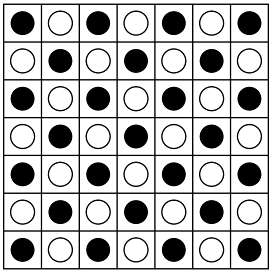
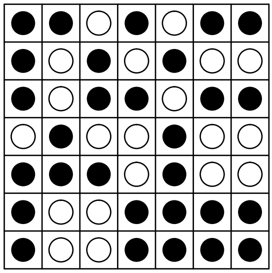
Årgång 78, 1995

Första häftet

3780. På varje ruta av ett ”schackbräde” med 7×7 rutor har man placerat en bricka som är svart på ena sidan och vit på den andra. Antag att brickorna har placerats ut som figurerna 1 och 2 visar. I båda fallen gäller det att med minsta möjliga antal drag vända brickor så att alla har samma färg uppåt, vit eller svart. Ett drag består i att vända alla brickorna i en rad eller en del av rad, vågrät eller lodrät. Kravet är här att de aktuella brickorna ska ligga i obruten följd med minst en bricka på en kantruta. Hur många drag behövs i de båda fallen?



Figur 1



Figur 2

3781. Tre MC-förare, Atle, Brynhild och Grane, gör varje dag en tur på motorvägen. Atles MC är snabbare än Brynhilds, som i sin tur är snabbare än Granes. De håller dag efter dag samma konstanta fart. I regel startar de vid skilda tidpunkter.

En dag körde B förbi G, fyra minuter senare körde A förbi G och ytterligare tre minuter senare körde A förbi B. Dagen därpå passerade A först B, sedan 6 minuter senare också G. Hur lång tid tog det därefter för B att hinna ikapp G?

3782. Vilket är det minsta naturliga tal som slutar på 38, är delbart med 38 och har siffersumman 38?

3783. I triangeln ABC är $|AB| = |AC| = 4|BC|$. D är en punkt på AC sådan att $\dfrac{|AD|}{|DC|} = \dfrac{8}{5}$. Visa att vinkeln CBD är exakt 3 gånger så stor som vinkeln ABD.

3784. Bilda den oändliga produkten av talen $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$, $k = 2, 3, 4, \ldots$. Visa att produkten konvergerar och bestäm dess värde.

3785. Låt $\circ$ vara en operation som av två heltal bildar ett nytt heltal. Antag att
$$a \circ (b + c) = (b \circ a) + (c \circ a)$$
gäller för alla a, b, c. De fyra räknesätten fungerar som vanligt.
a) Visa att $a \circ b = b \circ a$ för alla a och b.
b) Vad är $5 \circ 4$ om $2 \circ 3 = 12$?

3786. Studera $S(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ för heltal x.
a) Bestäm en funktion $a(x)$ sådan att
$$\big(a(x)\big)^2 \le S(x) \le \big(a(x) + 1\big)^2$$
för alla x.
b) För vilka värden på x är $S(x)$ kvadraten på ett heltal?

3787. I en ask finns det tre fack med ett mynt i varje. Man väljer först ett fack slumpmässigt, tar myntet ur detta och lägger det slumpmässigt i ett av de tre facken. Eventuellt lägger man alltså tillbaka det. Man upprepar denna procedur i ännu ett steg. (Om man då råkar på ett tomt fack gör man ingenting; om det finns flera mynt väljer man ett slumpmässigt.) Bestäm sannolikheten att det efter dessa två steg ligger ett mynt i varje fack.

3788. Man definierar en följd $a(1)$, $a(2)$, … med hjälp av rekursionsformeln
$$a(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{om } n > 100 \\ a(a(n + 11)) & \text{om } n \le 100. \end{cases}$$
a) Visa att $a(99) = 91$.
b) Visa att $a(k) = 91$ för alla $k \le 101$.

