Årgång 73, 1990

Första häftet

Matematiska uppgifter

3580. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ &\vdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

3581. Sambandet $|x+y-4|+|x-y-6|=8$ definierar en figur i xy-planet. Hur ser denna figur ut?

3582. Från en behållare fylld med 360 liter sprit borttogs en viss mängd som ersattes med vatten. Från den sålunda erhållna blandningen borttogs samma mängd vätska som förut plus 84 liter, varefter cisternen ånyo fylldes med vatten. Efter den andra blandningen innehöll cisternen lika mycket vatten som sprit. Hur mycket sprit borttogs första gången?

3583. Ekvationen $(x-a)(x-b)(x-c)+d=0$ har rötterna x_1, x_2 och x_3. Lös ekvationen $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)-d=0$ (a, b, c och d är givna tal).

3584. Strax före årsskiftet 1989/90 betalade Kjell-Olof 5 000 kronor i premie på en kapitalförsäkring. Under åren 2000–2004 kommer han att få ut följande belopp på försäkringen:

1/1 2000:	3 236 kr
1/1 2001:	4 096 kr
1/1 2002:	5 179 kr
1/1 2003:	6 553 kr
1/1 2004:	9 106 kr

Antag att Kjell-Olof i stället hade satt in sina 5 000 kr på ett bankkonto med fast årlig förräntning. Vilken räntesats skulle krävas för att han skulle kunna få ut lika mycket som på försäkringen?

3585. Värdet av talet e med 15 korrekta decimaler är $2,71828\,18284\,59045$. Beräkna härav ett närmevärde till e i form av ett allmänt bråk med ett relativt fel i storleksordningen 10^{-10}.

3586. I triangeln ABC är sidan AB 5 cm och sidan AC 6 cm. Hur stor är vinkeln BCA maximalt?

3587. Uppgiften går ut på att dela in ett schackbräde med $n \times n$ ($n \geq 3$) rutor i delkvadrater och övrig yta (utan att skära någon ruta) så att delkvadraterna täcker så stor area som möjligt. Dock måste delkvadraterna alla vara olika och får inte vara större än $(n-1) \times (n-1)$. För små n-värden får vi maximal täckning med endast två delkvadrater (med sidorna $n-1$ och 1 resp). När n är tillräckligt stort krävs en annan indelning. Bestäm det minsta n-värde som kräver fler än två delkvadrater.

3588. I en hatt ligger en vit och en svart kula. Man drar en kula slumpmässigt ur hatten och återlägger den tillsammans med en kula av samma färg som den dragna. Detta upprepas tills man gjort n dragningar. Låt $p_{k,n}$ vara sannolikheten att man då har erhållit k vita kulor, $k = 0, 1, \ldots, n$.

a) Bestäm $p_{k,2}$ för $k = 0, 1, 2$.

b) Svaret ger dig anledning att gissa $p_{k,n}$ för allmänt n. Gör det. Bevisa, t ex med induktion från n till $n+1$, att din gissning är korrekt. (Anm. Den beskrivna modellen är ett specialfall av Pólyas urnmodell)

3589. I triangeln ABC är $|AB| = |AC|$ och $\wedge BAC = 20°$. Drag sträckorna CE, BD och ED, där D är en punkt på sidan AC och E en punkt på sidan AB, sådana att $\wedge CBD = 60°$ och $\wedge BCE = 50°$. Hur stor är vinkeln EDB? Inga trigonometriska funktioner ska behöva användas.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

3590. I en skola serverar man alltid tre rätter på avslutningsdagen: blodpudding, hamburgare och spagetti med köttfärssås. För att veta hur mycket som ska tillagas av varje rätt får varje elev av husmor en talong på vilken hon/han kan ange sitt önskemål. Det visar sig att 12% av samtliga elever har önskat sig blodpudding, 15% hamburgare och 28% spagetti. Några elever har kryssat för mer än en rätt. I de nämnda procentsiffrorna ingår således de 53 elever som önskat sig alla tre rätterna och de 22 elever som har angett två av de tre rätterna. Övriga elever, 848 stycken, har antingen glömt att lämna in talongen eller avstått från att välja någon rätt. Hur många elever finns det i skolan?

3591. I bandyns elitserie är lagen indelade i två grupper om vardera åtta lag. Inom varje grupp möts lagen i form av en enkelserie, dvs alla möter alla *en* gång. De sex bästa lagen inom varje grupp går efter avslutat gruppspel vidare till SM-slutspel. Om två lag har samma poäng får målskillnaden avgöra ordningsföljden (vinst, oavgjort, förlust i en match ger 2, 1, 0 poäng resp).

a) Hur många poäng krävs av ett lag i gruppspelet för att garantera en plats i slutspelet?

b) Vilken är den minsta poängsumma som skulle kunna ge en plats i slutspelet?

