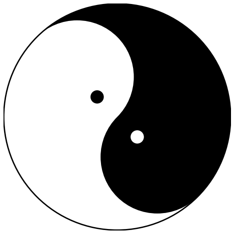
Årgång 75, 1992

Första häftet



3660. I vidstående välbekanta, uråldriga kinesiska tecken sammanförs de två grundläggande principerna i universum, som ständigt kämpar och samverkar med varandra. Svart är Yin, jorden, den kvinnliga principen eller den brutna linjens princip, och vitt är Yang, himlen, manligheten eller den obrutna linjen. Tecknet kan kanske sammanfattas i ekvationen

$$KAOS + KOSMOS = SYMBOL,$$

där varje bokstav står för en beständ siffra. Vilka är siffrorna?

3661. En skål innehåller 33 karameller i olika färger: 10 gula, 10 röda, 5 blå, 4 gröna och 4 vita. Lille Melker får äta av karamellerna under förutsättning att han alltid tar tre karameller i taget och att dessa har olika färg.

a) Kan Melker tömma skålen om han följer reglerna?

b) Antag allmänt att skålen innehåller 33 karameller fördelade över fem färger med minst en av varje färg. Formulera ett villkor för att skålen kan tömmas.

c) Antag att skålen innehåller 32 karameller (ta bort en vit), att Melker måste ta fyra karameller i stället för tre och att alla ska ha olika färg. Besvara a) och b) på nytt.

3662. För en aritmetisk och en geometrisk serie med heltalstermer gäller att första, andra och sista termerna är lika för de båda serierna (som alltså är ändliga). Vidare gäller att den fjärde termen i den geometriska serien är lika med den fjortonde i den aritmetiska. Differensen mellan seriesummorna är 3120. Bestäm serierna.

3663. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 17 = y^2 \\ xy + 71 = x + y \end{cases}$$

i heltal x och y.

3664. I en parallellogram är förhållandet mellan sidorna lika med förhållandet mellan diagonalerna, säg a. Vilket värde ska a ha för att parallellogramens spetsiga vinkel ska bli a) $60°$, b) $45°$, c) $30°$?

3665. Grafen till funktionen $f(x) = x^{1000}$ tangeras för $x = 3$ av en rät linje som skär x-axeln i P och y-axeln i Q.
a) Bestäm x-koordinaten för P exakt.
b) Bestäm y-koordinaten för Q med fyra värdesiffror.

3666. En rätvinklig triangel ABC där hypotenusan AC har längden 2 är omskriven av en cirkel. I triangeln är också en cirkel inskriven med medelpunkten O. En linje genom B och O skär den omskrivna cirkeln i punkten D. Visa att avståndet $|OD|$ är entydigt bestämt av givna villkor och ange detta avstånd.

3667. En orienterare från orienteringsklubben Älgen (en gammal bekant i denna spalt) ska rita en tävlingsbana på kartan med sju kontroller med start och mål på samma plats. Vilket är det maximala antalet gånger banan kan skära sig själv? Vi förutsätter att banan är rätlinjig mellan kontrollerna.

3668. Talen $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, kallas Fermat-tal efter den kände matematikern. Exempelvis är $F_0 = 3$, $F_1 = 5$ och $F_2 = 17$.
a) Visa att $F_n = F_o \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} + 2$ för varje n (kan eventuellt behöva kunskaper utöver gymnasiekunskaper).
b) Visa att F_n inte är en heltalskvadrat för något n.

3669. Två personer A och B har respektive $n+1$ och n symmetriska mynt som de kastar samtidigt. Bestäm sannolikheten att A får fler krona än B (kan eventuellt behöva kunskaper utöver gymnasiekunskaper).

Andra häftet

3670. Nora och Aron springer 3 000 meter på bana. Nora springer hela loppet med jämn fart. Aron springer 3 km/h långsammare under första hälften av loppet men 3 km/h snabbare än Nora under den senare hälften. Vem vinner loppet?

Hade resultatet blivit detsamma om Aron sprungit 4 km/h snabbare än Nora under den senare hälften?

