Årgång 62, 1979

Första häftet

Matematiska uppgifter

3140. Älgjägaren Allbom skjuter ett skott mot något som rör sig i skogsbrynet och som kan antas vara en älg. Kulans läge beskrivs av $(0,0,3/2)+t(303,602,-3/2)$. Skogvaktaren Bertil som hopkurad lunkar omkring i skogsbrynet kan beskrivas som ett klot med radien $1/2$ och centrum i $(802,1599,2)+t(3,2,0)$. Hur går det för Bertil? (Koordinaterna är angivna i ett ortonormerat koordinatsystem.)

3141. Kring det runda bordet på sjörövarskeppet sitter 10 vänner som ska dela på en just erövrad skatt på 100 guldmynt. Då föreslår Birkabasen Benke (som är synnerligen avlägsen släkting till problemredaktören) att skatten ska delas så att var och en får medelvärdet av de belopp som hans två bordsgrannar får. Bestämmer detta villkor entydigt hur skatten ska fördelas mellan sjörövarna?

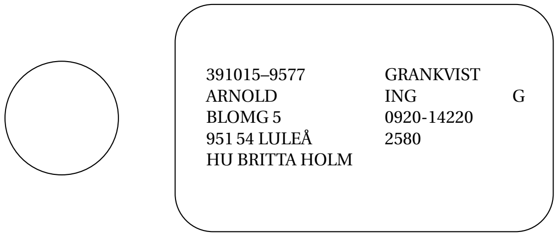
3142. Ett tal kallas palindromiskt om det ser likadant ut framlänges och baklänges (exempelvis 12321, 1178711 och 141). Visa att varje palindromiskt heltal med jämnt antal siffror är delbart med 11. Gäller påståendet även för palindromiska tal med udda antal siffror?

3143. I en tennisturnering deltar 8 helt jämnbra spelare. De möts två och två i utslagningsmatcher varvid segraren går vidare till nästa omgång. Bland de åtta deltagarna finns tvillingarna Rulle och Julle. Vad är sannolikheten att dessa två möts någon gång under turneringen?

3144. Bestäm alla funktioner f som uppfyller

$$3\cdot f(x)-f(2-x)=2x^2+4x.$$

3145. Arnold satt på Arlandas servering och väntade på Luleå-planet. Utan anledning hade han på en servett ritat en cirkel genom att följa konturerna på en enkrona. ”Undrar just var cirkelns medelpunkt ligger”, tänkte Arnold. Han hade varken passare eller linjal till hands. Efter en stunds letande i plånboken kunde han konstatera att det enda vettiga hjälpmedel som han kunde hitta var patientbrickan av plast som han fått på lasarettet. Är det möjligt att med patientbrickans hjälp konstruera cirkelns medelpunkt?



3146. I ett rätblock är längderna av sidokanterna heltal. Dessutom är längden av en av diagonalerna i sidoytorna och rymddiagonalen heltal. Visa att rätblockets volym är delbar med 144.

3147. Funktionen f har positiv derivata på $[0,1]$. Bestäm a så att

$$\int_0^1 |f(t)-a|\,dt$$

blir så liten som möjligt.

3148. Sätt $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$. Visa att $n + S_n \geq n(n+1)^{1/n}$.

3149. Låt a vara ett positivt heltal och sätt $r = \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$. Visa att det för varje n finns ett positivt heltal a_n så att

$$\begin{cases} r^{2n} + r^{-2n} = 4a_n + 2, \\ r^n = \sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_n}. \end{cases}$$

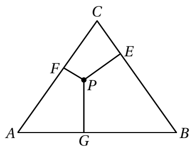
Andra häftet

Matematiska uppgifter

3150. Erik är 42 år. Han är tre gånger så gammal som Lisa var när Erik var lika gammal som Lisa är nu. Hur gammal är Lisa?

3151. Bestäm alla heltal a och b så att $a + b = ab$.

3152. Triangeln ABC är liksidig. P är en godtycklig punkt innanför triangeln. Visa att $PE+PF+PG$ är oberoende av läget på P.



3153. Bestäm maximala och minimala antalet "fredag den 13" som kan inträffa på ett år.

3154. Låt a_j vara tal med $(j-1)/n \le a_j \le j/n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \sqrt[n]{(1+a_j^2)^{a_j}}.$$

3155. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $0 \le x \le 1$. Antag att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \cdots = \int_0^1 x^{n-1} f(x)\,dx = 0$$

och $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 1$. Visa att det finns ett intervall I så att

$$|f(x)| \ge 2^n(n+1) \quad \text{för } x \in I.$$

3156. Låt a, b, c, d, e och f representera heltalen från 1 till 6 i någon ordning. Antag att $a+b < c+d$ och $c+e < a < f$. Bestäm vilken bokstav som står för vilken siffra.

3157. Visa att om a är ett reellt tal sådant att $\cos a\pi = \dfrac{1}{3}$ så är a irrationellt. (Vinkelns mått i radianer.)

3158. Låt $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ vara en alternerande serie där såväl $(a_k)_1^{\infty}$ som $(b_k)_1^{\infty}$, där $b_k = a_k - a_{k+1}$, avtar mot 0. Visa att om s betecknar seriens summa och $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, så är $|s_n - s| \le a_n/2$.

Visa att om även $(c_k)_1^{\infty}$, där $c_k = b_k - b_{k+1}$, avtar mot 0, så är $|\overline{s}_n - s| \le b_{n-1}/4$, där $\overline{s}_n = (s_n + s_{n-1})/2$.

