Årgång 68, 1985

Första häftet

Matematiska uppgifter

3380. Visa att om A, B, C och D är positiva tal så är

$$\frac{(A+B)(C+D)}{A+B+C+D} \geq \frac{AC}{A+C} + \frac{BD}{B+D}$$

3381. I en rätvinklig triangel T_1 är ena kateten 1 cm. I en annan rätvinklig triangel T_2 är ena kateten lika lång som hypotenusan i T_1, medan den andra kateten är lika lång som summan av kateterna i T_1. Beräkna trianglarnas areor när kvoten mellan arean av T_2 och arean av T_1 är så stor som möjligt.

3382. Bestäm alla positiva heltal n för vilka $n^4 + 4^n$ är ett primtal.

3383. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-3} = \sqrt{x+y} \\ \lg(x-10) + \lg(y-6) = 1. \end{cases}$$

3384. Bestäm alla positiva heltal n sådana att $2^n - 1$ är tredjepotens av ett heltal.

3385. Låt a och b vara rötterna till ekvationen $x^3 - x + 1 = 0$. Visa att ab är rot till ekvationen $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

3386. Konstanterna a och b i ekvationen $a \sin x + b \cos x + 1 = 0$ väljs slumpmässigt i intervallet $[-1, 1]$. Bestäm sannolikheten att ekvationen får reella rötter.

3387. Låt m och n vara positiva heltal med $m < n$. Visa att $(m!)^{n-1} < (n!)^{m-1}$ (med $k!$ menas $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$).

3388. Låt M vara en godtycklig mängd av tio olika heltal, utvalda från mängden $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$. Visa att M kan delas i två disjunkta delmängder, för vilka summan av de ingående elementen är lika.

3389. Bestäm siffran före och siffran efter decimaltecknet i $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{1984}$.

Andra häftet

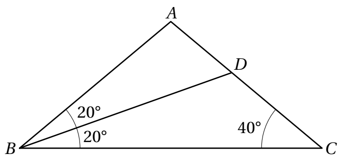
Matematiska uppgifter

3390. Visa att $\dfrac{1}{x} < x - \sqrt{x^2 - 1} < \dfrac{1}{2x - 1}$ för $x > 1$.

3391. Visa att kurvan $y = \dfrac{x^2 + 5}{4}$ saknar punkter med heltalskoordinater.

3392. Visa att det bland fem godtyckligt valda heltal alltid finns tre, vilkas summa är delbar med tre.

3393. Betrakta triangeln ABC i figuren. Visa att $|BC| = |BD| + |DA|$. (Med $|AB|$ menas längden av sträckan mellan A och B.)



3394. ”Om två av mina barn väljs slumpmässigt så är det lika stor chans att de är av samma kön som att de är av olika kön” sa Sultanen till Kalifen. ”Hur stor är chansen att båda är flickor?”, undrade Kalifen. ”Lika stor som att ett slumpmässigt valt barn är en pojke” svarade Sultanen. Hur många barn har Sultanen?

3395. För vilka udda heltal p är $p^4 + p^2 - 2$ delbart med 72?

3396. Lös ekvationen $x^4 - 2x^3 - 24x^2 - 10x - 1 = 0$.

3397. Bestäm resten då polynomet $x^{1985} + x^{985} + x^{85} + x^5$ divideras med $x^3 - x$.

3398. Visa att $a^2 + b^2 + c^2 > d^2/3$ gäller om a, b, c och d är sidlängder i en fyrhörning.

3399. Hur stort och hur litet kan $\sin a + \sin b + \sin c$ bli, då a, b och c är vinklar i en triangel?

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3400. Är 999919 ett primtal?

3401. Om Du adderar siffrorna i Adams ålder och därefter subtraherar den erhållna summan från hans ålder, får Du det tal som består av siffrorna i Adams ålder i omvänd ordning. Hur gammal är Adam?

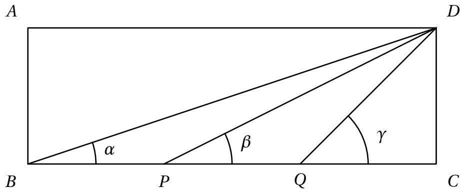
3402. Beräkna $a^4 + b^4 + c^4$, om $a + b + c = 0$ och $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

3403. Bestäm a så att ekvationen $x^5 + ax = 4$ får så många olika reella lösningar som möjligt.

3404. Visa att $-\ln(1 - y^2) \le (-\ln(1 - y))^2$ för $0 < y < 1$.

3405. En bonde ska köpa får som kostar 400 kronor stycket, kor som kostar 650 kronor stycket och hönor som kostar 20 kronor stycket. Han köper 100 djur för en total kostnad av 30 000 kronor. Hur många får, kor och hönor får han?

3406. Låt $ABCD$ vara en rektangel enligt figuren nedan, där sidan BC är tre gånger så lång som sidan AB. Punkterna P och Q är sådana att sträckorna BP, PQ och QC är lika långa. Visa att vinklarna α, β och γ uppfyller $\alpha + \beta = \gamma$.



3407. Låt a, b, c och d vara fyra godtyckliga heltal. visa att produkten av differenserna $b-a$, $c-a$, $d-a$, $d-c$, $d-b$ och $c-b$ är jämnt delbar med 12.

3408. Visa att det endast finns ändligt många positiva heltalslösningar till

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1985}.$$

3409. Ett 1400 m långt demonstrationståg marscherar med konstant fart. En polis kör på motorcykel med konstant fart från slutet av tåget fram till täten och sedan omedelbart tillbaka igen. Under tiden har demonstrationståget rört sig 700 meter framåt. Hur långt kör polisen?

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3410. En tunna innehåller 100 liter ren alkohol. Man tar bort 5 liter och ersätter det med vatten. Blandningen skakas ordentligt och proceduren upprepas ytterligare två gånger. Hur många procent alkohol är det i tunnan efter den sista utspädningen?

3411. Visa att, om $bc - k = a^2$ och $ca - k = b^2$ och $a \neq b$, gäller likheten $ab - k = c^2$.

3412. Bestäm heltalen m och n så att likheten

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{m}{n}$$

är sann.

3413. Ett parallelltrapets har ortogonala diagonaler och höjden 4 cm. Beräkna arean, om en av diagonalerna har längden 5 cm.

3414. Visa att sista siffran i summan $1+2+3+\ldots+n$ inte kan vara 2, 4, 7, eller 9.

3415. Vilket av talen 1985^{1986} och 1986^{1985} är störst?

3416. Bestäm alla värden på konstanten a för vilka ekvationen

$$x^4 + 4x^3 + ax^2 + 4x + 1 = 0$$

har fyra reella rötter.

3417. Visa: om m och n båda är heltal större än 1, så är $m^4 + 4n^4$ inte primtal.

3418. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara godtyckliga reella tal. Sätt

$$\begin{aligned} A_n = & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) \\ & + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Gäller olikheten $A_n \geq 0$ för $n = 3$ eller för $n = 4$?

3419. Låt a, b och c vara positiva tal. Visa att

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$