3671. Inför Olympiska spelen år 2048 hade de 100 OS-delegaterna samlats för att välja tävlingsplats bland fyra kandiderande orter, här betecknade A, B, C, D. Röstningen genomfördes i tre omgångar på följande sätt: Varje delegat röstade i varje omgång på *en* ort, varvid den ort som fick minst antal röster uteslöts inför efterföljande omgång. I den andra omgången deltog alltså tre orter och i den tredje två orter. Resultatet blev att D uteslöts i den första omgången, C i den andra och A i den tredje. Elimineringen skedde varje gång med minsta möjliga marginal (den uteslutna orten behövde inte i något fall dela sista platsen med någon annan ort).

Delegaterna kunde indelas i fyra grupper med fasta prioritetsordningar.

Grupp				
1	*A*	*B*	*C*	*D*
2	*B*	*D*	*C*	*A*
3	*D*	*A*	*C*	*B*
4	*C*	*D*	*B*	*A*

Detta innebar exempelvis att alla delegater i grupp 3 röstade på *D* i första omgången, på *A* i andra omgången och på *B* i den tredje.

Hur många delegater bestod varje grupp av?

3672. En rätvinklig triangel där en vinkel är 60° skrivs in i en likbent rätvinklig triangel med ett hörn på varje sida, så att hypotenusorna är parallella. Beräkna förhållandet mellan areorna hos den likbenta och den inskrivna triangeln.

3673. I en nybörjarbok i analys finns följande övningsuppgift: ”Visa att om kurvan $y = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ skär x-axeln i en punkt där $f''(x)$ existerar, så sker det alltid under 45° vinkel.”

Visa med ett motexempel att påståendet inte alltid är sant.

3674. Talen $0 < x_1 < x_2 < x_3$ och $0 < y_1 < y_2 < y_3$ är givna.

a) Visa att $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) < 2(x_1 y_1 + x_2 y_2)$.

b) Visa att

$$\frac{x_1(y_2 + y_3) + x_2(y_1 + y_3) + x_3(y_1 + y_2)}{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3} < 2.$$

3675. En stav AB är utplacerad i xy-planet med ena ändpunkten, A, i origo och den andra ändpunkten, B, i punkten (8; 0). Staven löper genom en vridbar ögla placerad i punkten (1; 0). Om A flyttas längs y-axeln i negativ riktning tills B når punkten (1; 0) beskriver B:s lägen en kurva i första kvadranten. Ange kurvan som en funktion $f(x)$, där x anger B:s x-koordinat. För vilket x är $f(x)$ maximal och vad blir maximivärdet?

3676. Två talteoretiska problem:

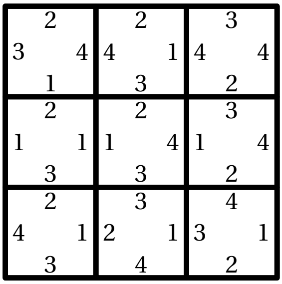
a) Det finns ett och endast ett naturligt tal m sådant att

$$(10m + 1)^2 = m^3 + 10^5.$$

Vilket är talet?

b) Det finns ett och endast ett naturligt tal $n \le 2000$ sådant att siffersumman är mindre för n^3 än för n.
Vilket är talet?

3677. Nio kvadratiska brickor bildar en kvadrat som vidstående figur visar. Uppgiften består i att flytta om brickorna (utan att vrida dem) inom kvadraten så att brickor med angränsande kant får samma kantsiffra, 1 står mot 1, 2 mot 2 osv. Finns det flera lösningar?



3678. Låt z vara ett komplext tal sådant att

$$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \quad \text{är ett reellt tal.}$$

Visa att $|z| = 1$.

3679. a) Vid kast med en tärning blir det ju sex utfall, 1, 2, ..., 6. En symmetrisk tärning kastas tills något utfall erhållits två gånger i följd. Bestäm väntevärdet för antalet utförda kast.

b) Vad blir väntevärdet för antalet utförda kast om tärningen kastas tills man fått två sexor i följd?

c) Vad blir det förväntade antalet kast om tärningen kastas tills man fått en femma omedelbart följd av en sexa?

