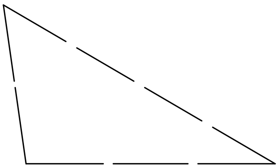
Årgång 86, 2003

Första häftet

4100. En snyggt ritad *RUTA* är förstås en kvadrat, och en *KUB* är lika självklart en kub som att *TRE* och *SJU* är primtal. Det är som bekant inte *SEX*, som är ett jämnt tal. Om varje bokstav står för en bestämd siffra, vad är då *KRUXET*?

4101. Av elva tändstickor plockar vi först ut nio och bildar en triangel på sätt som figuren visar. Därefter tar vi de två återstående stickorna och placerar dem så att triangeln delas upp i två fält med lika stora areor. Hur ska de två sista stickorna placeras?



4102. a) Visa följande resultat. Det positiva heltalet $10r+s$, där r och s är heltal, är delbart med 11 om och endast om talet $r-s$ är delbart med 11. Använd detta resultat till att formulera en enkel metod för att visa ev delbarhet med 11. Är talet 3 001 232 377 delbart med 11?

b) Visa också följande resultat. Det positiva heltalet $10r+s$ är delbart med 13 om och endast om talet $r+4s$ är delbart med 13. Tillämpa detta resultat och undersök om talet 16 049 371 är delbart med 13.

c) Det positiva heltalet $10r+s$ är delbart med 17 om och endast om talet $r+as$ är delbart med 17, förutsatt att heltalet a väljs på lämpligt sätt. Bestäm a och undersök om talet 20 987 639 är delbart med 17.

4103. Tre löpare, Sara, Tanja och Ulla, springer i samma riktning längs en terrängbana med konstanta hastigheter resp v_S, v_T och v_U, där $v_S > v_T > v_U$. När de har sprungit banan ett antal varv har Sara vid ett tillfälle Tanja 180 m framför sig och Ulla 540 m framför sig. Efter en stund hinner Sara ifatt Tanja. I passeringsögonblicket befinner sig Ulla 180 m klängre fram. Snart blir Ulla passerad av såväl Sara som Tanja. Var befinner sig Sara När Ulla blir omsprungen av Tanja?

4104. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}+\sqrt{z} = 19 \\ \sqrt{x}+y+\sqrt{z} = 39 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+z = 175 \end{cases}$$

i naturliga tal x, y, z.

4105. Här gäller det att placera ut talen $1, 2, \ldots, N$ i två grupper så att talen a, b och deras summa $a+b$ inte alla får finnas i samma grupp. Om exempelvis $N = 6$ och talen 1 och 5 finns i en av grupperna kan varken talet 4 eller talet 6 befinna sig i denna grupp, eftersom $1+4=5$ och $1+5=6$.

a) Visa att uppgiften är lösbar för $N = 8$, men inte för $N = 9$. Hur ska talen $1, 2, \ldots, 8$ fördelas på två grupper?

b) För $N = 9$ krävs tre grupper för att vi ska kunna undvika att två tal jämte deras summa befinner sig i samma grupp. Visa att i fallet med tre grupper så är uppgiften lösbar för $N = 23$, men inte för $N = 24$. Hur ska talen $1, 2, \ldots, 24$ fördelas på tre grupper?

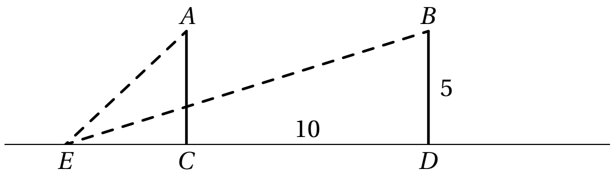
4106. Följande uppgift gavs i studentexamen i matematik, specialkurs, vt 1938.

Om v är en vinkel mellan 0° och 30°, så är $60 \sin v$ approximativt lika med vinkelns gradtal. Vilket är det största värde differensen kan anta?

4107. a) Mårten får i uppgift att limma ihop en kub av ett stort antal småkuber med sidan 1 så att den stora kuben får sidan 8. Därefter ska han räkna ut antalet olika rader av åtta småkuber som kan hittas i den stora kuben. Med en rad menar vi en följd av åtta småkuber, sådan att småkubernas mittpunkter ligger på en och samma räta linje. Av ren tanklöshet bildar Mårten en kub med sidan 10 i stället för 8, men inser plötsligt att han kanske inte har gjort något större misstag. Vad är det som Mårten har insett? Hur många rader blir det?

b) Mårten blir sedan ombedd att beräkna antalet punkter (x, y, z) där x, y, z är icke-negativa heltal och där summan av koordinaterna blir $\leq n$ för $n = 1, 2, \ldots$. Han konstaterar att för $n = 0$ är det bara punkten $(0, 0, 0)$ som duger och för $n = 1$ tillkommer punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Men hur blir det för större värden på n?