Visa att om även $(d_k)_1^{\infty}$, där $d_k = c_k - c_{k+1}$, avtar mot 0, så är $|\overline{\overline{s}}_n - s| \le c_{n-2}/8$, där $\overline{\overline{s}}_n = (\overline{s}_n + \overline{s}_{n-1})/2$.

Bestäm med ledning av ovanstående

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k+1}, \text{ med ett fel} \le 0.0002,$$

och

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}, \text{ med ett fel} \le 0.0003.$$

3159. Visa att $\dfrac{1+x+\cdots+x^n}{n+1} \ge \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n$ för alla $x \ge 1$.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3160. Talet A är 60% större än talet B. Hur många procent mindre är talet B än talet A?

3161. Lös $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=2$ för $a \geq 1$.

3162. En skuld amorteras med lika stora årliga belopp under mycket lång tid (detta innebär att annuiteterna i början praktiskt taget helt går åt till ränta). Man finner att de sista 9 åren behövs för att amortera sista hälften av skulden. Bestäm den (fasta) räntefoten.

3163. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

som är erhållen ur multiplikationstabellen för heltalen 1, 2, 3 och 4 modulo 5. Visa att varje undermatris till A som fås genom att stryka en rad och en kolonn i A har en determinant som är en heltalsmultipel av 25.

3164. Bokstäverna $AEEELMNT$ är givna. Man skriver ner alla bokstavskombinationer i alfabetisk ordning. På vilken plats kommer $ELEMENTA$?

3165. Betrakta de komplexa talen $x = 1 + i\sqrt{3}$, $y = 1 - i\sqrt{3}$ och $z = 2$. Visa att $x^j + y^j = z^j$ för alla j som kan skrivas på formen $6n+1$ eller $6n-1$ för något positivt heltal n.

3166. Hur många gånger på ett dygn står timvisaren och minutvisaren på en klocka vinkelrätt mot varandra?

3167. Man viker ett kvadratiskt pappersark fyra gånger och vecklar ut det igen. Visa att det går att vika så att man åstadkommer tre vinklar vilkas tangens är 1, 2 resp 3.

3168. Visa att det finns irrationella tal a och b så att a^b är rationellt. Visa även att a^b kan bli irrationellt.

3169. Beräkna $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3170. Pitepilten Pelle som är och firar jul hos sin moster Töretösen Tora har fått i uppdrag att handla ägg på Mattes snabbköp i Kalix. När han kommer tillbaka säger han till Tora: Jag betalade 12 kr för äggen. Men eftersom de var ganska små fick jag två ägg extra. På så sätt fick jag betala ett pris som var en krona lägre per dussin än vad jag skulle betalat om jag inte fått de två extra äggen. Hur många ägg köpte Pelle?

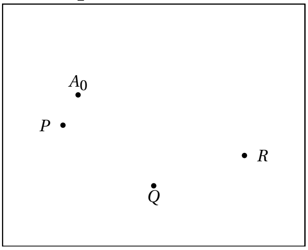
3171. Visa att $\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) > (n+1)e/2$ för $n > 1$.

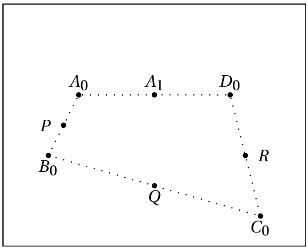
3172. Finns det tal x och y sådana att $x+y=1$, $x^2+y^2=2$ och $x^3+y^3=3$?

3173. Bestäm det minsta värde som $2x+5y+z$ kan anta då $x+2y \geq 4$, $2x+5y \geq 9$ och $y+2z \geq 5$.

3174. Lös olikheten $\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} \leq 2x+9$.

3175. I planet väljer man tre punkter P, Q och R som inte ligger på linje. Med en iterativ metod önskar man konstruera en triangel ABC så att P blir mittpunkt på AB, Q blir mittpunkt på BC och R blir mittpunkt på CA. Metoden går till så här (observera att problemet är löst om läget för t ex A är fastlagt): Som en begynnelseapproximation av A väljer man på måfå en startpunkt A_0 (dock inte P). Därefter konstrueras i ordning B_0, C_0 och D_0 så att P, Q resp R blir mittpunkt på A_0B_0, B_0C_0 resp C_0D_0. Mittpunkten på D_0A_0 kallas nu A_1 och utgör en första approximation av A. Proceduren upprepas sedan utifrån A_1. Man får en följd av punkter $A_1, A_2, \ldots$. Visa att iterationsförfarandet efter ett ändligt antal steg ger en exakt lösning, dvs det finns ett n så att $A_n = A$. Kan något sägas om värdet på n?





3176. Medianerna AN och BP i en triangel ABC med olika långa sidor är 3 resp 6 cm. Triangelns area är $3\sqrt{15}$ cm^2. Bestäm längden av den tredje medianen CM.

3177. Beräkna summan av alla siffror i heltalen från och med 1 till och med 1 000 000 000 (dvs en miljard).

3178. Man placerar på måfå n kulor i m urnor. Låt E_n beteckna väntevärdet för antalet tomma urnor. Visa att $E_{n+1} = (1 - 1/m)E_n$ och bestäm E_n med hjälp av detta.

3179. Funktionen f har kontinuerlig derivata för $0 \leq x \leq 1$. vidare är $f(0) = 0$ och $0 \leq f'(x) \leq 1$. Visa att

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geq \int_0^1 \big(f(x)\big)^3\,dx.$$