Tredje häftet

3680. I en rätvinklig triangel med sidorna $a \le b \le c$ är

$$a + c = 36 \quad \text{och} \quad a^2 + c^2 = 776.$$

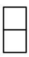
Bestäm sidorna a, b, c och beräkna triangelarean.

3681. Ett parallelltrapets har, räknat i tur och ordning runt om, sidlängderna EL, EM, EN, TA cm, vilket ger omkretsen OJ cm. Arean är TNT cm^2. Hur stor är höjden om bokstäverna representerar var sin bestämd siffra, och vilka är dessa?

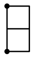
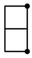
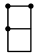
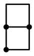
3682. Bestäm alla reella rötter till ekvationen

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

3683. I punktskrift bildar man bokstäver enligt Brailles system genom att placera ut punkter, 1–6 stycken, över hörnen i en ”dubbelkvadrat”



(a) Hur många olika bokstäver kan bildas om man inte har några restriktioner angående punkternas placering?

(b) Det kan vara svårt att skilja tecken av typ  från  och  från . Hur många olika bokstäver kan bildas om man inte får ha punkter enbart i högerkolumnen eller enbart i de två nedersta raderna?

(c) Antag att vi har tre kolumner i stället för två, dvs nio positioner i stället för sex. Vad blir nu antalet bokstäver enligt a) resp b)? I b) får vi inte ha punkter enbart i mitt- och högerkolumnerna.

3684. Betäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$x^{x+y} = y^{x-2y} = x^{2y-x}.$$

3685. I en triangel ABC träffar bisektrisen till vinkeln A sidan BC i punkten D så att $|BD| = \sqrt{3}$ och $|CD| = 1$.

a) Beskriv mängden av punkter A (för B och C fixa) för vilka villkoren är uppfyllda.

(a) Bestäm triangelns vinklar när triangelarean är så stor som möjligt.

3686. En bilparkering är markerad med n kvadratiska rutor i rad. Antag att en parkerad bil täcker exakt två rutor. Vi söker antalet parkeringsmöjligheter (inklusive fallet med en helt tom parkering).

För $n = 3$ finns det tre möjligheter: tom parkering, en bil täcker rutorna 1 och 2, en bil täcker rutorna 2 och 3.

För $n = 4$ finns det fem möjligheter: tom parkering, tre olika sätt att placera *en* bil över de fyra rutorna, ett sätt att placera *två* över rutorna.

a) Ange en formel med hjälp av vilken man successivt kan bestämma antalet möjligheter för godtyckligt värde på n. (Detta var en av uppgifterna i Uppsala- och Västeråsskolornas matematiktävling 1992.)

b) Vi betraktar nu antalet parkeringsmöjligheter för ett givet antal bilar. På hur många sätt kan man parkera k bilar över de n rutorna ($2k \le n$)?
Summering över k ger totala antalet möjligheter i a). Detta leder till en vacker formel.

c) Antalet olika lottorader, dvs antalet sätt att välja ut 7 tal bland totalt 35, är $\binom{35}{7}$. (Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ definieras som $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, där $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, "$n$-fakultet".)

Somliga rader innehåller talsviter, typ 23, 24 eller 4, 5, 6. Bestäm antalet lottorader som helt saknar sådana sviter av intillliggande tal. (Vad har nu detta med bilparkering att göra?)

3687. Från en skylt med texten $\boxed{\begin{matrix}\text{OHIO}\\ \text{USA}\end{matrix}}$ har alla bokstäver fallit ner. Lille Bill klistrar upp de sju bokstäverna slumpvis, fyra på den övre raden och tre på den nedre. Eftersom han inte kan läsa sätter han varje bokstav rätt med sannolikheten $\frac{1}{2}$ och upp och ned med sannolikheten $\frac{1}{2}$. Bestäm sannolikheten att

a) övre raden får rätt text,
b) nedre raden får rätt text,
c) skylten får rätt text.

3688. Låt x, y och z vara icke-negativa tal vars summa är mindre än eller lika med 1. Bestäm största värdet för funktionen

$$f(x, y, z) = |(x+y)(y+z) - z|.$$

3689. Låt $s(n)$ beteckna siffersumman hos naturliga tal n i någon fix bas $b \geq 2$. Visa olikheten $s(mn) \leq s(m) \cdot s(n)$.

