Årgång 64, 1981

Första häftet

Matematiska uppgifter

3220. Bestäm alla reella tal x för vilka

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} \geq \frac{1}{2}.$$

3221. Pelles och Palles sammanlagda ålder är 66 år. Pelle är dubbelt så gammal som Palle var när Pelle var hälften så gammal som Palle är när Palle är fyra gånger så gammal som Pelle var då Pelle var dubbelt så gammal som Palle. Hur gamla är Pelle och Palle?

3222. Finns det en uppsättning konsekutiva hela tal så att summan blir 2^{67}?

3223. Att $\ln(1+x) \geq \dfrac{x}{1+x}$ för alla $x \geq 0$ brukar stå i läroböcker i analys. Visa att olikheten går att förbättra genom att bestämma det minsta tal a för vilket $\ln(1+x) \geq \dfrac{x}{1+ax}$ för alla $x \geq 0$.

3224. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara olika heltal från mängden $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Visa att det finns i och j (inte nödvändigtvis olika) så att $a_i + a_j = n$.

3225. På hur många sätt kan man skriva ordet *MATEMATIK* genom att passera genom schemat nedan från en bokstav i en rad till en intilliggande bokstav i raden under?

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & M & & & & \\
 & & & A & & A & & & \\
 & & T & & T & & T & & \\
 & E & & E & & E & & E & \\
M & & M & & M & & M & & M \\
 & A & & A & & A & & A & \\
 & & T & & T & & T & & \\
 & & & I & & I & & & \\
 & & & & K & & & &
\end{array}$$

3226. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases}
x_1 x_1 = 1 \\
x_2 x_3 = 2 \\
x_3 x_4 = 3 \\
\quad \ldots \\
x_{16} x_{17} = 16 \\
x_{17} x_1 = 17.
\end{cases}$$

3227. Byt i nedanstående räkneschema varje x mot något av talen 2, 3, 5 eller 7 så att räkningarna stämmer.

$$\begin{array}{r} x\,x\,x \\ x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x \\ +\,x\,x\,x\,x \\ \hline x\,x\,x\,x\,x \end{array}$$

3228. Man väljer på måfå tre punkter på en cirkelperiferi. Denna delas då i tre delar som rätas ut till sträckor. Bestäm sannolikheten att man kan bilda en triangel av dessa sträckor.

3229. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1 \Big/ \binom{n}{k}.$$

Andra häftet

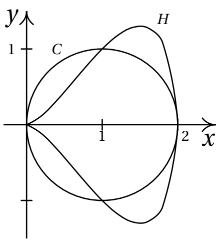
Matematiska uppgifter

3230. Låt α och β beteckna de reella rötterna till ekvationen $ax^2-2x+b=0$. Visa att om $\alpha\beta = 1$ så är $a^2 + b^2 \le 2$.

3231. Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen

$$x^y - y^x = x + y.$$

3232. Visa att areorna av de ytor som innesluts av cirkeln C och av den hjärtformade kurvan H med ekvationen $y^2 = 2x^3 - x^4$ (se fig) är lika stora.



3233. Lös ekvationen $\cos^7 x - \sin^7 x = 1$.

3234. Tre dödsdömda fångar, Adam, Bertil och Ceasar har sökt nåd. Fångarna vet att två av dem benådats men de vet inte vilka det är. Det vet däremot en vakt, Didrik, som under fångtiden blivit vän till Adam. Adam inser att det vore ofint att fråga Didrik om han själv blivit benådad men tänkte be honom tala om namnet på en av de andra fångarna som benådats. Adam vet att innan han frågar så är chansen att han själv benådats 2/3. Men, tänker Adam, om Didrik säger att exempelvis Bertil blivit benådad så har ju mina chanser minskat till 1/2, ty antingen är det då jag och Bertil eller är det Bertil och Ceasar som benådats. Därför avstår Adam från att fråga eftersom han inte vill reducera sina chanser att bli benådad. Men Adam har naturligtvis fel i sitt resonemang. Förklara vari felet ligger!

3235. Visa att

$$k\left(k^{1/(k-1)}-1\right)\geq 2$$

för alla heltal $k\geq 2$.

