Årgång 84, 2001

Första häftet

4020. Ett *trapetstal* kan skrivas som summan av minst två på varandra följande positiva heltal. Exempel: $12 = 3 + 4 + 5$. Bevisa att alla positiva heltal utom tvåpotenser är trapetstal.

4021. Här kommer en variant på lampproblemet i föregående nummer. På en platta är en uppsättning glödlampor monterad i kvadratisk formation som figuren visar, där varje lampa är markerad med ett tal. Från början är alla lampor tända. Det gäller att släcka samtliga lampor. Tyvärr är det inte möjligt att släcka en lampa i taget. Om man släcker en lampa så släcks också de fyra närmaste grannlamporna i den aktuella raden och kolumnen. Om man exempelvis släcker lampa nr 6 släcks också lamporna nr 2, 5, 7 och 10. Hörnlampor har bara två grannlampor; om man släcker lampa nr 1 släcks också lamporna nr 2 och 5. Kantlampor har tre grannlampor; om man släcker lampa nr 2 släcks också lamporna nr 1, 3 och 6.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Det nämnda gäller dock bara om lamporna är tända. Lampor som från början är släckta kommer i stället att tändas när man trycker på strömbrytaren.

a) Antag att vi har 3×3 lampor. Hur många knapptryckningar krävs för att släcka alla 9 lamporna?

b) Antag att vi har 4×4 lampor som i figuren. Hur många knapptryckningar krävs för att släcka de 16 lamporna?

c) Fallen 5×5 och 6×6 lampor är betydligt svårare. Visa hur man i dessa fall kan släcka samtliga lampor.

4022. Bestäm det bästa närmevärdet med n siffror, $n = 1, 2, \ldots, 8$, till den största roten till ekvationen

$$3^x - x^3 - 0,538 = 0.$$

4023. Mellan två färjelägen, Färösund och Sjövik, går tre färjor: Alba, Bore och Cesar. Bore avgår från Färösund samtidigt som Cesar lämnar Sjövik och en halvtimme senare avgår Alba från Färösund. Efter ytterligare en timme kommer Alba ifatt Bore samtidigt som de båda fartygen möter Cesar. Alba och Bore fortsätter mot Sjövik där de gör var sitt uppehåll på en timme innan de vänder tillbaka. Alba och Cesar anländer till Färösund samtidigt. Hur mycket senare når Bore Färösund?

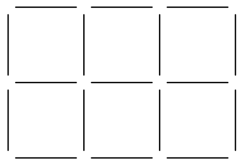
4024. a) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen

$$a^3 + b^3 = 9.$$

b) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen

$$35x^3 + 66x^2y + 42xy^2 + 9y^3 = 9.$$

4025. Katrina har ett stort antal tändstickor av vilka hon gör en rektangel uppdelad i delrutor. I figuren visas en sådan tändsticksfigur med två rader och tre kolumner bildad av 17 tändstickor. När Katrina med stor möda har placerat sina stickor kommer lillasyster Iva och förstör den vackra figuren. När Katrina ska rekonstruera figuren finner hon att hon har glömt hur många rader och kolumner med smårutor som ingick i figuren.



Hon ber nu om hjälp. Hur många rader och kolumner bestod figuren av om det totala antalet tändstickor är 161?

4026. I triangeln ABC dras transversalen DE parallellt med sidan BC genom den inskrivna cirkelns medelpunkt. Punkten D ligger på sidan AB och punkten E på sidan AC. Visa att $|DB| + |EC| = |DE|$.

4027. I ett travlopp deltar endast tre hästar, Attac, Bimbo och Cynthia. Följande gäller:

1) Oddsen är 3 mot 2 att Attac kommer före Bimbo.
2) Givet att Attac kommer före Bimbo är det samma odds för att Attac vinner som att hästen inte vinner.
3) Oddsen är 3 mot 2 för att Attac kommer på andra plats.