4108. Ett segelfartyg har två master som är 5 m höga och som befinner sig på 10 m avstånd från varandra. Ett 20 m långt rep, vars ändar är fästa i masttopparna, sträcks så att det precis når fartygsdäcket. Vi betecknar masttopparna med A och B, fotpunkterna med C och D samt den punkt där repet nuddar däcket med E (se figuren), och vi antar att alla fem punkterna ligger i samma vertikala plan. Bestäm det exakta avståndet mellan C och E.



4109. På planet från Arlanda till Malmö är alla platser bokade. Först ombord är den från TV kände *Mr. X*, som visserligen också har en plats bokad, men som inte orkar leta reda på sin plats utan väljer en stol helt slumpmässigt. Nästa passagerare, som vi kan kalla A, sätter sig däremot på sin bokade plats såvida inte *Mr. X* redan har satt sig på A:s plats. I det senare fallet väljer A en plats slumpmässigt i kabinen. Den tredje passageraren går ombord, här kallad B, agerar på samma sätt: B sätter sig på sin bokade plats, eller om den råkar vara upptagen, väljer en av de tomma platserna slumpmässigt. Alla de övriga passagerarna beter sig på samma sätt, en efter en, tills planet är fullt.

Frågan är nu: Vad är sannolikheten att den sist anlände passageraren får sitta på sin bokade plats?

Gör gärna en gissning innan du sätter igång med problemet.

Andra häftet

4110. Det finns ett enkelt sätt att uttrycka förhållandet mellan radierna för de in- och omskrivna cirklarna till en rätvinklig triangel i dennas tre sidor a, b och c. Hur ser det uttrycket ut? Visa att förhållandet har ett maximum för en likbent triangel och beräkna dess värde exakt.

4111. Låt oss kalla ett primtal för symmetriskt om det även blir ett primtal då siffrorna läses i omvänd ordning (t ex är 113 ett sådant, eftersom 311 också är ett primtal). Erhåller vi samma primtal kallas det självsymmetriskt. Alla ensiffriga primtal är trivialt självsymmetriska, medan 11 är det enda tvåsiffriga och 101 det minsta tresiffriga. Visa att det inte finns några fyrsiffriga, samt ange det minsta femsiffriga självsymmetriska primtalet.

4112. I en s k magisk kvadrat med $k \times k$ rutor är k^2 heltal inskrivna på sådant sätt, att summan i varje rad, kolumn och diagonal är konstant. Ofta har vi tilläggsvillkoret att talen ska vara olika och då vanligen talen $1, 2, \ldots, k^2$.

a) För $k = 3$ gäller det att placera hela tal i de nio rutorna enligt givna regler. Visa att den gemensamma rad-, kolumn- och diagonalsumman är tre gånger så stor som talet i kvadratens mittruta. (Detta gäller även utan tilläggsvillkor.)

c) På ett berömt kopparstick, *Melancolia I* av Albrecht Dürer finns vidstående magiska kvadrat med sidan 4 avbildad. Här ser vi att alla summor av nämnt slag är lika med 34. Vi noterar också att summan av de fyra hörntalen också är 34. Gäller denna egenskap allmänt för magiska kvadrater med sidan 4?

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4113. Paula, Robert, Sanna och Teddy besöker stadens konditori. Det är nästan tomt i hyllorna; det enda som återstår är åtta mandelkakor. Det naturliga vore nu att låta var och en ta två kakor var. Men Paula, som är fascinerad av spel, tycker att slumpen ska få avgöra hur många kakor var och en ska få. De övriga går med på detta, men på Roberts inrådan ska alla få minst en kaka.

a) Låt oss först fundera över vad som skulle hända om Paula fördelade kakorna helt slumpmässigt, dvs så att en eller flera i kvartetten skulle kunna bli helt utan kakor. Vad skulle sannolikheten bli att alla fick minst en kaka?

b) Hur ska Paula praktiskt bära sig åt för att slumpmässigt fördela kakorna så att varje person får minst en kaka var? Alla kakorna ser likadana ut, så det är bara antalet kakor som var och en får som är av intresse.

c) Om Paula fördelar kakorna på sätt som anges i b), vad är sannolikheten att alla får lika många kakor? Vad är sannolikheten att Paula får fem av de åtta kakorna?