3789. Låt $n > 1$ vara ett givet udda heltal. Låt vidare $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ vara olika tal mellan 0 och $n - 1$, sådana att något av talen $2a_{k-1} - a_k$ och $2a_{k-1} + 1 - a_k$ är delbart med n för alla k, $1 \le k \le n - 1$.
a) Visa att $a_0 = 0$ eller $a_0 = n - 1$.
b) Visa att talen $2a_{n-1} - a_0$ och $2a_{n-1} + 1 - a_0$ *inte* är delbara med n.

Andra häftet

3790. Ett antal föremål har heltalsvikter som alla är olika. Den genomsnittliga vikten är 10 g. Plockar man bort de båda lättaste föremålen blir vikten av de övriga 79 g. Om man i stället plockar bort de båda tyngsta blir vikten av de resterande 59 g.

Hur många föremål rör det sig om och vad är deras sammanlagda vikt? Hur mycket väger var och en av de fyra lättaste vikterna?

3791. a) På en cirkelperifieri placerar vi 5 punkter på godtyckliga avstånd från varandra och numrerar dem medurs från 1 till 5. Vi bildar en femuddig stjärna genom att dra räta linjer mellan 1 och 3, 3 och 5 osv (varannan punkt överhoppas). Bestäm summan av de fem uddvinklarna.

b) Samma förutsättningar som i a) men med 7 punkter. Vad blir summan av uddvinklarna om 1 förenas med 3, 3 med 5 osv? Besvara samma fråga om 1 förenas med 4, 4 med 7 osv (två punkter överhoppas).

c) Vad blir uddvinkelsumman hos en stjärna bildad av 19 punkter så att 4 punkter alltid överhoppas (1 förenas med 6, 6 med 11 osv)?

3792. a) Låt T vara ett närmevärde till π med det antal decimaler som din miniräknare ger (förutsätts vara minst 8). Lös nedanstående ekvationer i tur och ordning. Om lösningen inte är ett heltal ska det avkortas nedåt till närmaste heltal. Med detta nya svar ska vi räkna ut högersidan i nästa ekvation på enklaste bråkform och som decimalbråk.

$$T = x; \tag{1}$$

$$T = x_1 + \frac{1}{y}; \tag{2}$$

$$T = x_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{z}} \quad \text{osv.} \tag{3}$$

Om vi startar med 3,14159 (vi nöjer oss med 5 decimaler i detta exempel) blir i (1) $x = 3$ som sätts in på platsen för x_1 i (2). Lösningen blir $y = 7$ som sätts in i stället för y_2 i (3). Vi får stadigt förbättrade approximationer till π; 3, 22/7, 333/106 osv.

Lägg till nya ekvationer enligt det givna mönstret och fortsätt tills du har uppnått 8 decimalers noggrannhet; ange närmevärdet till π på bråkform.

b) Sätt $T = \dfrac{3991}{1996}$ och lös ekvationerna (1)–[3) enligt ovan.

c) Antag att vi har ett godtyckligt positivt decimaltal som starttal. Vad händer om vi löser ekvationerna med den alternativa reglen att höja till närmaste heltal?

3793. När Arnold gick i gymnasiet sa klassens matematiklärare en dag:

– Idag ska vi titta på ett ekvationssystem av detta slag:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

– Var och en av er, fortsatte läraren, ska själv välja koefficienter – utan att avslöja sitt val för kamraterna. Men det finns vissa restriktioner.

– Det kunde man ha räknat ut, mumlade Arnold.

– Ni ska välja två multiplikationstabeller, den ena under 10, den andra över.

– Jaha, tänkte Arnold, 7 och 19 är självklara val för mig.

– Sen ska koefficienterna, fortsatte läraren, i den första ekvationen vara tre på varandra följande tal ur den första tabellen ...

... och koefficienterna i den andra ekvationen tre på varandra följande tal ur den andra tabellen, fyllde Arnold i.

– Javisst, och talen får väljas var som helst i tabellen.

– 21, 28, 35 i sjuans, tänkte Arnold, och 38, 59, 76 i nittons.