Vad är oddsen för att Cynthia kommer före Attac?
(*Anm.* Att oddsen för en händelse är a mot b kan vi tolka som att den uppskattade sannolikheten för händelsen är $\frac{a}{a+b}$.)

4028. För de positiva heltalen N och n gäller det att

a) n är ensiffrigt,
b) N och n har tillsammans 21 siffror,
c) nämnda 21 siffror har den reducerade siffersumman 1.

Med den reducerade siffersumman menar vi här att om siffersumman har mer än en siffra så summerar vi siffrorna i siffersumman och upprepar proceduren tills en siffra återstår. Exempelvis har talet 375, med siffersumman 15, den reducerade siffersumman $1 + 5 = 6$.

Vilka värden på n är möjliga?

4029. Låt A, B, C, D vara fyra hörn i följd i en regelbunden månghörning. Det gäller att

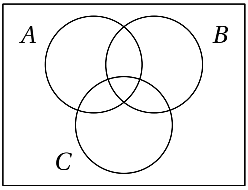
$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$

Bestäm antalet hörn i månghörningen.

Andra häftet

4030. Går det att skriva talet 2002 som respektive $x^2+y^2+z^2$, $x^2+y^2-z^2$, $x^2-y^2-z^2$, där x, y, z är naturliga tal ≥ 1? Ange det (eller de) av fallen som fungerar.

4031. Vidstående figur visar hur man med ett s k Venndiagram kan illustrera hur individerna i en population klassificeras efter tre egenskaper, A, B, C. Vi har $2^3 = 8$ fält motsvarande de möjliga kombinationerna av egenskaper.



Om vi ska göra samma sak med fyra egenskaper, A, B, C och D, blir det knepigare. I detta fall har vi $2^4 = 16$ möjliga kombinationer. Låt oss konstruera ett speciellt Venndiagram enligt följande regler. På ett rutnät av storleken 4×4 rutor placerar vi ut fyra lika stora rektanglar, här betecknade A, B, C och D. Följande krav ska vara uppfyllda:

En av rutorna ska inte täckas av någon rektangel alls;
en av rutorna ska täckas av alla fyra rektanglarna;
en av rutorna ska täckas av rektanglarna A, B och C, men inte av D;
en av rutorna ska täckas av rektanglarna A, B och D, men inte av C, osv så att alla kombinationer av täckningar av de fyra rektanglarna förekommer över de 16 rutorna.

Vilken storlek ska rektanglarna ha och hur ska de placeras för att uppfylla kraven?

4032. Under en matematiklektion på en gymnasieskola får eleverna följande uppgift:

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{y} = 16 \\ 2y+\sqrt{x} = 27 \end{cases}$$

Några av eleverna lyckas efter en stunds funderande visa att x-lösningen är en rot till en viss fjärdegradsekvation och undrar därför om det inte finns någon enklare metod. Deras lärare ställer då följande frågor till eleverna för att hjälpa dem på traven:

Hur stort kan x vara som mest och hur stort kan y vara? Hur litet kan sedan x vara och hur litet kan y vara? Hur kan man sedan fortsätta?

Hur hade läraren tänkt sig att man skulle kunna lösa problemet? Vilken är den exakta lösningen?

4033. Mark och Frank genomför ett spel med ett stort antal enkronor. Först bygger de varsin stapel av mynten. Betrakta det översta myntet i varje stapel. Följande regler gäller:

(i) Om det ena myntet visar krona och det andra klave får Mark 5 kronor av Frank;
(ii) om båda mynten visar krona får Frank 9 kronor av Mark;
(iii) om båda mynten visar klave får Frank 1 krona av Mark.

Därefter läggs de översta mynten åt sidan och spelarna fortsätter på samma sätt med nästa par av mynt. Kan någon av spelarna vara säker på att vinna i det långa loppet?

Vi kan notera att om Mark lägger alla sina mynt med krona upp och Frank också lägger sina mynt på samma sätt vinner Frank 9 kronor i varje omgång. Detta vill förstås Mark undvika.