3236. En kvadrat med sidan 6 cm är täckt med dominobrickor av storleken 1 cm × 2 cm. Visa att man med ett rakt snitt kan dela kvadraten i två rektanglar utan att skära sönder någon av dominobrickorna.

3237. En talföljd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kallas konvex om

$$a_j - a_{j+1} \geq a_{j+1} - a_{j+2} \text{ för } j = 1, 2, 3, \ldots$$

Visa att för en konvex talföljd gäller att

$$\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n}$$

för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

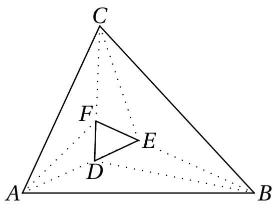
3238. Låt f vara en avtagande funktion sådan att

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1 \text{ och } \int_t^\infty f(x)\,dx \leq e^{-t} \text{ för alla } t \geq 0.$$

Visa att

$$f(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \leq x \leq 1, \\ \exp(1-x) & \text{för } x \geq 1. \end{cases}$$

3239. I en triangel ABC delas varje vinkel i tre lika stora delar. De (närliggande) linjer som delar vinklarna skär varandra i punkterna D, E och F. Visa att triangeln DEF är liksidig.



Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3240. Bestäm talet a så att kurvan $y = a^x$ tangerar linjen $y = x$.

3241. I nedanstående subtraktion betecknar de olika bokstäverna olika siffror. Vilka värden kan differensen anta?

$$\begin{array}{r} \text{S Å G} \\ -\,\text{G R Å} \\ \hline \text{G Å S} \end{array}$$

3242. Bestäm det största värde $|z^3 - z + 2|$ kan anta då z är ett komplext tal med $|z| = 1$.

3243. Visa att för varje positivt heltal n gäller

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3244. Som bekant gäller att $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ för alla reella tal x. Om vi sätter $f(y) = 2y^2 - 1$ så gäller alltså att $f(\cos x) = \cos 2x$. Finns det någon funktion g så att på motsvarande sätt $g(\sin x) = \sin 2x$?

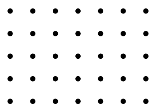
3245. På en symmetrisk tärning har några sidor förlorat sina prickar. Man räknar detta som att sidorna har noll prickar. Om man fördelar tre nya prickar på de övriga sidorna (ingen sidoyta får innehålla mer än sex prickar) har man lika stor chans att få ögonsumman 1, 2, 3, ..., 12 då tärningen kastas tillsammans med en vanlig tärning. Hur ser tärningen ut?

3246. Bland alla trianglar med största sidolängden 1 längdenhet väljs en triangel slumpmässigt. Vad är sannolikheten att triangeln är trubbvinklig?

3247. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} ab + ac = 2(a + b + c) \\ ac + bc = 4(a + b + c) \\ bc + ab = 8(a + b + c). \end{cases}$$

3248. I figuren är avståndet mellan två grannpunkter 1 längdenhet. Är det möjligt att rita en sluten figur av enhetssträckor där varje punkt kommer med en och endast en gång?



3249. Visa att det för en godtycklig triangel gäller att kvoten K mellan summan av medianernas längder och triangelns omkrets uppfyller $3/4 \le K \le 1$.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3250. Timvisaren och minutvisaren på en klocka bildar rät vinkel i ett visst ögonblick. Hur länge dröjer det innan detta inträffar igen?

3251. Visa att för $0 < x < \pi/2$ gäller att $x < (\sin x + \tan x)/2$.

3252. Beräkna

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}.$$

3253. Låt k och n vara positiva heltal. Visa att det finns n på varandra följande udda heltal vilkas summa är n^k.

3254. Slarvige Laban har sju par skor huller om buller inkastade i en garderob som saknar lyse. Laban tar på måfå ut fyra skor ur garderoben. Vad är sannolikheten att han får åtminstone ett maka par skor?

3255. Visa att om $0 < x_j < \pi$, $j = 1, 2, 3$, så är

$$\sin(x_1 + x_2 + x_3) \le \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3.$$

3256. Vilket av talen 3000! och 100^{3000} är störst?

3257. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en godtycklig följd av positiva tal. Visa att det finns oändligt många n för vilka

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}.$$

3258. Bestäm tre positiva heltal x, y och z så att

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

är ett heltal.

3259. Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}.$$