– Nu får ni lösa ert ekvationssystem, individuellt och utan att konferera med varandra.

När så alla var klara bad läraren klassen i korus säga lösningen till ekvationssystemet, varje elev sin egen förstås.

Hur lät det svar som klassen gav i korus och varför? Hur kan detta generaliseras?

3794. Vi har n olika tal givna. Av dessa bildar vi alla möjliga summor av två givna tal (samma tal får ingå i båda termerna). Om talen 3, 5, 7 är givna (vi valde här heltal för enkelhets skull) får vi summorna 6, 8, 10 $(= 3+7)$, 10 $(= 5+5)$, 12, 14. I detta fall får vi 5 *olika* summor.

Vad är minsta resp största möjliga antalet olika summor som kan bildas av de n talen?

3795. Visa olikheterna (som kanske har vissa gemensamma inslag)

a) $$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4,$$

om talen a och b är positiva;

b) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9,$$

om a, b, c är positiva tal med summan 1;

b) $$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$$

om a, b, c är positiva tal.

3796. Placera 3 ettor och 7 nollor i slumpmässig ordningsföljd på omkretsen på en cirkel. Bestäm sannolikheten att minst två ettor hamnar intill varandra utan någon nolla emellan.

3797. I en godtycklig triangel är radien till den inskrivna cirkeln r och till den omskrivna cirkeln R. Visa att $r \leq R/2$ genom att använda att cirkeln genom triangelsidorna mittpunkter har radien $R/2$ (visa detta) och sedan genomföra ett geometriskt resonemang.

3798. Låt r vara ett *udda* positivt heltal. Vi tänker oss en iterativ process startande med ett positivt heltal n, enligt följande:
(i) Om n är ett udda tal, ersätt n med $n + r$;
(ii) Om n är ett jämnt tal, ersätt n med $n/2$.
Visa att följande gäller: Oberoende av startvärdet n kommmer processen att så småningom leda till att en periodisk talföljd nås.

Exempel 1: $n = 5$, $r = 7$. Vi får $5 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 12$ osv. I detta fall är talföljden periodisk från starten.

Exempel 2: $n = 13$, $r = 9$ ger $13 \to 22 \to 11 \to 20 \to 10 \to 5 \to 14 \to 7 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 10 \to 5 \to 14$ osv. Här har vi ett ”skaft” bestående av fyra tal varefter talet 10 inleder en periodisk följd.

3799. Betrakta alla linjer som skär grafen till $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ i fyra skilda punkter.
a) Visa att det existerar linjer med nämnda egenskaper.
b) Låt x_1, x_2, x_3, x_4 beteckna de fyra punkternas x-koordinater. Visa att
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$
är oberoende av hur linjen dras, samt beräkna detta värde.

Tredje häftet

3800. Arvid startade bilen kl 15.45 för att som vanligt hämta Lydia på hennes arbete kl 16.00. Lydia hade dock fått sluta en timme tidigare och beslöt sig för att gå Arvid till mötes. När hon gått en halvtimme stannade hon för att invänta Arvid. På så sätt kom de hem 6 minuter tidigare än vanligt. Hur mydket tidigare hade de kommit hem om Lydia inte hade stannat utan fortsatt att gå tills hon mötte Arvid? Vi förutsätter att bådas hastigheter är konstanta och att ingen extratid åtgår för att vända bilen.

3801. Visa att
$$\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}\right\}^{m+n} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \cdot n^n}$$

gäller för alla positiva heltal m och n.