Om, å andra sidan, alla Franks mynt visar klave och alla Marks krona (eller omvänt) vinner Mark alltid 5 kronor. detta vill förstås Frank undvika. Hur ska spelarna agera? Vi antar att spelarna arrangerar sina staplar oberoende av varandra.

4034. a) Betrakta sviter av siffror med enbart 0:or och 1:or. Exempelvis finns det 8 olika sviter av längd 3: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. Hur många olika sviter finns det allmänt av längd n för $n = 1, 2, 3, \ldots$?

b) Vi bildar rektangelformade brickor på vilka vi ritar upp n kvadratiska rutor i rad. Vi målar vissa rutor svarta och resten vita. Ange en formel som anger antalet olika färgläggningar av brickor av längd n för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Observera att vi inte utan vidare kan använda resultatet i a). Om sviten 001 motsvarar *VVS* på en bricka med 3 rutor, så kan samma bricka (den kan ju vridas) också motsvaras av sviten 100. Analogt kan sviterna 011 och 110 användas för att beskriva färgläggningen *VSS*. Med brickor av längd 3 har vi därför 6 färgläggningar.

4035. A och B spelar följande nimliknande spel. De båda spelarna drar omväxlande stickor ur en hög med 14 stickor. Varje spelare som står på tur måste dra minst en sticka, men får dra högst fem stickor. Det är inte tillåtet att dra samma antal stickor som den närmast föregående spelaren. Om A börjar med att dra fem stickor får B

alltså inte dra fem stickor i nästa dragning. Den spelare vinner som drar den sista stickan i högen. Antag att A börjar. Finns det någon vinnande strategi för A?

4036. Per har en del tynne trestenger som alle er like lange. Lengden er et heltall $h > 2$. På hver stang er avmerket to heltallslengder x og y, $0 < x < y < h$ fra samme ende. Videre skal merkingen av alle stengene samlet vare slik at man får alle kombinasjoner av x og y, men hver kombinasjon bare en gang.

Hvor mange stenger a trenger han til dette uttryk ved h?

Per sager av hver stang i de to merkene. Hver gang undersøker han om de tre stykkene han får kan danne en trekant. Finn antall trekanter b uttrykt ved h.

Finn kvotienten b/a uttrykt ved h. Finn til slutt grensverdien for kvotienten b/a når h är et meget stort heltall.

4037. Triangeln ABC har rät vinkel vid B. Låt D, E och F vara punkter på sidorna AB, AC, BC respektive sådana att D, E, F och B utgör hörn i en kvadrat. Vi drar en linje genom punkterna D och C. Den skär kvadratsidan EF i punkten P. Därefter drar vi en linje genom B och P. Den skär hypotenusan AC i punkten G. Man vet att avståndet mellan A och G är dubbelt så stort som avståndet mellan G och C. Hur förhåller sig avståndet mellan B och P till avståndet mellan P och G?

4038. En cirkel skär parabeln $y = x^2$ i punkterna $(a; a^2)$ och $(b; b^2)$ samt tangerar parabeln i punkten $(b; b^2)$. Visa att $c = -(a+b)/2$.

4039. Funktionen $p(x)$ är definierad för alla positiva heltal och uppfyller $p(1) = 100$ samt $p(1) + p(2) + \cdots + p(n) = n^2 \cdot p(n)$ för $n = 1, 2, \ldots$. Beräkna värdet av $p(100)$.

Tredje häftet

4040. Alexander den store kom en gång i ett förtroligt samtal med filosofen Kallisthenes att tala om sin ålder. Han yttrade därvid: Jag är två år äldre än Efestion; Klytus är lika gammal som jag och Efestion tillsammans och dessutom fyra år. Summan av våra tre åldrar utgör 96 år eller lika många år som Din far lär ha levat. Huru gamla voro alltså Alexander, Efestion och Klytus?

