Årgång 70, 1987

Första häftet

Matematiska uppgifter

3460. Om Landet Podunk vet man följande:

(i) Det finns inte två invånare med samma antal hårstrån.
(ii) Ingen invånare har exakt 518 hårstrån.
(iii) Antalet invånare överstiger antalet hårstrån hos varje enskild invånare.

Hur många invånare finns det maximalt i Podunk?

3461. För en oändlig talserie gäller att det andra talet är 5, det tolfte är 8, samt att summan av tre på varandra följande tal alltid är 17. Bestäm det tusende talet i serien.

3462. Om $\tan x + \tan y = 25$ och $\cot x + \cot y = 30$, vad är då $\tan(x + y)$?

3463. Vilket tal blir, multiplicerat med 200 och adderat till sin kvadrat, sedan multiplicerat med 2 och subtraherat från sin fjärde potens, lika med en myriad minus ett (en myriad=10 000)?

3464. Vid ett friidrottsmästerskap tävlade man i M grenar. Endast A, B och C deltog. I varje gren fick 1:an p_1 poäng, 2:an fick p_2 och 3:an p_3 poäng. Här är $p_1 > p_2 > p_3 > 0$ och alla poängtal är heltal. När tävlingen var slut hade A fått ihop 22 poäng, medan B och C hade fått 9 poäng vardera. B vann 100-metersloppet. Bestäm M samt ange vem som blev 2:a i höjdhoppet.

3465. I triangeln ABC är vinkeln $B > 90°$. Genom B dras två räta linjer, den ena vinkelrätt mot AB, den andra vinkelrätt mot BC. Linjerna skär AC i D resp E. Beräkna triangelns area om $AE = 18\,\text{cm}$, $ED = 7\,\text{cm}$ och $BD = CD$.

3466. När A kör sin bil till arbetet, måste hon passera två trafikljus, som båda visar grönt ljus två tredjedelar av tiden. A har upptäckt att, om det första trafikljuset visar grönt, när hon kör i sin vanliga takt, det andra i 3 fall av 4, också visar grönt.

Vad är sannolikheten att det andra trafikljuset visar rött om det första har visat rött?

3467. Två olika 7-siffriga heltal är givna, båda bestående av siffrorna 1, 2, ..., 7. Visa att inget av talen kan vara en multipel av det andra.

3468. Ett företag har mer än 100 anställda. Visa att man kan välja ut 11 personer så att summan av deras åldrar, räknade i hela år, är jämnt delbar med 11.

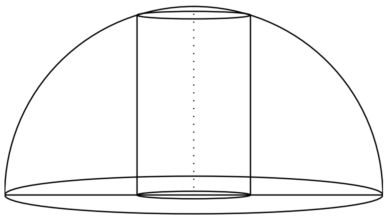
3469. Emiren Hazir har två tjänare. Vid avlöningsdag har emiren plockat ihop 15 påsar med guldmynt. Avsikten är att dottern skall få en påse i veckopeng. Resten skall sedan tjänarna dela på, så att de får lika många påsar och lika många guldmynt. Om man vet att uppdelningen kan ske på nämnt sätt, oavsett vilken påse dottern får, visa att det då måste vara samma antal guldmunt i de 15 påsarna.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

3470. Klockan 8 cyklar Erik från Svinesund mot Arvika, en sträcka av 22 mil. Klockan 13 startar Anna från Arvika och cyklar Erik till mötes. De möts klockan 23 samma dag. På varje mil använder Erik 15 minuter längre tid än Anna. Hur långt från Arvika möts de.

3471. I en halvsfär med radien 3 cm är en rak cirkulär cylinder med radien 1 cm inskriven enligt figuren. Det finns ytterligare en på detta sätt inskriven cylinder med samma volym som den förstnämnda. Bestäm exakta längden av den andra cylinderns radie.



3472. Diametern i en cirkel med radien r skär en korda vid vinkeln 45°. Skärningspunkten delar kordan i två sträckor av längderna a och b. Visa att $a^2 + b^2 = 2r^2$.

3473. Beräkna $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \cdots \cdot \log_{15} 16$ ($\log_n$ betecknar logaritmen med basen n).