4114. Är det möjligt att hita en oändlig geometrisk talföljd bestående av tal valda ur följden $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, sådan att summan är $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$?

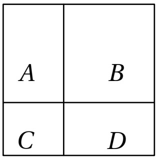
4115. Bestäm alla polynom $P(x)$ som uppfyller sambandet

$$xP(x-1) = (x-3)P(x).$$

4116. a) Antag att du har tre enkronor (e) och två femkronor (f) ordnade som $efefe$ i en rad framför dig. Mynten tangerar varandra, dvs inga luckor förekommer. Med pekfingret och långfingret på en enkrona och en femkrona som tangerar varandra kan du flytta de båda mynten samtidigt. Myntparet placeras alltid så att det tangerar något av de övriga mynten från vänster eller höger och kan då också placeras in i någon av tidigare uppkomna luckor mellan mynten. Kan du genom att upprepa denna operation arrangera om mynten i ordningen $eeeff$? I slutställningen ska mynten tangera varandra.

b) Antag nu att du har tre enkronor och tre femkronor ordnade i en rad som $efefef$ på bordet. Mynten tangerar varandra. Kan du genom upprepad användning av operationen i a) arrangera om mynten till ordningen $eeefff$? Inga luckor får förekomma mellan mynten i slutställningen.

4117. Vidstående kvadrat har sidan 1. Två godtyckliga, korsande sträckor delar in kvadraten i fyra rektangulära fält som figuren visar. De fyra fältens resp areor är A, B, C och D.



a) Visa att A och D inte båda kan vara större än $1/4$.
b) Visa att minst en av areorna A, $B+C$, D är större än $4/9$.

4118. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. Höjden från A träffar BC i D. Normalerna från B och C mot diametern AE träffar denna i resp F och G. Visa att triangeln DFG är likformig med triangeln ABC.

4119. I nedanstående division har till följd av ett missöde siffrorna på de med * betecknade platserna försvunnit. Vilka är siffrorna? Påpekas bör att det kan finnas 7:or även bland de försvunna siffrorna.

```
**7*******:****7*=**7**
******
------
*****7*
*******
-------
  *7****
  *7****
  ------
  ******
  ****7**
  -------
    ******
    ******
    ------
```

Tredje häftet

4120. *FYRA* och *NIO* är förstås kvadrater, medan *FEM* är ett Fibonaccital. (Dessa tillhör den talföljd som fås om man börjar med 1, 1 och låter nästa term vara summan av de två föregående: $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$ osv.)

Vad är då summan av dessa tre tal, dvs *ARTON*? (Skilda bokstäver svarar mot olika siffror.)

4121. I en vanlig hushållsrulle är den totala papperslängden 22 m, diametern är 115 mm, medan den inneliggande papphylsans diameter är 45 mm.

a) Uppskatta antalet varv i rullen.

b) Vilken är rullens ungefärliga diameter när halva pappersmängden är förbrukad?

4122. Den lilla stadens pantlåneinrättning styrs av en notarie och hennes fem assistenter. Inkomna värdeföremål förvaras i ett kassaskåp med ett flertal lås. Notarien har fler nycklar än varje assistent som har lika många nycklar var. Bestämda regler gäller vid öppnandet av skåpet:

- Notarien kan inte ensam öppna kassakåpet. Enbart två assistenter tillsammans kan inte heller öppna skåpet.
- Notarien kan alltid öppna kassaskåpet tillsammans med en av assistenterna, godtyckligt vilken. Tre assistenter, godtyckligt vilka, kan tillsammans alltid öppna skåpet.

Vilket är det minsta möjliga antalet lås till kassakåpet? Hur många nycklar har i så fall notarien och var och en av hennes assistenter?

4123. Här kommer ett av de sista problemförslagen till *Elementa* från Gunnar Bloms flitiga penna.
Se på talföljden $1000, 999, 998, \ldots, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.Bestäm siffersummorna $1, 27, 26, \ldots, 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.
Beräkna på enklast möjliga sätt summan av dessa siffersummor.

