Årgång 87, 2004

Första häftet

4140. I vidstående addition har nio av siffrorna ersatts med stjärnor. Man vet att var och en av siffrorna 1–9 förekommer exakt en gång bland de borttagna. Vidare gäller att ett av de sökta fyrsiffriga talen är jämnt delbart med det andra. Vilka är de saknade termerna?

$$\begin{array}{rcccc} & & & & * \\ & * & * & * & * \\ + & * & * & * & * \\ \hline & 8 & 7 & 5 & 7 \end{array}$$

4141. Avgör – endast med papper och penna – om

$$7^{5832} + 5832$$

är ett primtal eller ej.

4142. Funktionen $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax - a^3$ har ett maximivärde och ett minimivärde med summan 0. Bestäm värdet på a och beräkna för detta värde rötterna till ekvationen $x^3 + 3ax^2 + 3ax - a^3 = 0$.

4143. En tentamen omfattar åtta frågor som besvaras med ja eller nej. Bland de studenter som genomförde provet noterar man följande: Om man plockar ut två studenter, vilka som helst, är det alltid två frågor på vilka båda har svarat ja och två frågor på vilka båda har svarat nej. Av de fyra frågor som studenterna har besvarat olika, har två besvarats med ja och två med nej. Hur många studenter kan maximalt ha deltagit i provet?

4144. I triangeln ABC är vinkeln A 15°, och vinkeln B 30°. Låt P vara mittpunkten på sidan AB. Bestäm vinkeln ACP.

4145. En lärare skriver slumpmässigt heltalen 10, 11, 12, ..., 29 på tavlan. Hon låter sina elever välja två tal slumpmässigt. Läraren stryker de två valda talen och ersätter dem med hälften av det minsta av talen (som inte nödvändigtvis är ett heltal). Om eleverna väljer 13 och 14, stryks båda talen och ersätts med 6,5. Därefter väljer eleverna på nytt två av talen på tavlan och proceduren upprepas tills slutligen endast ett tal återstår. Kan man vara säker på att det sist erhållna talet är mindre än 1?

4146. Lös ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x-y+z)^2 &=& y(u+w-y) \\ (y-z+u)^2 &=& z(w+x-z) \\ (z-u+w)^2 &=& u(x+y-u) \\ (u-w+x)^2 &=& w(y+z-w) \\ (w-x+y)^2 &=& x(z+u-x). \end{array}\right.$$

4147. Sällskapet De Sjutton har en ganska egenartad sammansättning. Vissa av ledamöterna är *lianer* vilket innebär att de alltid ljuger, de övriga är *trudorer* som alltid talar sanning. Vid det senaste mötet hade de sjutton ledamöterna placerat sig kring ett runt bord. Efter mötet hade deltagarna blivit intervjuade av en journalist. Märkligt nog hade alla fällt samma kommentar: ”Jag satt mellan två lianer.” Journalisten funderade över detta samstämmiga uttalande och kom snart fram till att minst sex av ledamöterna var trudorer. Hur kunde hon dra denna slutsats?

4148. Konstruer en trekant ABC når $b = 6,5$ cm, høyden fra A er 6 cm og medianen fra C er 5 cm. Vinkelen C skal være spiss. Finn de ukjente sidene og vinklene (siden b står mot vinkelen B).

4149. Den reellvärda funktionen f är definierad för alla heltal och uppfyller villkoret

$$f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$$

för alla heltal x. Man vet att $f(1) = 3$ samt att f inte kan anta värdet 0. Vad är $f(37)$?

Andra häftet

4150. När Lisa hade födelsedagskalas kom en hoper ungar. Märkligt nog var det lika många i varje ålder som de var gamla (t ex tre treåringar osv), och därtill åt varje unge lika många bullar som sin egen ålder. När kalaset var slut sade Lisas mamma att det var tur att inga nioåringar hade kommit, ty då (om nio stycken hade dykt upp) hade det gått åt halvannan gång så många bullar, och det hade hon inte hemma. Det kom inte heller några som var äldre.

Hur många ungar var det på kalaset?