3592. Av ett rektangulärt stycke omslagspapper har jag konstruerat en sopsäck genom att vika papperet mitt itu och sedan tejpa längs två av kanterna. Säcken, som således saknar bottenveck, har höjden 100 cm och bredden (dvs öppningens längd) 70 cm. Jag tänker nu forma säcken till ett rätblock, vilket innebär att jag får lov att vika in bottnens hörn precis som på vanliga mjölkpaket (tetra brik). Säcken ska sedan placeras i en måttbeställd soptunna med lock, varför själva säcken inte behöver tillslutas upptill. Vilka innermått ska soptunnan ha om säcken ska rymma ungefär 100 liter?

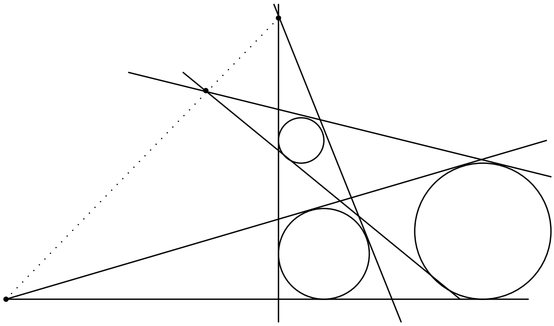
3593. Låt x, y, z, u och v vara positiva reella tal. Bilda kvoterna $F_1 = \frac{x+y+z+u+v}{u+v} = \frac{y+z+v}{y+v}$, $F_2 = \frac{v}{u} = \frac{y}{x}$ och $F_3 = \frac{x+y}{z}$, som samtidigt beskriver vissa samband mellan de fem talen. Visa att $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = 1$.

3594. I ett rätvinkligt koordinatsystem har man dragit kurvan $y = ax - x^2$, där a är en positiv konstant. Linjen $y = bx$, där $0 < b < a$, skär kurvan dels i origo, här betecknad med O, dels i en annan punkt P. Genom P dras en linje som är parallell med x-axeln och som skär kurvan i punkten Q. Beräkna arean av det segment som ligger mellan kurvan och sträckan OQ.

3595. Ange ekvationen för bisektrisen till den spetsiga vinkel som de båda linjerna $y = 7x - 17$ och $y = x + 1$ bildar.

3596. I följden av mätvärden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gäller det att $0 \le x_i \le 1$ för alla i. Man bildar medelvärdet $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ och variansen $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ (vanligtvis brukar man dock dividera med $n-1$ i stället för n i det senaste fallet). Hur stort kan s^2 maximalt vara?

3597. Upprita tre olika stora cirklar i planet och drag för varje cirkelpar de ”utvändiga” gemensamma tangenterna som figuren anger. Visa att oavsett cirklarnas placering kommer tangentparens tre skärningspunkter att ligga på en och samma räta linje.



3598. I ett lotteri finns det n lotter, varav två ger vinst. Lotterna säljs en i taget, och eventuell vinst meddelas genast. A och B köper varsin lott på följande sätt. A köper första lotten som säljs. B köper första lotten efter en vinstlott. Bestäm vardera personens vinstsannolikhet.

3599. För varje heltal n betecknar $S(n)$ siffersumman i n. Beräkna $S(S(S(S(n))))$ för $n = 123456789!$ ($k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$).

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3600. Tom och Huck målar ett plank. Tom målar först halva planket, varefter Huck målar den andra halvan. Hela arbetet tar 25 timmar. I fjol målade Tom och Huck planket samtidigt och blev färdiga efter 12 timmar. Hur lång tid skulle var och en ha behövt för att ensam slutföra arbetet?

3601. Fyll i rutnätet i figuren nedan så att en magisk kvadrat bildas (alla rad-, kolumn- och diagonalsummor är lika) och beteckna talen enligt figuren.

a) Visa att $9 \cdot A$ = summan av de 9 talen.
b) Visa att $B - C = C - D$.

	D	
	A	B
C		

3602. Bestäm talet a så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ ax+y+z=4 \\ x+ay+az=5 \end{cases}$$

blir lösbart och bestäm dess lösning.

3603. I talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är $a_0=0$ och $a_1=1$. För $n \geq 2$ definieras följden genom rekursionsformeln

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}.$$

Ge ett exakt uttryck för summan $a_{100}+a_{101}+a_{102}+a_{103}$.

3604. a) Välj slumpmässigt ett av talen $1, 2, \ldots, 10^6$. Bestäm sannolikheten att talet är palindromiskt. Därmed avses att det förblir oförändrat om det skrivs baklänges. Ett ensiffrigt tal anses vara palindromiskt.

b) Välj allmännare ett av talen $1, 2, \ldots, 10^{2m}$ $(m \geq 1)$ och lös samma problem.

