Årgång 61, 1978

Första häftet

Matematiska uppgifter

3100. Visa att $A_n = \left((5+\sqrt{21})^n + (5-\sqrt{21})^n\right)\cdot 2^{-n}$ är heltal för alla positiva heltal n.

3101. När pitepilten Pelle är hälften så gammal som Kalixkillen Kalle är när Kalle är tre gånger så gammal som Kalle är nu, är Kalle fem gånger så gammal som Pelle är nu. Varken Pelle eller Kalle är myndig. Hur gamla är Pelle och Kalle?

3102. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ är konvergent med summan s. Visa att $19/12 < s < 7/4$.

3103. Lös ekvationen $4x^4 - 8x^3 + 5x^2 - x + 0.0624 = 0$ exempelvis genom att först göra variabelbytet $x(x-1) = t$.

3104. Visa att $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

3105. Av ett gammalt recept framgår att degen till ”mormors smörringar” tillverkas av smör, socker, vetemjöl och skummjölkspulver. Tyvärr framgår det ej av receptet i vilka proportioner dessa ingredienser skall blandas. däremot kan man utläsa att 100 g deg till ”mormors smörringar” 24,1 g fett, 55 g kolhydrater, 7,5 g protein och 500 kcal. Vidare slår man upp följande data om innehållet i 100 g av de aktuella ingredienserna

	fett	kolhydrat	protein	kcal
smör	80	0	0	800
socker	0	100	0	400
vetemjöl	0	75	10	350
skummjölkspulver	1	50	35	400

Bestäm det recept som räcker till 500 g deg till ”mormors smörringar” ($\approx$ 60 kakor).

3106. Låt AB och CD vara vinkelräta diametrar i en cirkel. Låt P vara en godtycklig punkt på cirkelns periferi. Linjen genom P och A skär linjen genom C och D i punkten E. Linjen genom E parallell med AB skär linjen genom P och C i F. Visa att D, B och F ligger på en linje.

3107. En korda dras slumpmässigt i en cirkel. Vad är sannolikheten att kordan är längre än cirkelns radie?

3108. Bestäm alla deriverbara funktioner som uppfyller

$$f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

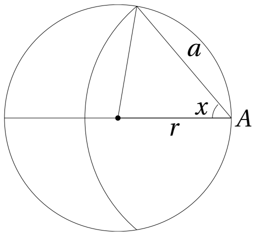
för alla reella tal x och y.

3109. En bonde med en cirkulär äng binder fast en get med ett rep i punkten A. Han vill att geten ska beta av exakt halva ängen.

a) Visa att han då ska välja repet så långt att

$$2x\cos 2x - \sin 2x + \pi/2 = 0.$$

b) Bestäm x, och därmed repets längd, exempelvis genom att utnyttja Newton-Raphsons metod.



Andra häftet

Matematiska uppgifter

3110. Bevisa Menelaos sats: Punkterna P_1, P_2 och P_3 ligger på sidorna AB, BC respektive CA i triangeln ABC så att $\overline{AB} = k_1\overline{P_1B}$, $\overline{BP_2} = k_2\overline{P_2C}$ och $\overline{CP_3} = k_3\overline{P_3A}$.Visa att P_1, P_2 och P_3 ligger på en linje precis då $k_1k_2k_3 = -1$. (Menelaos var en grekisk matematiker som levde ca 100 e Kr.)

3111. Lös ekvationen $\sqrt{a+\sqrt{x+a}} = x$.

3112. Visa att $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{999999}{1000000} < \frac{1}{1000}$.

3113. Lös kryptaritmen $\dfrac{\begin{array}{c}ETT\\ TU\end{array}}{TRE}$ där TRE givetvis är ett udda tal.

3114. Låt z_1, z_2 och z_3 vara komplexa tal sådana att

(i) $z_1z_2z_3 = 1$,

(ii) $z_1 + z_2 + z_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$.

Visa att minst ett av talen z_1, z_2 och z_3 är lika med 1.