4151. Arne bor i Nytorp och Britta i Högås och bestämmer sig en lördag för att promenera varandra till mötes.

De startar båda kl 12.00. Efter en halvtimme blir Arne omkörd av sin mopedåkande lillasyster Cissi. En halvtimme senare möter Cissi Britta och 6 minuter senare, kl 13.06, är Cissi framme i Högås, där hon tillbringar en timme på ortens konditori. Kl 14.06 startar Cissi återresan mot Nytorp och råkar passera Arne och Britta i samma ögonblick som dessa möts. Vi antar att såväl promenadhastigheterna som mopedens hastighet är konstanta. Vi undrar nu:

a) Vad var klockan när Arne och Britta möttes?

b) Hur dags åkte Cissi från Nytorp?

4152. Här på redaktionen har vi två påsar med kulor, markerade A och B. Påse A innehåller fem vita kulor, medan påse B innehåller ett okänt antal svarta kulor. Låt oss flytta över en av kulorna från påse A till påse B. Vi drar sedan en kula på måfå i påse B och placerar den utvalda kulan i påse A. Därefter drar vi på måfå en kula ur påse A och lägger den i påse B. Slutligen drar vi en kula slumpmässigt ur påse B. Hur många svarta kulor fanns det från början i påse B om oddset för att den sist dragna kulan är svart är exakt $3/2$ (dvs kvoten mellan sannolikheterna för resp svart och vit).

4153. I en pyramid har basen formen av en rätvinklig triangel vars sidor är heltal och höjden är också ett heltal. Visa att volymen är ett jämnt heltal. Börja gärna med att visa att volymen är ett heltal.

4154. Lös ekvationerna

a) $x-[x]=[0{,}6x-3]$; b) $x-[0{,}8x]=[0{,}6x-3]$,

där $[a]$ är det största heltal som är mindre än eller lika med a.

4155. Vid en konståkningstävling använder man sig av tre domare som rangordnar de tio åkarna från 1 till 10. Den som har lägst rangsumma vinner. Lägsta tänkbara rangsumma är förstås 3, men i den aktuella tävlingen hade den ensamme segraren den största möjliga rangsumman som är möjlig när man inte delar segern med någon annan. Vilken rangsumma hade segraren?

4156. Punkten P väljs inuti kvadraten $ABCD$ så att $\angle PAC = \angle PCD = \alpha$.
a) Karakterisera de möjliga lägena för punkten P när α varierar.
b) Beräkna $\angle ABP$ för $\alpha = 20°$.

4157. Familjen Dantès har flyttat till det lilla samhället. De fem barnen skapar viss förvirring i klassrummet när de redogör för sina familjeförhållanden. Efter lektionen berättar läraren för rektorn vad barnen har sagt. Låt oss för enkelhets skull benämna dessa A, B, C, D och E. De hade bl a påstått följande:

A: *Jag har tre bröder och en syster.*

B: *Jag har fyra systrar.*

C: *Jag har en bror och tre systrar.*

D: *Jag har fyra bröder.*

E: hade inte sagt någonting.

Rektorn suckar uppgivet: ”Ljuger alla barnen? De motsäger ju varandra.” Läraren lugnar honom. ”Inte alla. Pojkarna talar osanning, men flickorna är faktiskt helt sanningsenliga.”

Rektorn ser förbryllad ut och undrar: ”Men vilka av Dantès barn är flickor och vilka är pojkar?” Läraren, som undervisar i matematik, ler glatt: ”Det får du som hemläxa till i morgon att räkna ut.” Jo, rektorn klarade detta efter en natts funderande. Vad kom han fram till?

4158. Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c (som vanligt står sidan a mot vinkeln A osv) samt arean T. Visa sambandet

$$T = \frac{1}{4}\left(a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C\right).$$

4159. För talföljderna $a_0, a_1, a_2, \ldots$ och $b_0, b_1, b_2, \ldots$ gäller att $a_0 = 1$ och $b_0 = 1$ och sambanden

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + 2b_n\right). \end{cases}$$

Ge explicita uttryck för a_n och b_n. Visa att såväl a_n som b_n har ett gränsvärde när $n \to \infty$. Vilka är dessa gränsvärden?