Exempelvis är

$$\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{9}{16}}+\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{7}{16}}\right\}^{16}=\frac{16^{16}}{7^7\cdot 9^9}.$$

3802. I Dagens Nyheter den 11 mars presenterade chefredaktören för Vi Tippa ett åttaraderssystem för fotbollstips:

1 1 x 2 1 x 2 1 1 1 x x 2 1 1 1

Ett åttaraderssystem ska bestå av 10 ogarderade matcher (ett tecken) och tre halvgarderade matcher (två tecken: 1x, x2 eller 12). P.g.a. ett typografiskt missöde blev inte systemet entydigt. Det åsyftade systemet skulle t.ex. kunna vara

1 1x 2 1 x2 1 1 1 x x2 1 1 1 eller
1 1 x 2 1x 2 1 1 1x x2 1 1 1.

a) Hur många system är möjliga?

b) Hur många enkelrader (ett tecken per match) måste man tippa för att vara säker på att alla rader i det åsyftade systemet finns med?

3803. Här kommer en klassiker.

En servettring bildas genom att man borrar ett cylindriskt hål centralt genom en sfär. Antag att hålet har längden h och att sfärens diameter överstiger h men för övrigt är ospecificerad. Vilken volym får servettringen?

3804. Betrakta summorna

$$u_n = 1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(n-2)(n-1)+n(n+1)$$

och

$$v_n = 2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+\cdots+(n-1)n, \quad n \text{ udda}, \geq 3.$$

Beräkna summorna

a) $u_n - v_n$,

b) $u_n + v_n$,

c) u_n.

Ledning: Eventuellt kan formlerna

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

och

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

komma till användning.

3805. Systrarna Annette, Cécile, Emilie, Marie och Yvonne är på konferens i Varna vid Svarta Havet. Varje morgon äter de frukost på Café Albatros (jo, det existerar), där två lika stora runda bord står reserverade. Eftersom högst fyra personer får plats vid varje bord gör de om bordsplaceringen varje morgon. Antalet personer vid varje bord kan naturligtvis variera. Två placeringar kan sägas vara olika så snart någon person inte har samma granne till höger om sig (oavsett bord) vid de två tillfällena. Med tre personer och högst två per bord skulle det således bli tre olika placeringar.

a) Hur många olika placeringar är möjliga för de fem systrarna?
b) Samma uppgift som i a) men med sju systrar och högst sex vid varje bord.
c) Ge ett allmänt uttryck för antalet placeringar för n personer om högst $n-1$ personer får plats vid varje bord.

3806. I en triangel är den inskrivna cirkelns radie r, medan den omskrivna cirkelns radie är R. En rektangel har sidorna r och R samt arean f.

a) Uttryck f i triangelsidorna a, b, c.
b) Betrakta mängden av trianglar med samma kända omkrets s. Bland dessa finns det en triangel sådan att f är maximal. Uttryck detta maximum och den aktuella triangelns sidor i s.

3807. Låt p och q vara två olika udda primtal med $p < q$. Betrakta det sammansatta talet $R = pq$. Med positiva heltal x, y, u, v där $x > u$, kan vi då entydigt skriva

$$R = x^2 - y^2 = u^2 - v^2. \quad \text{(visa detta!).}$$

Antag att $\mathrm{sgd}(xy, uv) = 2$ (dvs den största gemensamma delaren till xy och uv är 2; exempelvis är $\mathrm{sgd}(15, 20) = 5$ och $\mathrm{sgd}(6, 28) = 2$).

Påstående: Under nämnda antagande måste $p = 3$. Är detta påstående sant? Bevisa eller ge ett motbevis.

3808. I ordet *STOCKHOLM* står *S* till vänster om de båda *O*:na och *M* till höger om *O*:na. Beräkna sannolikheten att denna händelse, kallad *S-O-O-M*, inträffar om bokstäverna i ordet *STOCKHOLM* permuteras slumpmässigt.

3809. Skriv heltalsdelen av multiplerna av $\sqrt{2}$ i en rad: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \ldots$ blir $1, 2, 4, 5, 7, \ldots$. I raden under skriver vi det tal som blir över: talen 3 och 6 överhoppas, 3 skrivs rakt under 1, 6 skrivs under 2 osv.

Visa att differensen mellan talen i kolonn n är $2n$. Exempelvis är differensen $3 - 1 = 2$ i kolonn 1 och $6 - 2 = 4$ i kolonn 2.

