Årgång 83, 2000

Första häftet

3980. Så här i början på seklet stöter vi ofta på intressanta sifferkombinationer om datum markeras på svenskt vis i ordning år-månad-dag. Två dagar före tjugondedag Knut hade vi följden 000111.

a) Hur många olika ordningar finns det av denna följd? Hur många av dessa är tänkbara som datum i det förflutna eller i en framtid?

b) På många håll i vår omvärld är det vanligare att ange datum i ordningen dag-månad-år. Om man inte är medveten om vilken konvention som råder skulle missförstånd kunna uppstå. I regel är det inga problem: 991224 kan inte misstolkas eftersom 99 december inte existerar, men hur blir det framöver? När inträffar det nästa gång att ett datum skrivet enligt en konvention också är ett datum i den omvända?

3981. En diamant har formen av en polyeder där varje yta utgörs av en triangel. Visa att summan av antalet ytor och antalet kantlinjer är jämnt delbar med 5.

3982. Lös ekvationen

$$x^2 + y^2 = 3468465$$

i positiva heltal x och y.

3983. Ett försök utförs ett visst antal gånger. Andelen lyckade försök av dessa är, korrekt avrundat, 0,447. Sedan utför man ytterligare två försök som bägge är lyckade. Andelen lyckade försök, korrekt avrundat, stiger då till 0,469. Bestäm totala antalet försök.

3984. Antalet olika dominobrickor med upp till 6 prickar är $7+6+\cdots+1 = 28$ (7 brickor har minst en ”nolla”, utöver dessa brickor har 6 brickor minst en ”etta” , osv). Låt oss i stället bilda s k triominobrickor bestående av tre fält i rad med upp till 6 prickar på varje fält.

a) Hur måna olika triominobrickor finns det?

b) Vi ska här i stället ägna oss åt ett läggspel där antalet prickar på brickorna inte har någon betydelse utan endast formen. Antag att vi har 21 lika stora triominobrickor och ett schackbräde sådant att varje bricka täcker exakt tre rutor. Dessutom har vi en enkelbricka som täcker precis en ruta. Visa att det är möjligt att med nämnda 22 brickor täcka hela schackbrädet, men att enkelbrickan inte kan placeras var som helst. På vilka rutor får enkelbrickan ligga för att uppgiften ska vara lösbar?

3985. I den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ stryks alla termer som har oändlig decimalbråksutveckling. Exempelvis stryks $1/3 = 0,333\ldots$, men inte $1/4 = 0,25$ och $1/25 = 0,04$. Visa att summan av de återstående termerna är konvergent samt bestäm summan.

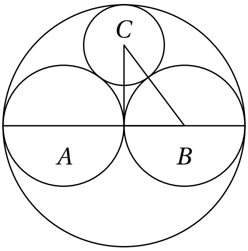
3986. Lös ekvationen

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}$$

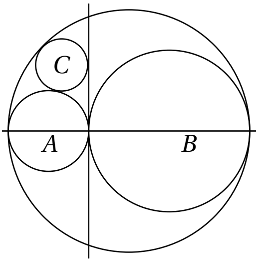
där vi i båda leden har oändliga uttryck.

3987. Betrakta talföljden 2, 6, 13, 23, 36, 52, 71, 93, ... Hur är talföljden uppbyggd? Ange den n:e termen som funktion av n. Ange också summan av de n första termerna som funktion av n.

3988. a) Cirklarna A och B har båda radien r och är inskrivna i en cirkel med radien $2r$. Cirkeln C tangerar A och B utvändigt och den större cirkeln invändigt. Låt O vara den större cirkelns medelpunkt, O_B medelpunkten till cirkeln B och O_C medelpunkten till cirkeln C. Visa att triangeln O_COO_B är en egyptisk triangel, dvs dess sidor förhåller sig som $3:4:5$.



Figur 1a.



Figur 1b.

b) Här kommer en variant. Cirklarna A och B med radierna a resp b tangerar varandra utvändigt. De är inskrivna i en större cirkel med radien $a+b$. Genom tangeringspunkten mellan A och B drar vi den korda som utgör den gemensamma tangenten. Vi placerar en tredje cirkel C, med radien c, i den större cirkeln på sådant sätt att C tangerar såväl cirkeln A (utvändigt) som den nämnda kordan. Visa att radierna uppfyller sambandet $c(a+b) = ab$. Visa att sambandet fortfarande gäller om C i stället tangerar B och kordan.

3989. Beräkna för positiva heltal n gränsvärdena (kräver eventuellt kunskaper utöver gymnasieskolans matematikkurs på NT-programmet)

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^n-x^{n-1}}\right)$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^n-x^{n-2}}\right)$.