3605. Sidoytornas mittpunkter i en kub bildar hörnen i en oktaeder. I oktaedern bildar sidoytornas mittpunkter hörnen i en kub osv i oändlighet. Beräkna summan av volymerna av alla kuber och oktaedrar, om den första kuben har kantlängden 1.

3606. Visa att ekvationen

$$x^2+y^2-5xy+1=0$$

inte är uppfylld för något par av heltal (x, y).

3607. Två positiva tal, a och b, bestäms av sambanden

$$1,8a+\log(1+a)+3,0\sqrt{a}=2,6$$
$$1,3b+\log(1+b)+3,3\sqrt{b}=2,6$$

(log står för 10-logaritmen). Vilket tal är störst, a eller b? Fäll avgörandet utan att först bestämma a och b explicit.

3608. I årets fotbollsallsvenska har ett stort antal matcher uppskjutits till följd av det ideliga regnandet. Nu återstår åtta matcher och man vill ändra på spelschemat så att matcherna kan genomföras på kortast möjliga tid. Detta gör man genom att försöka lägga flera matcher parallellt. Man vet att vart och ett av de tolv lagen har minst en match kvar att spela. Visa att åtminstone fyra av matcherna (med åtta lag inblandade) kan spelas samtidigt.

3609. I en spetsvinklig triangel ABC skär höjderna varandra i punkten P. Låt a = längden av sidan BC och d = avståndet mellan A och P. Vinkeln BAC kan uttryckas som en funktion av a och d. Bestäm denna funktion.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3610. Orienteringsklubben Älgen har som sig bör ständigt fler aktiva än passiva medlemmar. Aktiva medlemmar betalar 50 kr i årsavgift och passiva 25 kr. År 1988 fick klubben in 4 875 kr i medlemsavgifter och året därpå 6 875. Konstigt nog var den procentuella fördelningen mellan aktiva och passiva exakt densamma de båda åren. Hur många betalande medlemmar hade klubben under 1989?

3611. En falskmyntare präglar trekronors- och sjukronorsmynt i sin källare. Tyvärr räcker dessa valörer inte till exakt betalning av alla tänkbara belopp i helt antal kronor. Beloppen fyra och fem går t ex inte.

a) Vilket är det största heltalsbelopp som han inte kan betala exakt?

b) Antag att valörerna är tre och m kronor i stället, där m (≥ 2) är ett godtyckligt heltal.
Vilket är nu det största heltalsbelopp (som funktion av m) som han inte kan betala exakt?

3612. I en multiplikationsuppställning har varje jämnt tal ersatts med ett J och varje udda tal med ett U med följande resultat:

$$\begin{array}{r} J\,U \\ U\,U \\ \hline U\,U\,U \\ J\,U\,U\,U \\ \hline J\,U\,J\,U \end{array}$$

Rekonstruera den ursprungliga uppställningen.

3613. I den egyptiska triangeln ABC (dvs med sidlängderna 3, 4 och 5) är AB hypotenusan och BC den större kateten. Bisektrisen till vinkeln A skär BC i D och förlänges till E så att $DE = AD$ varefter E sammanbindes med B. Beräkna vinkeln BED.

3614. Lös ekvationen

$$x^3 - 2[x] - 5 = 0,$$

där $[x]$ är det heltal $\leq x$ som ligger närmast x.

3615. En rektangulär altan är täckt av kvadratiska marmorplattor av samma storlek, sju på bredden och nio på längden. Plattorna är varierande svarta eller vita. Mönstret är sådant att i en delrektangel omfattande 2×3 plattor är alltid 2 plattor svarta. Hur många svarta och vita plattor är det totalt? Vad kan sägas om mönstrets utseende?

3616. Tre personer A, B och C kastar ett symmetriskt mynt i ordningsföljden $ABC\,ABC\ldots$. Den som först får krona vinner. Bestäm sannolikheterna p_A, p_B, p_C att A, B resp C vinner. (Ett liknande problem förekommer i Christiaan Huygens' bok *De Ratiociniis in Ludo Aleae* från 1600-talet.)

3617. Inuti en liksidig triangel finns en punkt P sådan att avstånden från P till triangelns hörn är resp a, b och c, där $a^2 = b^2 + c^2$. Uttryck triangelsidans längd som funktion av dessa avstånd.

3618. Låt

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\ S_n^{(2)} &= S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + S_3^{(1)} + \ldots + S_n^{(1)} \\ S_n^{(3)} &= S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + S_3^{(2)} + \ldots + S_n^{(2)} \end{aligned}$$

osv.

a) Visa att $S_n^{(m)}$ kan uttryckas som en binomialkoefficient och beräkna $S_{29}^{(6)}$ (är talet bekant?).

b) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_n^{(n)}}$.

3619. En reellvärd funktion $f(x)$ är definierad för alla reella x och deriverbar i punkten $x = 0$. Bestäm f om man vet att $f(x + y) = f(x)f(y)$ för alla reella tal x och y.