Fjärde häftet

3810. a) I två kärl, A och B har Margareta lösningar med olika salthalt. Nu vill hon skaffa sig en lösning med en viss önskad salthalt och använder sig av följande komplicerade metod. Först tar hon lika delar från A och B och blandar samman dem i ett tredje kärl C. Därefter tar hon lika delar från A och C och blandar samman dem i ett fjärde kärl D. Slutligen tar hon lika delar från C och D och blandar samman dem i ett femte kärl E och får nu den önskade salthalten. M kunde emellertid ha fått önskat resultat på ett betydligt enklare sätt. Hur då?

*b) Antag att M har lösningar i kärlen A_1 och A_2 med salthalter p_1 resp p_2. Hon använder en metod liknande den ovan och blandar samman lika delar från A_1 och A_2 i ett tredje kärl A_3 och fortsätter på samma sätt: lika delar från A_k och A_{k+1} blandas i kärlet A_{k+2}. Vilken salthalt har blandningen i A_{25}?

3811. I Sankt Petersburg råkade Euler många svenskar. Kanske påverkades han av dessa när han på svelatin gjorde följande marginalanteckning:

$$\text{TELLIGE} \cdot \text{TIG} = \text{INSISTENSE}$$

som i fri översättning blir: Du som pratar strunt, jag ber Dig på det bestämdaste att tiga.

Låt varje bokstav i multiplikationen vara en entalssiffra så att samma bokstav svarar mot samma siffra och olika bokstäver mot olika siffror.

Vilket berömt resultat av Euler ledde till denna skröna?

Ledning: Talet i högerledet förmodades vara av ett speciellt slag. Detta vederlades dock av Euler.

3812. Visa att radien till den inskrivna cirkeln hos en pythagoreisk triangel (= en rätvinklig triangel med heltalssidor) är heltalsvärd.

3813. Lös ekvationssystemet

$$\frac{x}{8-y} = \frac{y}{15-z} = \frac{z}{10-x} = 2.$$

3814. Mona har fått en presentask med karameller i sju olika kulörer. Asken är indelad i 60 fack som vart och ett innehåller minst en karamell. Mona bestämmer sig för att äta upp samtliga karameller i tre valda färger.

a) Visa att valet kan göras så att det efteråt finns karameller i minst 36 fack hur än färgerna är fördelade från början.

b) Antag att det från början finns röda karameller i 19 fack. Hur många fack med karameller kan man nu garantera när de tre karamellsorterna eliminerats? Samma fråga om det finns röda karameller i 19 fack och gula i 24 fack.

3815. Man har en pappersrektangel och viker den hörn mot hörn. Hur långt är vecket?

3816. Adam har i sin ficka tre gröna karameller och två gula. Han stoppar ned handen då och då och tar en karamell på måfå tills han fått båda de gula. Låt U vara antalet karameller han då har tagit. Bestäm väntevärdet för U.

3817. Addera de tusen första termerna av serien 1^2+1, 1^2+1, 2^2+1, $3^2+\ldots$

3818. Låt n vara ett stort heltal. Faktorisera $n!$ som $2^{p_2}\cdot 3^{p_3}\cdot 5^{p_5}\cdot 7^{p_7}\cdot\ldots$. Ge approximativa uttryck för $p_2, p_3, p_5, p_7, \ldots$ på så enkel form som möjligt.

3819. a) Antag att $a \le b \le c$ och $r \le s \le t$ är givna tal och låt a', b', c' vara en godtycklig omordning av a, b, c. Visa att

$$ar + bs + ct \ge a'r + b's + c't \ge at + bs + cr.$$

Generalisera resultatet till talföljderna $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ och $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$.

b) Talen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är givna och $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ är en godtycklig omordning. Visa att

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ge a'_1 a_1 + a'_2 a_2 + \ldots + a'_n a_n.$$

c) Låt a, b, c vara positiva tal. Visa olikheterna

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3.$$