3115. En klass har haft provräkning i matematik. Pitepilten Pelle hade 70% av uppgifterna rätt och Kalixkillen Kalle hade 80% av uppgifterna rätt. 16 av provräkningsuppgifterna hade både Pelle och Kalle klarat. Hur många uppgifter fanns på provet?

3116. Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/(2k+1)!$. Det förutsättes bekant att $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$ samt att $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$.

3117. En kvadrat delas in i n^2 lika stora delkvadrater med hjälp av vertikala och horisontella linjer. Visa att antalet rektanglar som inte är kvadrater är $(n-1)n(n+1)(3n+2)/12$.

3118. Bestäm alla polynom som uppfyller $P(x) = \frac{1}{2}\big(P(x+1) + P(x-1)\big)$.

3119. Funktionen f är kontinuerlig och $f(x) \geq 0$ för $0 \leq x \leq 2$. Visa att om

$$\int_0^1 e^{-ax} f(x)\,dx \leq \int_0^2 e^{-ax} f(x)\,dx$$

för alla $a > 0$, så är $f(x) = 0$ för alla x med $0 \leq x \leq 1$.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3120. På den tiden då det ännu fanns ettöringar och tvåöringar bad pitepilten Pelle tanten i godisaffären att få några tvåöresbitar, tio gånger så många ettöresbitar och femöreskola för resten av veckopengen som var en krona. Tanten som var amatörmatematiker och regelbundet löste problemen i Elementas problemavdelning hade inga besvär att expediera Pelle. Vad fick han?

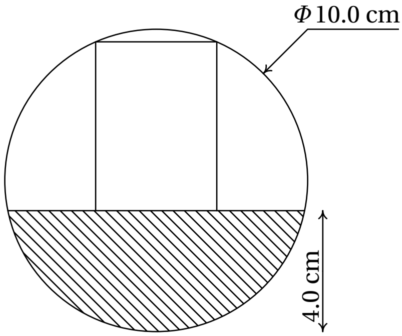
3121. Kalixkillen Kalle var på väg hem från Umeå i sin bil. Vid ett tillfälle observerade han att vägmätaren visade på 16961 km. Han lade märke till att detta tal är palindromiskt, dvs lika baklänges och framlänges. Efter ytterligare en timmes körning visade vägmätaren ånyo ett palindromiskt tal. Vilken medelfart hade bilen haft under denna tid?

3122. Visa att determinanten

$$\begin{vmatrix} \sin(x+y) & \sin(2x+y) & \sin(3x+y) \\ \sin(4x+y) & \sin(5x+y) & \sin(6x+y) \\ \sin(7x+y) & \sin(8x+y) & \sin(9x+y) \end{vmatrix} = 0.$$

3123. Lös ekvationen $2 \arcsin x = \arccos x$.

3124. En mekanisk verkstad tillverkar för en kunds räkning metallbleck i form av ett cirkelsegment som skärs ut från cirkulära skivor med diametern 10,0 cm (streckade delen av figuren). Man skär bara bort et segment från varje cirkelskiva. Av resten kan man nämligen få ut en rektangulär bit, som en annan kund behöver (en tänkbar sådan är ritad i figuren). Avgör hur man skall skära för att rektangelarean skall bli så stor som möjligt.



3125. Visa att varje tal som består av n st ettor följda av $n-1$ stycken femmor och sist en sexa (exempelvis 1156, 11 156 och 11 115 556) är kvadrat på ett heltal.

3126. Det berättas att man i det gamla Ryssland spådde giftaslystna flickor på följande sätt. En flicka höll sex grässtrån i handen så att ändarna syntes upptill och nertill. En annan flicka knöt sedan ihop de övre ändarna två och två och de undre ändarna två och två. Om grässtråna då bundits ihop så att de bildar en ring skulle den flicka som knöt ihop stråna gifta sig inom ett år. Hur stor är sannolikheten för detta?