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+x^{n-2}}-\sqrt[n]{x^n-x^{n-2}}\right)$.

Andra häftet

3990. Mike bor i York och tränar boxning i Cork, medan Evander bor i Cork och tränar boxning i York. En kväll lämnar de sina resp träningslokaler samtidigt och vandrar hemåt, var och en med konstant hastighet. När de möts påpekar Evander att han gått en km mer än Mike. Denna skymf kan naturligtvis inte Mike tåla och det blir en vild slagväxling. Halvt sönderslagna fortsätter de båda boxarna hemåt, men nu med halva den ursprungliga hastigheten. Efter 32 minuter är Evander hemma i Cork, medan Mike behöver 72 minuter för att ta sig hem till York. Hur långt är det mellan York och Cork?

3991. För att dela upp x^4-1 i faktorer, där varje faktor är ett andragradspolynom med reella koefficienter kan man använda konjugatregeln och få faktorerna x^2-1 och x^2+1. För att faktorisera x^4+1 kan man också använda konjugatregeln, men då måste x^2 i faktoriseringen ovan bytas ut mot ett annat andragradspolynom $a(x)$, medan konstanten 1 måste ersättas med ett förstagradspolynom $b(x)$. Hur ska polynomen $a(x)$ och $b(x)$ väljas?

3992. Om de 17 resenärerna under en bussresa till Paris vet man bl a att åtta kommer från Småland och att fyra tycker om att simma. Vidare vet man

1) alla småländska simmare också ägnar sig åt orientering;
2) ingen av männen orienterar;
3) alla smålänningar ägnar sig åt åtminstone en av de båda sporterna;
4) ingen av de icke-simmande kvinnorna kommer från Småland.

Vi vill nu veta: Hur många smålänningar är det som *inte* orienterar? Är det någon eller några av nämnda uppgifter som är överflödiga?

3993. Lös ekvationen

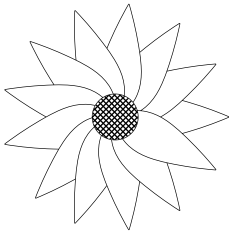
$$\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{x-1}}.$$

3994. Ett Fermattal har formen $2^{2^m}+1$ för $m\geq 0$, medan ett triangeltal har formen $n(n+1)/2$ för $n\geq 1$. Ange alla Fermattal som också är triangeltal.

3995. Tre naturliga tal är sådana att om man *minskar* dem med resp 1, 3 och 30 får man en aritmetisk talföljd. Om man i stället *ökar* talen med resp 1, 3 och 30 får man en geometrisk talföljd. Vilka är de tre talen?

Anm. I en aritmetisk talföljd är differensen mellan successiva tal konstant, medan i en geometrisk talföljd är kvoten mellan successiva tal konstant.

3996. Sam Loyd, den kände amerikanske problemmakaren, är upphovsmannen till följande uppgift som går under namnet *The Daisy Puzzle* (tusensköneproblemet). Två spelare, A och B, plockar omväxlande kronblad från blomman. Varje gång måste man plocka ett eller två kronblad. Den vinner som tar det sista kronbladet. Antag att spelare A börjar. Finns det någon vinnade strategi för någon av spelarna? Om tusenskönan set ut som på bilden har vi alltså 13 kronblad. Blir det någon skillnad om blomman i stället har 14 kronblad?



3997. a) I *kvadraten* $ABCD$ är M_1 mittpunkten på sidan AB och M_2 mittpunkten på sidan BC. Låt P vara skärningspunkten mellan sträckorna CM_1 och DM_2. Visa att längden av sträckan AP är lika med kvadratens sida.

b) I *parallellogrammen* $ABCD$ är M_1 mittpunkten på sidan AB och M_2 mittpunkten på sidan BC. Drag sträckorna CM_1, AM_2 och DM_2. Den förstnämnda skär de båda senare i punkterna P och Q resp. Hur stor del av sträckan CM_1 ligger mellan P och Q?

3998. Maria ritar upp en tabell med två kolumner och femton rader. I de trettio rutorna placerar hon talen 1, 2 och 3 på sådant sätt att varje kolumn innehåller fem 1:or, fem 2:or och fem 3:or, men i helt slumpmässig ordning. Maria funderar nu över följande problem:

a) I varje rad står två siffror. Vad är det förväntade antalet rader (dvs det genomsnittliga antalet rader vid ett obegränsat antal utplaceringar) med lika siffror?

b) Antag att man i varje rad bildar differensen mellan de båda talen, kvadrerar denna och sedan bildar summan av alla kvadrater. Vad blir då den förväntade summan?

c) Antag att man i varje rad i stället bildar summan av de båda talen, kvadrerar denna och sedan bildar summan av alla kvadrater. Vad blir den förväntade summan?

