Årgång 59, 1976

Första häftet

Matematiska uppgifter

3020. Lös på enklaste sätt ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x+7y+3v+5u &= 16\\ 8x+4y+6v+2u &= -16\\ 2x+6y+4v+8u &= 16\\ 5x+3y+7v+u &= -16 \end{aligned}$$

(Svar: $x=v=-2$ och $y=u=2$)

3021. Låt a och b vara två tal med $0\le a\le 1$ och $0\le b\le 1$. Visa att för alla x och y med $0\le x\le y$ gäller att

$$a^b y^b + (1-a^b)x^b \ge (ay+(1-a)x)^b$$

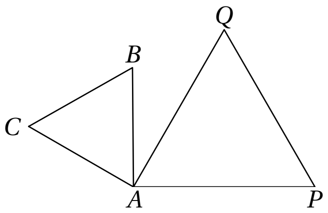
3022. I en cirkel med radien r dras kordan AB. Låt M vara mittpunkten på cirkelbågen AB och låt O vara cirkelns medelpunkt. $ABCD$ är en rektangel där sidan CD tangerar cirkeln i M. Låt nu R beteckna arean av rektangeln $ABCS$, S arean av segmentet ABM och v vinkelm AOM. Beräkna $\lim_{v\to 0} S/R$.
(Svar: $2/3$)

3023. Visa att talföljden $\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \ldots$ inte är konvergent.

3024. Visa att om $P(x)$ är ett reellt polynom med enkla reella nollställen så har ekvationen $(P'(x))^2 - P(x)P''(x) = 0$ ingen reell rot.

3025. Trianglarna ABC och APQ i figuren är liksidiga.

1) Visa att sträckorna CQ och BP är lika långa.
2) Bestäm vinkeln mellan CQ och BP.



(Svar: 60°)

3026. Visa att ekvationen $\sin x = \lg x$ har precis tre rötter.

3027. Man genererar ett femsiffrigt slumptal. Bestäm sannolikheten att det är av typen 13 459, dvs siffrorna i talet bildar en strängt växande följd.
(Svar: 0,002 52)

3028. Det påstås att Catalan 1876 observerade att med $p_0 = 2$ och $p_{n+1} = 2^{p_n} - 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ så fick han primtal för $n = 0, 1, 2, 3$ och 4. Han undrade då om p_n är primtal för alla n. Han klarade emellertid aldrig av att undersöka ens p_5 därför att talen i följden växer väldigt snabbt. Sålunda innehåller p_5 ungefär 10^{38} siffror. Kan du visa det?

3029. Visa att heltalsdelen av $(2+\sqrt{3})^n$ är udda för alla positiva heltal n. (Med heltalsdelen av 6,567 menas heltalet 6.)

Andra häftet

Matematiska uppgifter

3030. Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 20x + 6y + z = 200 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

(Svar: $x = 5$, $y = 1$, $z = 94$)

3031. Visa att det finns tre rationella tal x, y och z som inte är heltal men som gör $x + y + z$ and produkten xyz till heltal.

3032. Ett klot med given radie är inskrivet i en rak cirkulär kon. Visa att när konens volym är minimal så är dess toppvinkel $2\arcsin(1/3)$.

3033. I parallellogrammet $ABCD$ är vinkeln $A < 90°$. Visa att $|\overline{AC}| \geq \left(|\overline{AB}| + |\overline{BC}|\right)/\sqrt{2}$ där $|\overline{PQ}|$ betecknar avståndet mellan P och Q.

3034. Låt a och b vara hela tal sådana att $a + b$ och $a^2 + b^2$ båda är delbara med 7. Visa att både a och b är delbara med 7. Visa även att påståendet är falskt om 7 byts mot 49.

3035. Betrakta följande egenskaper för en funktion definierad för $x \geq 0$ och med $f(0) = 0$:

1. $f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$ för alla a med $0 \leq a \leq 1$, dvs f är konvex
2. $x \mapsto f(x)/x$ är växande, dvs f är stjärnformad
3. $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ för alla $x \geq 0$ och $y \geq 0$, dvs f är superadditiv.

Visa att egenskap 1. medför egenskap 2. och att egenskap 2. medför egenskap 3. Fundera också på om villkoret $f(0) = 0$ är väsentligt för slutsatsen och om det är möjligt att vända på implikationerna.