3474. En partikel rör sig i planet på följande sätt. Den startar i en given punkt, rör sig rakt västerut 1 cm, viker av och rör sig rakt söderut 3 cm, sedan rakt österut 5 cm osv. Riktningen ändras alltså 90° åt vänster efter varje förflyttning och varje delsträcka är 2 cm längre än den föregående. Hur långt från utgångspunkten befinner sig partikeln när det förflyttat sig 38 465 cm?

3475. I ekvationen $x^4 + 5x^3 + ax^2 - 10x - 56 = 0$ har två av rötterna produkten -8. Bestäm koefficienten a och samtliga rötter.

3476. Vid tillverkning av glödlampor kasseras 3% på grund av defekter. En ask fylls med lampor som kontrolleras. Det visar sig att en av lamporna är defekt och måste kasseras. Vilket är det troligaste antalet lampor i asken, det vill säga vid vilket antal är sannolikheten för exakt en defekt lampa maximal?

3477. a) Betrakta talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\,(n \text{ stycken tvåor}).$$

Visa att $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar och bestäm gränsvärdet.
b) Betrakta talföljden $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$b_n = \sqrt{1+\sqrt{2^2+\sqrt{3^2+\cdots+\sqrt{n^2}}}}$$

Visa att $b_n \le 2$ för varje n. Visa vidare att $\lim_{n\to\infty} b_n$ existerar och ange gränsvärdet så noggrant som möjligt.

3478. Fem systrar äger gemensamt en sommarstuga. Sommaren 1986 tillbringade de två semesterperioder var i stugan, varje period med minst en övernattning. När sommaren var slut, kunde man konstatera att var och en av systrarna hade övernattat samtidigt med varje annan syster någon gång under sommaren. Visa att det någon natt måste ha inträffat att minst tre av systrarna övernattat samtidigt.

3479. Heltalen 1, 2, ..., 64 fördelas slumpmässigt över rutorna på ett schackbräde. En ruta sägs vara en sadelruta om talet i rutan samtidigt är radminimum och kolonnmaximum

a) Visa att högst en ruta kan vara en sadelruta.
b) Bestäm sannolikheten att en given ruta är en sadelruta.
c) Bestäm sannolikheten att brädet innehåller en sadelruta.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3480. Bestäm alla polynom $p(x) = x^2 + ax + b$ som uppfyller $p(a) = a$ och $p(b) = b$.

3481. Per har blandningar av glykol i tre tvålitersdunkar A, B och C. I A finns 1 liter 80%-ig blandning, i B 1,5 liter 40%-ig och i C 2 liter 20%-ig blandning. Dessutom finns två enlitersdunkar D och E, där D är fylld med ren glykol, medan E är tom. Per behöver en 50%-ig blandning. Hur ska han förfara för att få en maximal mängd av den önskade blandningen?

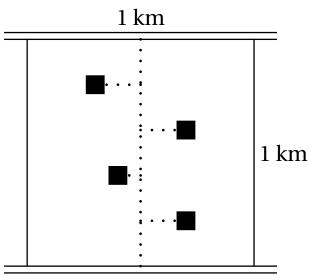
3482. Ett tiosiffrigt tal är sådant att den första siffran anger antalet nollor i tale, andra siffran anger antalet ettor, tredje siffran anger antalet tvåor osv. Bestäm talet.

3483. Sex personer spelar rysk roulett med en revolver vars magasin har plats för sex skott (lös ammunition). Man drar lott om skjutordningen, lägger in ett skott i magasinet, som roteras några varv, och spelet kan börja. Normalt vrids magasinet automatiskt ett steg efter varje avtryckning. Den sjätte spelaren, Wyatt, vill förbättra sina odds och förslår att magasinet roteras efter varje skjutförsök. Hur förändras sannolikheten för att Wyatt klarar sig om förslaget genomförs? De övriga spelarna invänder att med denna variant kan alla spelarna klara sig. De vill därför modifiera förslaget så att Wyatt direkt förlorar om de första fem har klarat sig. Vad blir i detta fall sannolikheten att Wyatt klarar sig?

3484. Lös för givet värde på a ekvationen

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=a.$$

3485. Mellan två parallellt löpande motorvägar har fyra bröder köpt ett landområde i form av en kvadrat med sidan 1 km (= avståndet mellan landsvägarna). De skall uppföra varsin villa i området och bygga vägar så att varje villa har anslutning till båda motorvägarna. I figuren finns ett exempel på vägnät.