3127. – Det finns alltid en gnutta sanning i vad folk säger, sa kriminalkommissarien. Brottslingar har i allmänhet klart för sig att det lönar sig att krypa nära sanningen. Titta på de här protokollsutdragen från våra vittnesförhör i fallet Svensson! Jag råkar veta att varje vittne lämnade två sanna uppgifter inflikade bland tre lögner.

Han gav konstapeln de fyra protokollsutdragen.

”Solo” Vårman uppger: Svensson sköts med en Luger vid Stadshuskajen kl 22. Kroppen kastades i vattnet. ”Fingret” Lång är mördaren.

”Fingret” Lång: Svensson mördades med en Weber i Vasastan kl 21. Kroppen kastades i vattnet. ”Cassius” Spräng gjorde det.

”Cassius” Spräng: Svensson sköts med en Weber vid Stadhuskajen kl 23. Kroppen forslades undan med bil. ”Knarken” Knorrbom gjorde det.

”Knarken” Knorrbom: Svensson mördades med en Luger i Hammarby vid midnatt. Kroppen gömdes i en sandlåda. ”Solo” Vårman gjorde det.

– Jag förstår, sa konstapeln. Men han såg fundersam ut.

– Då ska du sammanställa fakta åt mig. Du vet vad jag menar – vapen, plats, tid, hur liket undanröjdes. Ja, en sak till förstås – mördaren!

3128. Visa att $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ är delbart med 5 precis då n ej är delbart med 4.

3129. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot e^{-n} = 1$. (Eftersom varken förslagsställaren eller problemredaktören känner till någon enkel lösning på problemet ombedes läsekretsen att sända in eventuella lösningar.)

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3130. Vid utgrävningar fann man följande lapp

$m^2 - 11m + 52 = 0$ så $m = 7$ eller
$n^2 = 25$ så $n =$

Som framgår av lappens innehåll använde man en annan bas än 10. Vilken? Lös även ekvationerna fullständigt.

3131. Visa att om de motstående sidorna i en fyrhörning (som ej nödvändigtvis ligger i ett plan) är parvis lika långa så är linjen genom diagonalernas mittpunkter ortogonal mot båda diagonalerna. Visa även omvänt att om linjen genom diagonalernas mittpunkter är ortogonal mot de båda diagonalerna så är de motstående sidorna lika långa.

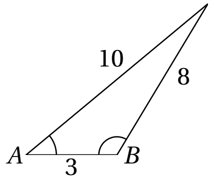
3132. Beräkna $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.

3133. Fem punkter är slumpmässigt utplacerade på en kvadratisk skiva med sidolängd 1. Visa att det finns två punkter vars avstånd är högst $1/\sqrt{2}$.

3134. Visa utan att använda räknedosa att $\dfrac{\pi^4}{(1+\pi^2)^{3/2}} < \dfrac{11}{4}$.

3135. Låt a och b vara rationella tal sådana att såväl ab som $a+b$ är heltal. Visa att a och b är heltal.

3136. Visa att för triangeln i figuren gäller att $B = 3A$. (Ett annat problem med heltalssidor och rationellt förhållande mellan vinklarna är uppgift 3091. Den intresserade hänvisas även till T. Öberg, ”Heltalstrianglar med rationellt förhållande mellan vinklarna”, Elementa 42(1959), s 181–183.)



3137. Visa att polynomet $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ är delbart med $x^4+x^3+x^2+x+1$.

3138. Visa att $1998 < \sum_{n=1}^{10^6} 1/\sqrt{n} < 1999$. (Ledning: Visa och utnyttja att $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < 1/\sqrt{n} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.)

3139. Visa att polynomet $1+z^2+z^5+z^{17}$ inte har något nollställe z med $|z| < (\sqrt{5}-1)/2$. Visa även att samma sak gäller för polynomet $1+z^{n_1}+z^{n_2}+\cdots+z^{n_k}$ där $n_1, n_2, \ldots, n_k$ är heltal med $n_1 \le n_2 < \cdots < n_k$.