4041. Systrarna Ada, Beda, Cia och Disa är lika som bär. De har flera speciella egenheter. Ada och Disa talar alltid sanning, medan Beda och Cia ständigt ljuger. Ada och Beda är matematiklärare; Cia och Disa är bankanställda. (Man kan ana att det innebär vissa svårigheter för Beda och Cia att utöva sina yrken.) Ada och Cia är hängivna golfspelare, medan Beda och Disa är överens om att golf är den fånigaste sport som finns.

a) Jag träffade en av systrarna häromdagen och undrade om det var Ada, Beda, Cia eller Disa och tänkte därför fråga henne om namnet. Men så insåg jag att jag inte kunde lita på svaret. Efter en stunds funderande kom jag på hur jag skulle göra. Jag ställde två frågor, som man i båda fallen kunde besvara med ja eller nej, och fick på så sätt veta vem av systrarna jag hade träffat. Vilka frågor ställde jag?

b) Dagen efter träffade jag på nytt en av systrarna och hoppades på att det var en av matematiklärarna (jag ville ha hjälp med formuleringen av denna uppgift). Denna gång ställde jag en enda fråga som man kunde besvara med ja eller nej och fick då veta om det var en lärare eller inte som jag hade träffat. Vilken fråga ställde jag?

4042. Låt (a,b) betyda $10a+b$. Bestäm $x+y$, om x och y är heltal och

$$\begin{cases} (a,b)^2+(a,c)^2 = 1+x^2 \\ (a,b)^2+(c,a)^2 = 1+y^2 \end{cases}$$

a) när a, b och c är olika siffror;
b) när a och b tillåts vara lika.

4043. Trekanter, som er likebente eller likesidet og der alle sidene er heltall, kalles her enkle trekanter. Finn en metode till å bestemme antallet av enkle trekanter som har en gitt omkrets. Bestem som eksempel antallet enkle trekanter som har omkretsen 2001.

4044. De positiva heltalen kan ordnas på följande sätt:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 3 & & 5 & & & \\ & & 7 & & 9 & & 11 & & \\ & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\ - & - & - & - & - & - & - & - & \text{osv} \end{array}$$

a) Visa att radsumman i den n:te raden är n^3.
b) Använd resultatet i a) till att ge ett enkelt uttryck för summan $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

4045. På Stora Torget i Uppsala står varje lördag en lottförsäljare. Till en början har han alltid en enda vinstlott och tio nitlotter i lottskålen. Kundena får dra en lott i taget och varje gång som en nitlott dras (som kunden förstås behåller) lägger försäljaren ytterligare två nitlotter i lottskålen (det finns ett stort lager med nitlotter). Om någon lyckas dra vinstlotten avbryts spelet och försäljaren går hem. Vad är sannolikheten att spelet avbryts efter högst 100 försålda lotter?

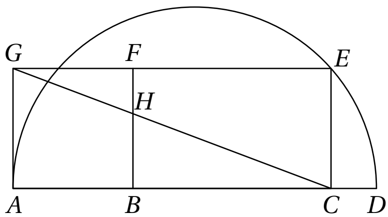
4046. Bestäm det minsta respektive det största möjliga värdet av uttrycket $a^2 + ab - b^2$ om vi endast vet att a och b är reella tal som uppfyller olikheterna $-3 \le a \le 2$ och $-3 \le b \le 2$.

4047. I triangeln ABC är D och E punkter på AB respektive AC. Transversalen DE avskiljer en topptriangel ADE vars bas inte nödvändigtvis är parallell med sidan BC, sådan att arean och omkretsen är resp 1/9 och 1/4 av arean och omkretsen för triangeln ABC. Vilka möjliga värden kan kvoten $|BC|/|DE|$ anta?

