Årgång 66, 1983

Första häftet

Matematiska uppgifter

3300. Till en utslagsturnering i tennis är 37 spelare anmälda. Det innebär att en spelare står över första omgången och att de övriga 36 spelar 18 matcher. Således går 19 spelare vidare till andra omgången. Om turneringen fortsätter på samma sätt hur många matcher behöver man spela innan segraren är korad? Hur många matcher behövs om n spelare anmält sig till turneringen?

3301. Adam, Bertil, Cesar och David ska dela på en påse med godis. Först tar Adam en bit och en tredjedel av det som återstår, sedan tar Bertil en bit och en tredjedel av det som återstår. Cesar tar en bit och en tredjedel av det som nu återstår medan David tar det som därefter är kvar. Om Bertil och Cesar tillsammans fick sju bitar mer än Adam, hur många bitar fick då David?

3302. Visa att

$$\frac{1}{2x} < x - \sqrt{x^2 - 1} < \frac{1}{2x - 1}$$

för alla $x > 1$.

3303. Två tal väljs slumpmässigt i intervallet mellan 0 och 1. Hur stor är sannolikheten att deras summa är större än $3/4$?

3304. Visa att $3n^4 + 2n^3 + n$ är delbart med 6 för varje heltal $n \geq 1$.

3305. Betrakta de tre olikheterna

$$\begin{aligned}
&(2n-2)^n + (2n-1)^n < (2n)^n,\\
&(2n-1)^n + (2n)^n < (2n+1)^n,\\
&(2n)^2 + (2n+1)^n > (2n+2)^n.
\end{aligned}$$

De är, som man lätt kontrollerar, alla sanna för $n = 3, 4$ och 5. Avgör vilken eller vilka av olikheterna som gäller för alla heltal $n > 2$. *Ledning:* Uttrycket $(1 - 1/n)^n$ växer då n växer.

3306. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\left\{\begin{aligned}
x(x+y) + z(x-y) &= 6\\
y(y+z) + x(y-z) &= -2\\
z(z+x) + y(z-x) &= 3.
\end{aligned}\right.$$

3307. Bestäm ett så stort tal a som möjligt för vilket

$$\left(\sqrt{x}\right)^x + x^{\sqrt{x}} \geq a$$

för alla x med $0 < x < 1$.

3308. Lös ekvationen $\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + 7$.

3309. Funktionen g är sådan att andraderivatan g'' är kontinuerlig med $g'' \geq 1$. Visa att om funktionen f är kontinuerlig med $f(0) = f(1) = 0$ så är

$$\int_0^1 f^2(x) e^{g(x)}\, dx \leq \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 e^{g(x)}\, dx.$$

Andra häftet

Matematiska uppgifter

3310. Låt a , b och c vara reella tal sådana att $a + b < c$. Gäller då att $a^3 + b^3 < c^3$?

3311. Vilka värden har p och q om rötterna x_1 och x_2 till ekvationen $x^2 + px + q = 0$ satisfierar $x_1 - 2x_2 = 2$ och $2x_1 - 3x_2 = 5$?

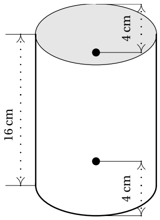
3312. Vilket bör priset på barrved vara per volymsmått då man vet att ett sådant mått björkved kostar 120 kr om man tar i beaktande att björkved är 25% tyngre än barrved men barrved efter vikt räknat ger 5% mera värme än björkved?

3313. Visa att för alla $x > 0$ och $y > 0$ gäller att

$$\frac{(y+2)^2}{1+x} \leq \frac{4}{x} + y^2.$$

3314. I triangeln ABC är sidorna AB och AC lika långa. På AC eller dess förlängning avsättes en punkt P på så sätt att AP och BC är lika långa. Kan toppvinkeln A bestämmas så att vinkeln ABP är lika stor som halva toppvinkeln?

3315. Ett cylindriskt glas är 16 cm högt och har en omkrets på 24 cm. På insidan av glaset, 4 cm från toppen, finns en honungsfläck. På utsidan av glaset, 4 cm från botten, sitter en fluga. Vilken är den kortaste väg flugan kan ta för att nå honungsfläcken och hur lång är denna väg?



3316. Lös ekvationen $3^x + 4^x = 5^x$.

3317. Bestäm tre positiva tal vars summa är 25 och vars produkt är 540.

3318. Finns det någon funktion som är kontinuerlig och inte identiskt noll sådan att $\int_0^x f(t)\,dt \geq f(x)$ för alla x med $0 \leq x \leq 1$?