3999. Man danner en kvotient der dividenden er produktet av bisektrisene i en trekant, och divisorn er produktet av den halve omkrets og arealet till trekanten. Vis at kvotienten er mindre eller lik 1.

(*Anm.* I svenska läroböcker har man numera ersatt begreppen dividend och divisor med resp täljare och nämnare.)

Tredje häftet

4000. I denna uppgift gäller det att placera ut siffror på markerade ställen så att alla påståendena stämmer:

Siffran 4 förekommer … gånger i dessa rader, rad 1 ej inräknad.
Siffran 3 förekommer … gånger i dessa rader, rad 2 ej inräknad.
Siffran 2 förekommer … gånger i dessa rader, rad 3 ej inräknad.
Siffran 1 förekommer … gånger i dessa rader, rad 4 ej inräknad.

4001. På en förskola har hälften av barnen röda tröjor och hälften av barnen gröna tröjor. Antalet barn med vita byxor är dubbelt så stort som antalet barn med svarta byxor. Inga andra byxfärger förekommer. Barnen är indelade i två grupper. I den ena gruppen har 14 av barnen röda tröjor medan 7 har svarta byxor. I den andra gruppen har 12 av barnen gröna tröjor medan 11 av barnen har vita byxor. Hur många barn är det i varje grupp?

4002. Postiljonen D Amour upptäcker när han kommit hem från sin brevbärarrunda att han glömt att dela ut fem brev, som skulle ha lagts i brevlådorna vid Lilla Torget. Hen skickar därför sin icke läskunnige son Henri och instruerar denne noga hur de fem breven ska placeras. När Henri kommer till torget har han helt glömt vad fadern har sagt och tar slumpen til hjälp. För vart och ett av breven väljer han med hjälp av en tärning en av de tre brevlådor som finns, så att sannolikheten är $1/3$ för var och en. Eftersom fadern påpekat att ingen brevlåda skulle vara tom får han upprepa proceduren tills alla tre lådorna innehåller åtminstone något brev. Bestäm sannolikheten för att vart och ett av breven hamnar i rätt låda.

4003. Sommaren 2001 tänker Göran och Björn ställa upp i Safarirallyt. De kör en specialutrustad, trimmad standardbil. Paret räknar med att avverka 1 800 mil och använder en däckstyp som beräknas hålla i 800 mil i området. För att hålla kostnaderna nere tar de med minsta antal möjliga däck på resan. Hur många däck behövs och hur ska dessa på bästa sätt utnyttjas?

4004. Visa olikheten

$$4\left(a^3+b^3\right) \geq \left(a+b\right)^3$$

för alla reella positiva tal a och b.

4005. Här kommer ett gammalt kinesiskt problem. Sjutton pirater hade kommit över ett stort antal guldmynt.Vid ett försök att fördela dessa jämnt visade sig tre bli över. Vid diskussion om vem som skulle ha dessa uppstod bråk varvid en av piraterna dödades. Vid en ny delning mellan de överlevande blev 10 mynt över. Återigen blev det bråk och än en gång var det en pirat som fick plikta med livet. Den tredje delningen gick dock jämnt ut. Vilket är det minsta möjliga antalet mynt som piraterna hade att dela på?

4006. I triangeln ABC träffar höjden från A sidan BC i punkten D. En cirkel passerar genom D och mittpunkterna på sidorna AB och AC, samt skär höjden AD i punkten E. Beräkna $\frac{|AB|}{|AC|}$ då $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{3}$.

4007. Av nio kulor väger åtta lika mycket, medan den nionde är lättare än de övriga. För övrigt ser kulorna likadana ut. Till vårt förfogande finns två balansvågar. Den ena är tillräckligt känslig för att man med den ska kunna avgöra vilken kula som är lättare än de övriga. Den andra är däremot synnerligen okänslig och ger inget utslag med samma antal kulor på vågskålarna oavsett om den lättare kulan finns med eller inte. Tyvärr vet man inte vilken våg som är användbar och vilken våg som inte ger utslag förrän man har lyckats få ett utslag på den korrekta vågen. Trots detta ska det vara möjligt att hitta en vägningsstrategi som gör att man hittar kulan med avvikande vikt på högst tre vägningar. Ange en sådan strategi!

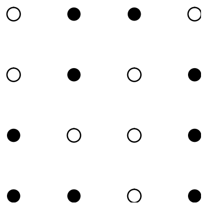
4008. Bestäm de tre sista siffrorna i talet 3^{4798}.

