och summan $-\sin x$. Bestäm de vinklar x, för vilka detta gäller.

2. En studerande erhöll i början av år 1947 ett räntefritt lån på 10 000 kr att återbetalas med en femtedel av lånesumman vid början av vart och ett av åren 1953–1957. Beräkna värdet vid tidpunkten för lånets mottagande av den gåva, som studeranden genom denna räntefrihet kan sägas ha erhållit, om man beräknar ränta efter 3% och den tänkes kapitaliserad vid varje års slut.

3. I en given halvsfär inskrives en rät cirkulär cylinder, så att en av cylinderns generatriser faller utefter en diameter i halvsfärens plana yta och omkretsarna till cylinderns basytor tangera den sfäriska ytan i var sin punkt. Beräkna förhållandet mellan cylinderns höjd och basdiameter, då dess volym är så stor som möjligt.

4. I en triangel ABC förhålla sig höjderna från hörnen A och B som $4 : 3$ och yttervinklarna vid A och B som $3 : 2$. Beräkna triangelns vinklar.

5. I ett parallelltrapets $ABCD$ äro diagonalerna vinkelräta mot varandra. Ändpunkterna A och B av en av de parallella sidorna äro belägna i pukterna $(-4;\ 4)$ och $(-1;\ -2)$. De icke parallella sidornas förlängningar skära varandra i punkten $P\,(3,5;\ -2)$. Bestäm koordinaterna för punkterna C och D.

6. Två lika stora klot äro så belägna, att det enas medelpunkt ligger på det andras yta. I kloten äro placerade två olika stora regelbundna tresidiga prismor. I vart och ett av dessa äro alla kantlinjerna lika långa. Sidokanterna äro parallella med med klotens centrallinje, och för varje prisma gäller dessutom, att de tre hörnen i en basyta ligga på den ena klotytan och de tre återstående hörnen på den andra. Klotens medelpunkter ligga bägge innanför det större prismat och utanför det mindre. Beräkna förhållandet mellan det större och det mindre prismats kanter.

7. I en halvcirkel med medelpunkten O och diametern AB är en korda AC dragen. En cirkel med medelpunkten O' inskrives i figuren ABC, så att den tangerar kordan, diametern och bågen BC. Bevisa, att

$$\cot \frac{1}{2} CAB - \cot \frac{1}{2} O'OB = 1.$$

8. I funktionen $y = x^3 - ax$ är a en konstant. Om värdet på a väljes på lämpligt sätt, kan man på den motsvarande kurvan finna punkter P och Q så belägna, att tangenten i P samtidigt blir normal till kurvan i Q. Bestäm vinkelkoefficienten för PQ, uttryckt i a, och ange, vilket villkor a måste uppfylla, för att någon dylik tangent skall finnas.

Aug. 1948

1. I en geometrisk serie med positiva termer är summan av de tre första termerna 64 och summan av de sex därpå följande 9. Bestäm seriens första term och kvot.

2. I en fyrhörning, vars sidor ha ekvationerna $x - y = 0$, $3x + y = 0$, $x + y - 14 = 0$ och $12x - 2y + 33 = 0$, inskrives en rektangel, vars sidor äro parallella med koordinataxlarna. Ange koordinaterna för dess hörn.

3. Bestäm konstanten a i funktionen $y = x^3 + ax^2 + 5x + 3$, så att värdena av funktionen, dess första och dess andra derivata, tagna i nämnd ordning, bilda en aritmetisk serie för $x = 3$. Undersök, om det finns några andra x-värden, för vilket detsamma gäller för ifrågavarande värden på a.

4. I en kvadrat med sidan 10 cm tages varje hörn till medelpunkt för en cirkel, vars radie är lika med kvadratens sida. Inuti kvadraten uppkommer därvid en av fyra cirkelbågar begränsad figur. Beräkna dennas yta.

5. Till kurvan $y = x^2$ har man dragit tangenterna från punkten $(\frac{1}{2}; -2)$ samt en tangent parallellt med den korda, som förenar de förstnämnda tangenternas tangeringspunkter. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av de tre tangenterna.

6. En halvsfär med radien R skäres av ett plan, som är parallellt med halvsfärens plana begränsningsyta. Den erhållna skärningsytan utgör den plana begränsningsytan av ett sfäriskt segment, som tangerar halvsfärens plana begränsningsyta. Hur stor är detta segments höjd, då dess volym är så stor som möjligt?

7. Lös ekvationen $\cot x + 5 \cos x = 1$.

8. Från en punkt A_1 på kurvan $9y = x^3 - 9x^2$ drages en rät linje, som tangerar kurvan i en punkt A_2, skild från A_1. Från A_2 drages en rät linje, som tangerar kurvan i en punkt A_3, skild från A_2. Förfarandet upprepas, varvid erhålles punkterna $A_4, A_5, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Från A_{n-1} är alltså dragen en rät linje, som tangerar kurvan i A_n, som är skild från A_{n-1}. Visa, att punkten A_n obegränsat närmar sig en punkt på kurvan, då n obegränsat växer, och bestäm koordinaterna för denna punkt. (Man förusätter, att A_1 ej råkat bli placerad just i denna punkt.)

H.T. 1948

1. Upprita kurvan $y = -x^4 + 4x^2$, och ange eventuella maximi- och minimipunkter samt skärningspunkter med axlarna. Sök därefter tangeringspunkterna för de tangenter till kurvan, som äro parallella med linjen $y = 4x + 1$.

2. En person har genom domstolsutslag ålagts att till en kommun betala 12 000 kr den 31 december varje år fr.o.m. 1949 t.o.m. 1958. Han erbjuder kommunen att i stället erlägga summan på en gång den 31 december 1953. Hur ställer sig detta erbjudande för kommunen, om den räknar med 4% ränta på ränta? De båda alternativen anses likvärdiga från säkerhetssynpunkt.

3. En aritmetisk serie är så beskaffad, att summan av de n första termerna är $n(3n + 1)$. I denna serie är summan av tre konsekutiva termers kvadrater lika med 10 164. Vilka äro dessa termer?

4. En rät linje går genom -punkten $A\,(0; 4)$ och skär de båda räta linjerna $y = x$ och $y = 2x$ i punkten B respektive C. Bestäm ekvationen för den förstnämnda räta linjen i vart och ett av de fall, då en av punkterna A, B och C ligger mitt emellan de båda övriga.

5. Två lika stora klot med radien r tangera varandra. Ett regelbundet tresidigt prisma har tre hörn på vardera klotytan, och dess sidokanter äro parallella med klotens centrallinje. Bestäm det största värde, som prismats volym kan anta.

6. I triangeln ABC är sidan AB 6 cm och sidan AC 9 cm. Sidan BC är tre gånger så stor som den mot densamma dragna höjden. Beräkna vinkeln A.

7. För vilka värden på konstanten a har ekvationen

$$(a + 1 - 2a \tan x) \cos^2 x + 1 = 0$$

reella lösningar?

8. Ett plan skär alla sidokanterna i en regelbunden fyrsidig pyramid och avskär av dessa i ordning sträckorna a, b, c och d, från pyramidens spets räknat. Bevisa, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$