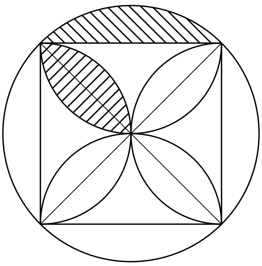
Årgång 63, 1980

Första häftet

Matematiska uppgifter

3180. Visa att $\dfrac{x^8+4x^6+7x^4+6x^2+3}{x^6+3x^4+4x^2+2} \geq \dfrac{3}{2}$ för alla reella tal x.

3181. Figuren nedan är gjord av en kvadrat och dess omskrivna cirkel samt fyra halvcirklar som går genom kvadratens centrum. Visa att de skuggade områdena i figuren har samma area och bestäm denna uttryckt i kvadratens sidolängd.



3182. Funktionerna f och g är positiva och kontinuerliga på $0 \leq x \leq 1$. Vidare är f växande och g avtagande. Visa att funktionen

$$H(t) = \int_0^t f(x)\,dx \Big/ \int_0^t g(x)\,dx, \quad 0 < t < 1$$

är växande. Visa även att påståendet är sant om kontinuerliga byts mot integrerbara.

3183. Visa att om a, b och c är vinklar i en triangel så är

$$\cos a + \cos b + \cos c \leq 3/2.$$

3184. Bestäm alla positiva heltal n för vilka $x^{3n} - x^{2n} + x - 1$ är delbart med $x^3 - x^2 + x - 1$.

3185. På en sträcka av längden 1 placeras två punkter slumpmässigt. Bestäm sannolikheten att avståndet mellan punkterna är högst k där $0 < k < 1$.

3186. Visa att det finns oändligt många positiva heltalslösningar till ekvationen $x^2 + xy + y^2 = z^2$.

3187. Visa att $(2m)! \cdot (2n)!/(m! \cdot n! \cdot (m+n)!)$ är heltal för alla positiva heltal m och n. Med $k!$ avses $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.

3188. Talföljden $a_0, a_1, a_2, \dots$ är definierad genom $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ för $n \geq 1$. För talföljden $b_0, b_1, b_2, \dots$ gäller att $a_{2n} = a_n b_n$. Visa att $b_1 = 1$, $b_2 = 3$ och $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ för $n > 1$.

3189. Visa att $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$ är ett heltal.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

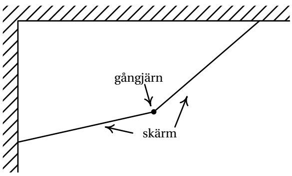
3190. Visa att om $0 < p < q$ så är

$$\frac{x^p - 1}{p} \leq \frac{x^q - 1}{q} \quad \text{för } x > 0.$$

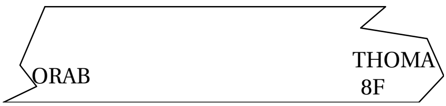
3191. Visa att produkten av det tal som består av n st treor och det tal som är en enhet större blir det tal som består av n ettor följt av n st tvåor. (För t ex $n = 2$ gäller $33 \cdot 34 = 1122$.)

3192. Visa att $\int_x^{x+1} \sin(t^2)\,dt \leq \frac{1}{x}$ för $x > 0$.

3193. Redaktören för Institutionsnytt (som utges vid Matematiska institutionen vid Uppsala universitet) var nyligen på en konferens i Nassau. Första natten var tyvärr alla rum upptagna varför han blev anvisad en säng i foajen bakom en skyddande skärm. Denna skärm bestod av två stycken fyra meter breda skivor förenade med gångjärn (se fig). Eftersom han hade svårt att somna ägnade han natten åt att räkna ut hur han skulle placera skärmen så att golvytan bakom skärmen skulle bli maximal. Han lyckades! Gör Du?



3194. Thomas tänkte konstruera en kvadrat, men hans illa hanterade linjal såg ut så här:



Linjalen är ograderad och papperet olinjerat. Hur ska Thomas bära sig åt?

3195. Med centrum i origo i ett ortonormerat koordinatsystem uppritas en cirkel A med radien $\sqrt{2}$. Med centrum i punkten $(0,1)$ uppritas en cirkel B med radien 1. Beräkna arean av den del av cirkeln B som faller utanför cirkeln A.

3196. Kalixkillen Kalle har länge extraknäckat i Nikkalaflickan Kickans godisaffär. Under tiden har han blivit något av en expert på att ur burken med lakritsbåtar plocka upp önskat antal. Om Du exempelvis ber om 20 lakritsbåtar missar han med högst en, dvs han tar 19, 20 eller 21 med ett enda tag av skopan. Antag att burken innehåller n lakritsbåtar och Du ber om j stycken så har varje delmängd med $j-1$, j och $j+1$ båtar samma sannolikhet att bli dragen av Kalle. Antag nu att Töretösen Tora går in och ber om ett slumpmässigt antal lakritsbåtar (från och med 0 till och med n) och låt $P(n)$ vara sannolikheten att Kalle tar precis rätt antal båtar. Beräkna $\lim_{n\to\infty} P(n)$.

3197. Låt $a > 0$. Sätt

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = a^{x_{n-1}}, \quad \text{för } n = 2, 3, 4 \ldots \end{cases}$$

Undersök för vilka värden på a som talföljden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ konvergerar.