4009. Per står vid punkten O på ena stranden av en 12 meter bred å och ska simma rakt över till A på den andra sidan ån. Han kan simma med farten $2,2$ m/s och vattnet i ån rinner med farten $2,0$ m/s. Hur lång tid tar det för honom att komma över ån, om han hela tiden siktar mot punkten A? Hur ska han simma för att så snabbt som möjligt komma över till punkten A?

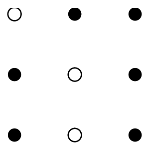
Fjärde häftet

4010. I en idrottsförening delas vid varje årsmöte ut träningsbidrag till de 23 flitigaste juniorerna. Totalt fördelas 15 000 kr. Alla pojkar får inbördes lika mycket, detsamma gäller flickorna, men flickorna får 350 kr mer än pojkarna. Hur mycket får varje flicka och varje pojke i träningsbidrag?

4011. På en platta är två uppsättningar glödlampor monterade i kvadratiska formationer som figurerna 1 och 2 visar. En ofylld ring markerar en tänd lampa, en fylld ring en släckt lampa.



Figur 1.



Figur 2.

a) Betrakta figur 1. Genom att koppla in en rad eller en kolumn eller en av de båda diagonalerna kan man förändra lampornas ”status” så att de lampor som är släckta tänds, medan de lampor som är tända släcks. Inga andra möjligheter att tända eller släcka lampor finns. Är det möjligt att via en följd av inkopplingar av fyra lampor i taget åstadkomma att samtliga lampor i uppsättningen samtidigt är tända?

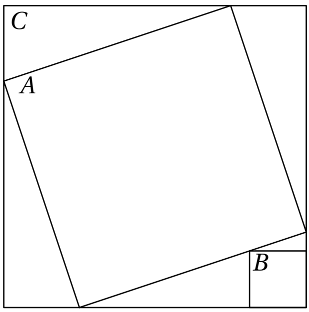
b) Betrakta figur 2. Samma fråga, men nu kopplar man förstås in tre lampor i en rad, kolumn eller diagonal i taget.

4012. Bestäm alla par av primtalstvillingar, p och q sådana att $pq-2$ också är ett primtal.

4013. Lös ekvationen

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x}=\frac{10x}{3}-\frac{40}{x}.$$

4014. Kvadraterna A, och B är placerade inuti en tredje kvadrat C, som vidstående figur visar. Kvadraten A har således sina hörn på C:s sidor, medan B har två sidor längs C:s sidor samt ett hörn på en av A:s sidor. Låt sidorna hos A, B, C vara resp a, b, c, där $b<a<c$. Visa att $a^2+2bc=c^2$ och ange de storleksintervall som är möjliga för a och b.



4015. I en bokklubb använder man sig av sjusiffriga medlemsnummer som också används som kodnummer vid beställning över nätet. För att minska risken för sammanblandning av kunder gäller att två nummer får ha högst fem siffror lika i de sju positionerna. Hur många sådana nummer kan ett sådant kodsystem maximalt innehålla? Ange ett sätt att bilda ett bilda ett kodsystem med maximalt antal nummer.

4016. I nedanstående schema har de rationella talen p/q tilldelats ordningsnummer (inom parentes). Vi ser att ordningsnumren följer en slinga diagonalvis, där diagonalerna varannan gång följs i "sydvästlig" riktning, varannan gång i "nordostlig" riktning. Vi bortser från att vissa av talen kan ha samma värde

		q = 1		2		3		4		5		6	
	1	1/1	(1)	1/2	(2)	1/3	(6)	1/4	(7)	1/5	(15)	1/6	(16)
	2	2/1	(3)	2/2	(5)	2/3	(8)	2/4	(14)	2/5	(17)		
p	3	3/1	(4)	3/2	(9)	3/3	(13)	3/4	(18)				
	4	4/1	(10)	4/2	(12)	4/3	(19)						
	5	5/1	(11)	5/2	(20)								
	6	6/1	(21)										

a) Ange det bråk som har ordningsnumret 175.
b) Ange en formel för ordningsnumret till bråket p/q.

4017. Bestäm de två heltal m och n, där $n \leq 150$, sådana att

$$\frac{59}{73} < \frac{m}{n} < \frac{38}{47}.$$

Finns det mer än en lösning för $n \leq 150$?

4018. En cirkel tangeras invändigt av en mindre cirkel i punkten A. Den större cirkeln har 50% större radie än den mindre. Kordan BC i den större cirkeln är samtidigt tangent till den mindre cirkeln och tangerar denna i punkten P.
a) Visa att sträckan AP är bisektris till vinkeln BAC.
b) Bestäm $\dfrac{|AB|}{|BP|}$.

4019. Beräkna värdet av uttrycket

$$2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + 1998\cdot 1999\cdot 2000}.$$

Generalisera resultatet till ett godtyckligt antal termer.