Visa att det går att konstruera ett vägnät av total längd högst 2,5 km oavsett var husen är belägna.

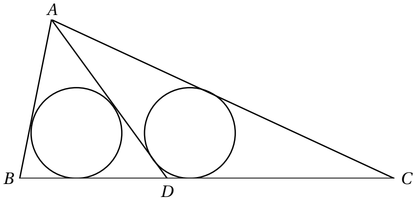
3486. Två klot med samma radie = 1 skär varandra så att det ena klotets medelpunkt ligger på det andras yta. Bestäm volymen av det område som är gemensamt för de båda kloten.

3487. Visa att för alla positiva reella tal x gäller att

$$\frac{1+x^2+x^4+x^6}{x+x^3+x^5} \geq \frac{4}{3}.$$

3488. Visa att ekvationen $x^3+5y^3+9z^3=0$ saknar heltalslösningar $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

3489. Triangeln ABC delas av sträckan AD, enligt figuren, i två deltrianglar sådana att de inskrivna cirklarna blir lika stora. Visa att $AD = \sqrt{p(p-a)}$, där p = halva omkretsen till triangeln ABC och $a = BC$.



(*Anm* Om vinkeln BAC är rät blir $AD = \sqrt{T}$, där T = arean av triangeln ABC. Detta specialfall har förekommit i denna spalt för många år sedan.)

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3490. I en geometrisk serie är första termen = 1 och sista termen = 1 000 000. Produkten av de fem första termerna är 100 000. Beräkna produkten av de återstående termerna.

3491. Bestäm det största värdet på n för vilket det existerar ett x som samtidigt uppfyller olikheterna

$$1<x<2,\ 2<x^2<3,\ \ldots,\ n<x^n<n+1.$$

3492. En rak cylindrisk burk med radien r och höjden h innehåller så pass mycket vatten att när burken lutas kan man precis skymta bottnen, då vattenytan når överkanten. Ange mängden vatten i burken. Lös samma uppgift om i stället precis halva bottnen är synlig, när vattnet når överkanten.

3493. Vid en skoltävling i friidrott kunde eleverna deltaga i fyra olika grenar: höjdhopp, kulstötning, löpning 100 m och löpning 1500 m. Eleverna ägde rätt att ställa upp i flera grenar, men ingen ställde upp i alla fyra disciplinerna. Man fann att 90% av eleverna deltog i höjdhoppet, 80% i kulstötningen, 70% i löpning 100 m och 60% i 1500 m-loppet. Hur stor del av eleverna deltog i åtminstone någon löpgren?

3494. Betrakta heltal med endast ettor och tvåor tillåtna. Låt u_n vara antalet olika sådana tal med siffersumma n. Visa att u_n kan uttryckas som en funktion av u_{n-1} och u_{n-2}. Ange sedan antalet tal med siffersumma 10.

3495. Tio gifta par har anordnat en middag. Efter måltiden drar man lott om vilka som ska sköta om disken, och man väljer ut 5 av de 20 deltagarna. Vad är sannolikheten att det inte ingår något gift par bland de utvalda?

3496. Hörnet till ett rätblock sågas av så att den bortkapade delen bildar en tetraeder. Dennas begränsningsytor har areorna T_1, T_2, T_3 och T_4 resp, där T_4 är snittytans area. Visa att $T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = T_4^2$.

3497. En följd av heltal är sådan att summan av 5 successiva tal i följden alltid är negativ, medan summan av 9 successiva tal alltid är positiv. Visa att högst 12 tal kan ingå i följden. Konstruera sedan en följd av 12 tal som uppfyller villkoren.

3498. Matematikstuderande Göran Rett presterade följande ”bevis” av relationen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k!}$$

”Enär $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} k^4$ $(=\infty)$ måste även den sökta relationen gälla.” Visa strikt att relationen gäller. Ange värdet av vartdera ledet. (Anm. $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k$.)

3499. Betrakta kontinuerliga funktioner $f(x)$ definierade på intervallet $0 \le x \le 1$, sådana att $f(0) = f(1) = 0$. För vilka värden på a, $0 < a < 1$, går det alltid (dvs för varje f) att hitta ett x som uppfyller $f(x) = f(x+a)$?