Tredje häftet

4160. Vid rengöring och tömning av stadens fontäner och dammar har turen kommit till Svandammen. Man prövar de båda vattenkranarna, här benämnda A och B, på följande sätt. Först öppnar man kran A och låter vattnet rinna en femtedel av den tid det skulle ta att helt fylla dammen med kran B enbart. Därefter stänger man kran A och öppnar kran B. Vattnet får rinna en femtedel av den tid det skulle ta att fylla dammen med kran A enbart. Nu är dammen fylld till $5/12$. Efter ytterligare 50 minuter, nu med båda kranarna öppna, är dammen helt full.

Hur lång tid skulle det ta att fylla Svandammen med varje enskild kran?

4161. Vi planerar att lägga nytt golv i Elementas expedition. Golvytan har formen av en kvadrat med sidan 2 m 3 dm. Hos Byggmästare Bob kan man köpa kvadratiska golvplattor i tre storlekar: 3×3, 2×2 och 1×1 dm. Per dm^2 räknat är de minsta plattorna dyrast och de största billigast. Hur många plattor av varje storlek ska vi köpa för att minimera den totala kostnaden?

Antag att vi i stället vill minimera antalet plattor av den minsta storleken. Vilket är det minsta antalet sådana plattor som behövs?

4162. I nedanstående ekvation gäller det att ersätta varje bokstav med en siffra och varje asterisk med ett plus- eller minustecken så att ekvationen stämmer. De tre sökta tecknen behöver inte nödvändigtvis vara lika. Samtliga tio siffror ska användas. Observera att $abcd$ står för ett fyrsiffrigt tal där den första siffran anges med a, den andra med b osv. Inget av de fyra talen får börja med en nolla. Tilläggsuppgift: Vilket är det största möjliga värdet som vänsterledet kan anta?

$$abcd * efg * hi * j = 0.$$

4163. Talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras av $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$ för $n \geq 4$. Bestäm a_{2004}.

4164. Matematikern och författaren Lewis Carroll lär ha skapat följande problem: Jack och Jill gick hemifrån kl 3 en eftermiddag och promenerade först på slät mark, sedan upp till toppen av en höjd, därefter ner på andra sidan, varefter de vände och gick samma väg tillbaka. De kom hem igen kl 9 på kvällen utan att ha tagit någon paus. Deras hastighet var 4 km i timmen på slät mark, 3 km i timmen i uppförsbacke och 6 km i timmen i nedförsbacke.

Hur lång var promenaden? Vad var klockan när de nådde kullens topp? Det är kanske för mycket begärt att utifrån den givna informationen fastställa den exakta tiden, så vi går med på att tidpunkten anges på en halvtimme när.

4165. Triangeln ABC är trubbvinklig och likbent med $|AB| = |AC|$. På sidan BC placeras punkten D och på sidan AC punkten E på ett sådant sätt att deltrianglarna ABD, ADE och CDE alla är likbenta. Bestäm vinklarna i triangeln ABC.

4166. To rette linjer skjærer hverandre rettvinklet utenfor et plan. Den ene linjen danner 30 grader, den andre 45 grader med planet. Hvor stor vinkel danner planet mellom linjena med det gitte plan? (Et vink: lag en papirmodell.)

4167. a) Visa olikheten

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$$

för positiva reella tal x och y.

b) En mycket populär uppgift i matematiska tävlingssammanhang går ut på att visa *Nesbitts olikhet*:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

för alla positiva reella tal a, b och c. Kan man på något vis använda sig av olikheten i a)?

4168. Lisen äger fem veteranbilar. Intressant nog bildar samtliga bilnummer tresiffriga tal med siffrorna i strängt växande följd (vi räknar t ex 136 som strängt växande men inte 166). Vidare har varje tal en siffersumma som är 20 eller högre. Lisen undrar nu över hur sällsynt detta kan vara. Vad är sannolikheten att ett tresiffrigt tal (här räknar vi även med tal som börjar med en nolla, dock inte talet 000) är strängt växande? Vad är sannolikheten att ett tresiffrigt tal har en siffersumma som är minst 20? Vad är sannolikheten att båda villkoren är uppfyllda?

4169. AB är diameter i en halvcirkel. P är en punkt på halvcirkelbågen. Normalen från P mot AB träffar AB i C. En korda AE skär PC i D så att $\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|PD|}{|DC|} = f$. Vilka värden kan f anta när punkten P varierar?