4048. De reella talen a, b, c, d uppfyller $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$. Visa olikheten

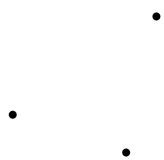
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \le \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

4049. En halvcirkel är uppritad som figuren visar. Vi bildar rektangeln $ACEG$ så att C ligger på diametern AD och E på halvcirkelbågen. Sträckan CD förutsätts vara kortare än sträckan AC. Vi avsätter punkten B på rektangelsidan AC och punkten F på sidan EG så att $ABFG$ utgör en kvadrat. Rektangeldiagonalen CG skär kvadratsidan BF i punkten H. Visa att sträckorna CD och FH är lika långa.



Fjärde häftet

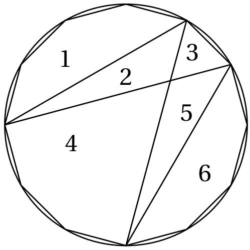
4050. Lille Vincent tycker om att rita geometriska figurer. Han sitter vid trädgårdsbordet och ritar en triangel på ett papper och markerar tydligt sidornas mittpunkter. Plötsligt kommer ett våldsamt skyfall och Vincent tar skydd inomhus. När han återvänder har regnet sköljt bort det mesta som han har ritat. Det enda som han kan skönja är de tre punkter som markerar sidornas mittpunkter (se figuren). När papperet har torkat ritar Vincent upp exakt samma triangel som han hade från början. Hur åstadkommer han detta?



4051. Tre på varandra följande femsiffriga tal är i tur och ordning delbara med resp 22, 23 och 24. Ett av talen slutar på två nollor. Vilka är talen?

4052. Anna och Bo ägnade sig åt löpträning på Studenternas Idrottsplats häromkvällen. De startade samtidigt från samma punkt på löparbanan, men åt olika håll, och de möttes efter 40 s. När Ann hade sprungit tre varv stannade hon för att knyta skosnöret. Hennes tränare konstaterade att uppehållet tog exakt 18 s. Just när hon började springa igen mötte hon Bo, som då hade avverkat sitt fjärde varv. När Bo hade sprungit ytterligare 4 varv stannade han för att invänta Ann. Hur länge fick han vänta?

4053. Tim har läst att det är omöjligt att genomföra cirkelns kvadratur med passare och linjal, dvs att bilda en kvadrat med exakt samma area som en given cirkel. Däremot går det att hitta mer eller mindre lyckade approximationer.



Tim prövar följande metod. Han ritar upp en cirkel på en pappskiva. Av cirkeln klipper han sedan till en regelbunden tolvhörning. Ange tolvhörningens area i % av cirkelns area. Därefter klipper han sönder tolvhörningen i sex delar, numrerade från 1 till 6 som figuren visar, där varje del utgörs av en månghörning. Bestäm vinklarna i dessa månghörningar. Ställ slutligen samman de sex bitarna till en kvadrat.

4054. På Tummelviksskolans högstadium finns det åtta parallellklasser i årskurs 9. Antalet elever i klasserna utgör åtta olika heltal. Varje vecka åker en av lärarna på kurs i kompetensutveckling. I stället för att skaffa en vikarie fördelar man den berörde lärarens elever över de sju övriga klasserna. Oavsett vilken klass som drabbas är det alltid möjligt att fördela eleverna så att det blir exakt samma antal i var och en av de sju klasserna (ingen elev behöver lämna sin klass om den egna läraren finns på plats). Dessa uppgifter räcker nu inte till att fastställa antalet elever i de åtta (ursprungliga) klasserna, inte ens att ange antalet i den största klassen, men däremot är det möjligt att bestämma det minsta möjliga antalet elever i den största klassen. Vilket är detta antal?

I årskurs 8 finns det nio parallellklasser. Antalet elever i klasserna utgör nio olika heltal. Här är det vissa veckor en lärare, andra veckor två lärare, som är på kurs. I båda fallen kan de övergivna eleverna fördelas på övriga klasser på nämnt sätt. Vad är nu det minsta möjliga antalet elever i den största av de nio klasserna?