3198. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{w} \end{cases}$$

3199. Låt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vara en följd av positiva tal med $a_0 = 1$. Antag att serien $\sum_{k=0}^{\infty} 1/a_k$ är divergent. Visa att för varje $x > 0$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}}{(a_1 + x)(a_2 + x)\ldots(a_k + x)} = \frac{1}{x}.$$

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3200. Det hittills största kända primtalet är Mersenneprimtalet $2^{44497} - 1$ (se H Riesel, ”Några nya Mersenneprimtal och stora primtalstvillingar”, Elementa 62 (1978), s 151). Bestäm antalet siffror i detta tal.

3201. I nedanstående multiplikation betecknar var och en av bokstäverna olika siffror. Vilken bokstav betecknar I?

$$\begin{array}{r} I\,N \\ \cdot\quad I \\ \hline B\,I\ L \end{array}$$

3202. Bestäm alla heltal, a, b och c som uppfyller $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$.

3203. Lös ekvationssystemet $x+yz=-y-xz=z+xy$.

3204. Visa att $ab\int_b^\infty \exp(-ax^2)\,dx \le \exp(-ab^2)$ om $ab^2>1$.

3205. Låt P vara en punkt inuti triangeln ABC. Beteckna vinklarna PAC, PAB, PBA, PBC, PCB och PCA med α, β, γ, δ, ε resp ζ. Visa att

$$\frac{\sin\beta\sin\delta\sin\zeta}{\sin\alpha\sin\gamma\sin\varepsilon}=1.$$

3206. Låt m vara ett heltal större än 1. Definiera

$$\begin{cases} m_1=m \\ m_j=m_{j-1}^2-m_{j-1}+1 \quad \text{för } j=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

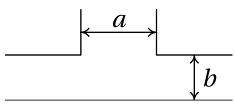
Visa att m_j inte är jämnt delbart med m för $j\ge 2$.

3207. Bestäm alla rötter till ekvationen

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

där p är en reell parameter.

3208. Ett vertikalt cirkulärt gruvhål med diametern a mynnar ut i ett stort underjordiskt rum med höjden b. Bestäm längden av den största stång som genom hålet kan nedföras till det underjordiska rummet.



3209. En symmetrisk tärning kastas upprepade gånger tills dess ögonsumman för första gången överstiger 12. Vilken är den mest sannolika ögonsumman efter sista kastet?

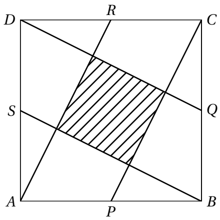
Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

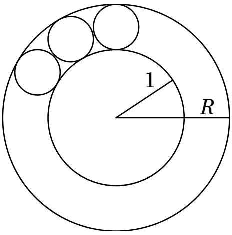
3210. Lös ekvationen $4 + {}^{x}\log 2 + {}^{2x}\log 8 = 0$.

3211. Bestäm alla polynom $p(x)$ som uppfyller $p''(x)p'(x) = p(x)$.

3212. Punkterna P, Q, R och S är mittpunkter på sidorna i kvadraten $ABCD$ som har sidolängden 1. Beräkna arean av den streckade kvadraten.



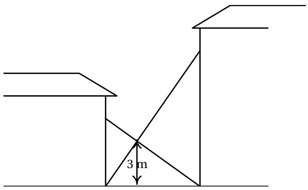
3213. Två cirklar med samma medelpunkt är givna. Radierna är 1 resp R, $1 < R$. Man ritar en följd av cirklar som tangerar varandra samt tangerar den inre cirkeln utantill och den yttre cirkeln innantill. Vilket är det största värdet på R för vilket cirklarna bildar en kedja?



3214. En magisk kvadrat av ordningen tre består av talen 1, 2, ..., 9 utplacerade på ett sådant sätt att alla radsummor, alla kolonnsummor och de båda diagonalsummorna är lika stora. Ett exempel ses i figuren. Kan något annat tal än 5 stå i den centrala cellen?

4	9	2
3	5	7
8	1	6

3215. Två stegar med längderna 8 och 12 meter är placerade mellan två byggnader som figuren visar. Bestäm, med tre korrekta decimaler, avståndet mellan husen i meter om stegarnas ”skärningspunkt” ligger 3 meter över marken. För den numeriska delen av problemet se t ex P Pohl, ”Enkla numeriska metoder”, Elementa 61 (1978), s 17–23.



3216. Visa att om två medianer i en triangel är lika långa så är triangeln likbent.

3217. Låt $P_1, P_2, \ldots, P_n$ med $n \geq 2$ vara ekvidistanta punkter på en cirkel med radien 1 och låt Q vara en godtycklig punkt på cirkeln. Visa att om $d(Q, P_j)$ betecknar avståndet mellan P_j och Q så är $d^2(Q, P_1) + d^2(Q, P_2) + \cdots + d^2(Q, P_n) = 2n$ oberoende av läget av Q.

3218. Funktionerna f och g är kontinuerliga och positiva. Vidare är f växande och g avtagande. Visa att

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)g(1-x)\,dx.$$

3219. En gummisnodd som från början har längden $l = 1\,\mathrm{m}$ har sin ena ändpunkt stadigt fäst vid en vägg. På gummibandets andra ände startar en spindel att gå in mot väggen med den konstanta hastigheten $v_0 = 1\,\mathrm{cm/s}$ (relativt gummibandet) samtidigt som denna ändpunkt dras rakt ut från väggen med med den konstanta hastigheten $c = 1\,\mathrm{cm/s}$. Hur lång tid tar det för spindeln att nå väggen?