4124. I triangeln ABC är vinkeln BAC dubbelt så stor som vinkeln ACB. Med A som medelpunkt uppritas en cirkel som går genom B och som skär BC i P och AC i Q. Visa att $|AB| + |PQ| = |AC|$.

4125. Bestäm alla positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

4126. I en skål med karameller finns s svarta lakritsbåtar, r röda hallonbåtar och en gul båt med körsbärssmak. Albin står i nattens mörker och plockar åt sig en karamell i taget. Han är angelägen om att få tag på en karamell med bärsmak. Av någon anledning gillar han inte lakrits.

a) Vad är sannolikheten att den först funna karamellen med bärsmak är den gula körsbärsbåten?

b) Hur många lakritsbåtar måste Albin i genomsnitt sortera bort innan han hittar den första båten med bärsmak?

c) Nästa natt när Albin på nytt ska förse sig med karameller har hans syster Lina redan ätit upp körsbärsbåten. I skålen återstår endast $r = 5$ hallonbåtar och $s = 6$ lakritsbåtar. Varje gång som Albin hittar en hallonbåt lägger Lina en extra lakritsbåt i skålen från en egen påse. Om den första karamellen är en hallonbåt finns det alltså nästa gång 4 hallonbåtar och 7 lakritsbåtar i skålen; om han däremot får en lakritsbåt återstår 5 hallonbåtar och 5 lakritsbåtar. Albin fortsätter på detta sätt under Linas medverkan tills samtliga hallonbåtar är slut. Hur många lakritsbåtar finns det då i genomsnitt kvar i skålen?

4127. Lös ekvationen

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} = 2\sqrt{3}$$

under bivillkoret $x + y = 120°$.

4128. a) Heltalen $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ uppdelas godtyckligt i två lika stora grupper A och B. Talen i grupp A ordnas i växande ordning $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, medan talen i grupp B ordnas i avtagande ordning, $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Visa att

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

b) På ett kvadratiskt rutbräde med $n \times n$ rutor har varje ruta markerats med ett talpar (r, k), där r anger radnumret och k kolumnnumret. Vi ersätter nu varje talpar med det minsta av de båda talen i rutan: $(3, 3)$ blir 3, $(2, 5)$ blir 2 osv. Visa att summan av de så bildade talen i de n^2 rutorna är $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$.

4129. Vardera basvinkeln i en likbent triangel ABC, där $|AB| = |AC|$, är 50°. På sidan BC ligger punkten D, sådan att $\angle BAD = 50°$, och på sidan AC ligger punkten E sådan att $\angle ABE = 30°$. Bestäm vinkeln $\angle BED$.

Fjärde häftet

4130. På frukostrestaurangen Sandels kostar en frukost 75 kr om man betalar kontant, men enligt ett specialerbjudande kan man få rabatt om man köper ett kundkort. Det går ut på att man betalar 550 kr men får 605 kr insatt på kortet. Sedan använder man kortet och betalar precis som med kontanter, dvs för varje frukost dras 75 kr från det innestående beloppet på kortet. I restaurangens annonser står det att erbjudandet innebär att kunden får 10% rabatt. Stämmer det?

4131. I en bordtennisturnering med fem deltagare möter alla varandra exakt en gång. Varje match ger spelarna poäng enligt följande. Förlorande spelare får 0 poäng medan vinnaren får lika många poäng som förloraren har vinster i hela turneringen. Om en spelare får 2 poäng i en vinstmatch betyder detta således attt motståndaren har vunnit två andra matcher.

Låt oss beteckna spelarna med A, B, C, och D. I vidstående rutnät utläser man radvis varje spelares poäng mot var och en av de övriga. Exempelvis ser vi i raden för C att denne har vunnit över A och fått 3 poäng. I översta raden har A följdriktigt poängen 0 i matchen mot C. Vidare vet vi att D har vunnit 2 matcher, att E bara har skrapat ihop 1 poäng samt att B har fått fler poäng än C. Komplettera tabellen och bestäm totalpoängen för var och en.

	A	B	C	D	E	Summa
A	–		0			
B		–				
C	3		–			
D				–		
E					–	1

4132. En mycket speciell miniräknare har bara två knappar, en svart: ● och en vit: ❍. Om man trycker på ● multipliceras talet i rutan med 2 varefter talet 1 adderas. Sålunda kommer 4 att bli 9 medan 10 blir 21. Om man trycker på ❍ förblir talet i rutan oförändrat om det är jämnt; om det är udda adderas talet med 5 varefter summan divideras med 2. Talet 10 blir alltså oförändrat medan talet 27 blir 16. När man sätter på miniräknaren står alltid talet 1 i rutan. Hur många knapptryckningar krävs för att rutan ska visa talet 25? Talet 100? Finns det några tal som är omöjliga att åstadkomma?