4055. Här kommer en klassiker. En mindre landsortsförsamling hade en kantor som var mycket road av matematiska problem. En söndag var vid gudstjänsten närvarande, förutom prästen och kantorn, endast tre församlingsbor. Efter gudstjänstens slut träffades prästen och kantorn i sakristian varvid prästen, som kände till kantorns intresse, gav honom följande problem

”Produkten av de tre besökarnas åldrar (i hela år) är 2 450 och deras sammanlagda ålder är dubbla din ålder. Kan du då tala om för mig hur gamla de tre besökarna är?”

Efter en stunds funderande med hjälp av papper och penna säger kantorn att det problemet kan jag inte klara. Prästen svarade då: ”Men jag var äldst i kyrkan idag.” Kantorn utbrister då genast:”Ja då kan jag lösa problemet!”

Vår fråga till läsarna är: Hur gammal är prästen?

4056. Ally och Yrsa spelar ett spel som handlar om att förutsäga sviter av *Krona* och *Klave* vid upprepade kast med ett symmetriskt mynt. Låt oss beteckna *Krona* med K och *Klave* med L. Spelet går till på följande sätt: Först väljer Ally en svit bestående av tre utfall, t ex KKK. Därefter väljer Yrsa en svit, som dock måste avvika från Allys. Antag att Yrsa väljer LKK. Myntet kastas sedan upprepade gånger tills någon av de valda sviterna dyker upp. Den vinner vars svit först uppträder. Om myntet ger utfallen L, K, L, K, K vinner Yrsa eftersom sviten LKK fullbordats i följd vid kasten 3, 4 och 5, medan sviten KKK ännu inte har bildats.

a) Visa att med de nämnda valen kommer Yrsa att vinna i 7 fall av 8.

b) Antag att Ally väljer sviten KKL. Vilken svit bör Yrsa lämpligen välja för att vara säker på att vinna i längden? Ange vinstsannolikheten för Yrsa.

c) Antag att Ally slumpar fram sviten KLL och Yrsa svarar med sviten KKL. Kommer Yrsa att vara säker på att vinna i längden? Vad blir hennes vinstsannolikhet?

d) Antag att Ally väljer en svit genom att först kasta myntet tre gånger samt att Yrsa sedan väljer en egen svit (Yrsa får varje gång veta vilken svit som slumpen har valt åt Ally, så hon kan svara på bästa sätt). I hur stor andel av spelen kommer Yrsa att avgå med segern om de genomför ett stort antal spel?

4057. Problem som förekommer i den internationella matematikolympiaden är i regel synnerligen intrikata. Följande uppgift, som gavs 1963, är dock någorlunda mänsklig.

Fem studenter A, B, C, D och E deltog i en tävling. En förutsägelse var att studenterna skulle placera sig i nämnd ordning med A först och E sist. Denna förutsägelse var mycket dålig; ingen student fick sin förutsagda placering, och av de möjliga par av studenter som hade förutsagts bli placerade intill varandra var det inget par för vilket detta skedde. En annan förutsägelse var att studenterna i stället skulle placera sig i ordningen D, A, E, C, B. Denna förutsägelse var klart bättre; två av studentena fick sin förutsagda placering, och två disjunkta par (dvs ingen student förekom i båda paren), som hade förutsagts hamna bredvid varandra i placeringslistan, gjorde verkligen detta. Bestäm den faktiska placeringen för var och en av de fem studenterna.

4058. För de n heltalen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gäller

1) $-1 \le a_i \le 2$,
2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 9$,
3) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 29$.

Bestäm det minsta och det största möjliga värdet av summan $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$.

4059. Enligt *Fermats lilla sats* är $a^p - 1$ delbart med p om p är ett primtal och om det positiva heltalet a inte är delbart med p. Vi ska här betrakta ett liknande uttryck $a^{p-2} + a/2$. Frågan är: För vilka primtal $p \ge 3$ och positiva heltal $a < p$ är uttrycket delbart med p? Låt oss i första hand begränsa oss till primtal som är ≤ 100. Försök att hitta ett gemensamt mönster hos de möjliga primtalen.