Fjärde häftet

3690. Alf, Bengt, Carl och Olof strålade samman. De tre förstnämnda hade var och en ett antal kolor i fickorna, medan Olof var helt utan. Det antal som Carl hade kunde han räkna på ena handens fingrar. Då pojkarna var angelägna om att hålla sams delade de upp kolorna emellan sig så att alla fick lika många var. Olof ville nu betala sin andel, och då han visste vad en enskild kola kostade och var snabb i räkning kunde han genast konstatera: ”Jag ger Alf 2 kr och 50 öre och Bengt 1 kr, men om det ska vara rättvist mot alla måste Carl också ge Bengt 1 kr.”

Hur många kolor hade var och en från början?

3691. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x - \sin y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

för x och y i intervallet $(0, \pi)$.

3692. Charlotta och fem av hennes klasskamrater köper var sin lott i en tombola med 999 lotter, numrerade från 1 till 999. Nu inträffar det märkliga att samma tre siffror, alla olika och skilda från 0, uppträder i samtliga sex lottnummer. Inte nog med det, Charlottas nummer, vilket understiger 500, är exakt lika med medelvärdet av de sex numren. Vilket nummer hade Charlottas lott?

3693. I s k Grand Slam-turneringar i tennis deltar 128 spelare. De 64 segrarna från första omgången går vidare till andra omgången medan förlorarna är utslagna. På detta sätt fortsätter tävlingen tills en slutsegrare efter sju omgångar har korats.

Låt oss ändra reglerna enligt följande: Vi antar att en spelare slås ut först efter två förlorade matcher. Det innebär att såväl de 64 segrarna som de 64 förlorarna från första omgången går vidare till den andra omgången. Vilka spelare som ska mötas i en omgång avgörs genom lottning. Om antalet spelare i en omgång är udda kommer den överblivne spelaren att gå vidare till nästa omgång utan spel.

a) Hur många matcher totalt krävs som minst/mest för att en slutsegrare ska koras? Antalet matcher som spelas i standardfallet kan måhända ge en vink.
b) Set och Love deltar i tävlingen. Hur många gånger kan de teoretiskt mötas under turneringens gång?

3694. Man har två vinkelräta kordor i en cirkel. Visa att summan av kvadraterna på kordasegmenten är lika med kvadraten på diametern.

3695. Nu dammar vi av två gamla problembekanta, en vinter- och en sommaruppgift.

a) En förmiddag började det snöa kraftigt. Kl 12.00 startade Bore sin snöplog och hade efter en timme kört 2 mil. Under timmen som följde körde han ytterligare 1 mil. Vi antar här att hastigheten till följd av tilltagande snödjup är omvänt proportionell mot tiden som gått sedan snöfallet började. Vad var klockan när det började snöa?
b) I en inhägnad hage står 6 kor och betar. Antag att korna behöver 3 dygn för att beta av det växande gräset. Antag vidare att 3 kor skulle behöva 7 dygn för samma uppgift. Hur många dygn skulle en ensam ko behöva? Fundera över om använda förutsättningar är realistiska.

3696. Två koncentriska cirklar har radierna z och 1, där $0 < z < 1$. Punkterna P och Q väljs på måfå på den större cirkelns omkrets.

a) Beräkna sannolikheten att sträckan PQ skär den mindre cirkeln.
b) För vilket värde (vilka värden) på z är den sökta sannolikheten = förhållandet mellan cirklarnas areor?

3697. Lars har ett rektangulärt rutnät med 6 horisontella rader och 5 vertikala kolonner. Han vill fylla i rutorna med tal så att produkten av talen i varje rad är positiv och produkten av talen i varje kolonn är negativ. Kan Lars lyckas med detta?

3698. Den reellvärda funktionen $f(x)$ är definierad för alla naturliga tal x och uppfyller

$$f(x) = \left[f(2) - f(3) + f(4)\right] \cdot x + f(5) + f(6).$$

Bestäm $f(x)$.

3699. Låt a, b och c vara positiva reella tal vilkas produkt är 1. Visa att då gäller

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1.$$