3319. Som man lätt kontrollerar finns i utvecklingen av $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$ 10 olika termer. Hur många olika termer finns i utvecklingen av $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$?

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3320. En kemist har m gram saltvatten med en salthalt av m %. Hur många gram rent salt måste han tillsätta för att lösningen ska få salthalten $2m$ %?

3321. Lös ekvationen $\log_{(x+1)}(8x) + 9 \cdot \log_{(8x)}(x+1) = 6$.

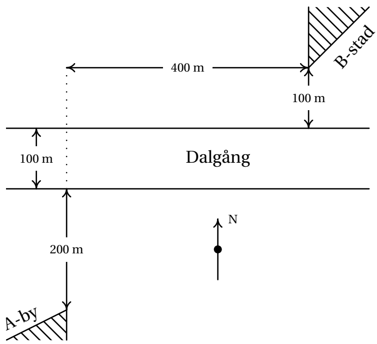
Svensk standard föreskriver numera $\log_x$ för det som förr skrevs ${}^a\log x$.

3322. Adam är tre gånger så gammal som Bertil var då Adam var lika gammal som Bertil är nu. När Bertil är lika gammal som Adam är nu är Adam 56 år. Hur gamla är Adam och Bertil nu?

3323. Visa att

$$\frac{2}{\sin 50^\circ} + \frac{1}{\sin 70^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}.$$

3324. Orterna A-by och B-stad ligger på olika sidor om en 100 meter bred dalgång. A-by ligger 200 meter och B-stad 100 meter från dalgångens kant (se figur). Vidare är avståndet i öst-västlig riktning mellan orterna 400 meter. Orterna ska förenas med hjälp av en väg och en bro över dalgången. Vilken är den kortaste väg man kan åstadkomma?



3325. Det tar Åke m gånger så lång tid att utföra ett visst arbete som det tar för Ärlig och Östen tillsammans. För Ärlig tar det n gånger så lång tid som för Åke och Östen tillsammans att utföra samma arbete. Hur många gånger längre tid tar det för Östen att utföra arbetet än för Åke och Ärlig tillsammans?

3326. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara reella tal med $m \leq x_j \leq M$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Visa att om $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$, så är $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq -nmM$.

3327. Visa att om $A > 0$, $B > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ och $\alpha + \beta = 1$ så är

$$A^\alpha B^\beta < \alpha A + \beta B.$$

3328. För vilka heltal a är $x^{13} + x + 90$ jämnt delbart med $x^2 - x + a$?

3329. Visa att vid ett party för 17 personer finns det (minst) tre som inbördes antingen är vänner, ovänner eller inte känner varandra.

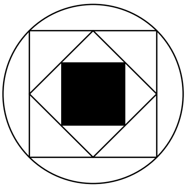
Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3330. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b.$$

3331. Tre kvadrater är inskrivna i en cirkel med diametern 34 cm som figuren visar. Täcker en kvadratisk skiva med sidokanten 12 cm den svarta kvadraten?



3332. Hur många av påståendena på lappen i nedanstående figur är falska?

På denna lapp står exakt ett falskt påstående.
På denna lapp står exakt två falska påståenden.
På denna lapp står exakt tre falska påståenden.
På denna lapp står exakt fyra falska påståenden.

3333. Visa att för alla reella tal $x > 0$, $x \neq 1$, gäller att

$$\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \leq \frac{\sqrt[3]{1+x}}{1+x}.$$

3334. I kvadraten $ABCD$ är E diagonalernas skärningspunkt. Bisektrisen till vinkeln CAD skär sidan CD i F och diagonalen BD i G. Beräkna längden av sträckan CF om sträckan EG är 24 cm.

3335. Visa att om koefficienterna i ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ alla är udda heltal så har ekvationen ingen rationell rot.

3336. I vidstående additionsproblem representerar de olika bokstäverna olika siffror. Vilken av de tio siffrorna är det som saknas i räkneschemat?

$$\begin{array}{r} A\,B \\ C\,D \\ E\,F \\ G\,H \\ \hline I\,I\,I \end{array}$$

3337. Det finns precis en vinkel α med $0 < \alpha < \pi/2$ sådan att

$$\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 1/2.$$

Visa detta och bestäm α.

3338. Visa att

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx \geq \frac{1}{2(n+1)}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

3339. Talen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ och $q_1, q_2, \ldots, q_n$ är alla positiva. Vidare gäller att $\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n q_j$. Visa att

$$\sum_{j=1}^n p_j \ln p_j \geq \sum_{j=1}^n p_j \ln q_j.$$