4133. a) Finn de positive heltallsløsningene till likningen

$$y = 2\sqrt{\left(\frac{z+x}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-x}{2}\right)}$$

b) När är talen i parenteserna kvadrater på heltal?

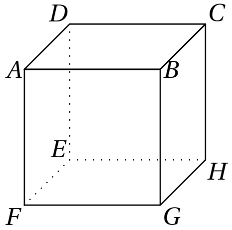
4134. a) På en oktaeder fördelar vi talen 0, 1,. . . , 7 över de åtta sidorna. För varje hörn definierar vi hörnsumman som summan av talen på de fyra omgivande trianglarna. Visa att man kan placera talen på ett sådant sätt att alla hörnsummor är lika.
b) På en kub fördelar vi sex positiva heltal över sidorna. För varje hörn bildas hörnsumman av talen på de tre omgivande kvadraterna. Antag att hörnsummorna är lika. Visa att de sex talen inte alla kan vara olika.

4135. Visa att om a, b och c är godtyckliga reella tal mellan 0 och 4, så måste åtminstone en av de tre summorna

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{4-b},\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{4-c},\quad \frac{1}{c}+\frac{1}{4-a}$$

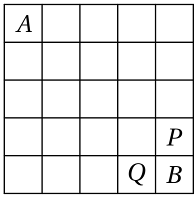
vara lika med eller större än 1.

4136. I vidstående kub är sidan 2. Bestäm arean av fyrhörningen $ARHS$ där R är mittpunkten på BC och S är mittpunkten på EF.



4137. a) Betrakta talföljder omfattande n tal, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, där $a_1 = 1$, $1 \le a_2 \le 2$, $1 \le a_3 \le 3, \ldots, 1 \le a_{n-1} \le n-1$, $a_n = n$ och där $1 \le a_1 \le \cdots \le a_n$. För $n = 3$ har vi bara sviterna 1, 1, 3 och 1, 2, 3. Bestäm antalet sviter för $n = 4$, $n = 5$ och $n = 6$. Vi ska försöka hitta en formel som uttrycker antalet talsviter som en funktion av n men låt oss först studera ett annat problem.

b) Betrakta vidstående rutnät med $n \times n$ rutor. Vi inleder en vandring i rutan som är markerad med A och slutar i rutan som är markerad med B. I varje steg går vi antingen 1 steg åt höger eller 1 steg nedåt; några andra förflyttningar är inte tillåtna. Vi avslutar således vandringen antingen genom att gå från rutan markerad med P till B eller från ruta Q till B. Bestäm för $n = 2, 3, 4, 5, 6$ antalet sådana vägar från A till B. Det sökta antalet ges av ett kombinatoriskt uttryck Vilket?



c) Låt oss kombinera resultatet i b) med problemet i a). Hur ser vandringarna i rutnätet ut i detta fall? Jämför för valda n-värden antalet vägar enligt problemet i a) med antalet vägar enligt problemet i b). Vilket samband råder? Använd detta till att konstruera en formel för antalet vägar i a).

4138. I ett hus med 100 våningsplan testar man hållfastheten hos en glaskula. Vi vet att om en kula som släpps från våning k går sönder, så går den också sönder om den släpps från varje annat högre våningsplan. Om den däremot håller när den släpps från våning k så håller den också när den släpps från varje annat lägre våningsplan. Vi antar att hållfastheten inte förändras om kulan kastas flera gånger utan att gå sönder. Vi söker det lägsta våningsplan N från vilket kulan säkert kommer att gå sönder.

a) Hur många försök krävs i sämsta fall för att fastställa N? Försöket avbryts förstås så snart kulan har gått sönder.

b) Följande fråga är nog något svårare. Antag att vi har två kulor med identiska hållfastegenskaper. Vilken strategi bör vi använda för att minimera antalet försök i det sämsta tänkbara fallet? Hur många försök krävs i detta fall för att fastställa N?

4139. Bisektrisen till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delarna a och b, där a och b är givna tal med $a > b$. Finns det trianglar med obegränsat stor area och som uppfyller villkoren? Om inte, uttryck den maximala arean i a och b.