3036. Talföljderna $a_1, a_2, a_3, \ldots$ och $b_1, b_2, b_3, \ldots$ är givna av rekursionsformlerna $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ och $b_{n+1} = 2a_n b_n$ samt begynnelsevärdena $a_1 = 3$ och $b_1 = 2$. Visa att $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

3037. Funktionen f är två gånger kontinuerligt deriverbar för $x \geq 0$. Vidare är $f(x) = 1 + x^2 g(x)$ där g är en begränsad funktion. Visa att g är deriverbar för $x > 0$ och att $xg'(x) \to 0$ då $x \to 0$, $x > 0$.

3038. Funktionen f och dess derivator f' och f'' är kontinuerliga. Vidare gäller att $\|f\| \leq 1$ och $\|f''\| \leq 2$ där $\|g\| = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$. Visa att $\|f'\| \leq 3$.

3039. Visa att det finns en kontinuerlig funktion f sådan att $\int_0^1 f(x) \sin x \, dx = 1$ och $\int_0^1 f(x) \cos x \, dx = 2$.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3040. Visa att om $x + y + z = 0$ så är determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = 0$

3041. Hur många kort ska man dra utan återläggning ur en vanlig kortlek för att sannolikheten att få exakt ett ess ska bli så stor som möjligt?

(Svar: 13)

3042. Låt a, b, c, d, e och f vara heltalen från och med 1 till och med 6 i någon ordning. Tala om vilken bokstav som svarar mot vilken siffra om Du får reda på att $a + b < c + d$ och $c + e < a < f$.

3043. Visa att en triangels höjder kan vara 11, 21 och 22, men inte 10, 20 och 21.

3044. Funktionen f är kontinuerlig i en omgivning av a och deriverbar i a. Visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_a^{a+h} [f(t) - f(a)]\, dt = \frac{f'(a)}{2}.$$

3045. Du har sex olika punkter. Drag alla möjliga sammanbindningslinjer mellan två punkter med hjälp av en röd penna och en blå penna. Visa att det måste finnas minst en triangel vars sidor har samma färg.

3046. Vi säger att en tipsrad är sammanhängande om det efter varje 1 följer 1 eller x och efter varje 2 följer x eller 2. Visa att det finns $\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^{14}+(\sqrt{2}-1)^{14}\right]$ olika sammanhängande tipsrader med 13 matcher.

3047. Sätt $f_0(x) = e^x$ och $f_{n+1}(x) = x f_n'(x)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Visa att $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)/n! = e^e$.

3048. Funktionen f är två gånger deriverbar. Vidare gäller att f'' är begränsad och $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar. Visa att $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

3049. Bestäm summan av alla heltal n med $1 \le n \le 300$ som är delbara med 3, 5 eller 7.

Fjärde häftet

3050. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ &x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ &x_3 + x_4 + x_5 = 0\\ &\ldots\\ &x_{10} + x_{11} + x_{12} = 0\\ &x_{11} + x_{12} + x_1 = 0\\ &x_{12} + x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

(Svar: $x_1 = x_4 = x_7 = x_{10} = s$, $x_2 = x_5 = x_8 = x_{11} = t$, $x_3 = x_6 = x_9 = x_{12} = -s - t$ där s och t är godtyckliga tal)

3051. En kvaternion är tal av typen $a + bi + cj + dk$, där a, b, c och d är reella tal medan det för i, j och k gäller

$$\begin{array}{lll} 1i = i1 = i & ij = -ji = k & i^2 = -1\\ 1j = j1 = j & jk = -kj = i & j^2 = -1\\ 1k = k1 = k & ki = -ik = j & k^2 = -1 \end{array}$$

Visa att $(1 + i + j + k)^{99} = -2^{99}$.

3052. Kalixkillen Kalle har i Porsöfjärden hittat en flaska i vilken det fanns följande beskrivning över en nedgrävd skatt:

”Gå från galgen till eken. Fortsätt en lika lång sträcka vinkelrätt åt vänster. Stick ner en kniv i marken. Gå tillbaka till galgen. Gå från galgen till tallen. Fortsätt en lika lång sträcka vinkelrätt åt höger. Skatten är nedgrävd mitt emellan Dig och kniven.”

Kalle uppsöker platsen finner han till sin stora besvikelse att galgen är försvunnen. Han konsulterar då sin vän pitepilten Pelle som kan räkna med vektorer. Med Pelles hjälp kommer Kalle åt skatten. Hur?

3053. Bestäm alla trianglar med egenskapen att samtliga sidolängder är heltal och att arean är lika stor som omkretsen.

(Svar: Det finns fem stycken nämligen de med sidolängder 6, 25 och 29; 7, 15 och 20; 9, 10 och 17; 5, 12 och 13 samt 6, 8 och 10)

3054. Visa att det finns positiva rationella tal a och b med $a \neq b$ samt a och b ej heltal för vilka $a^b = b^a$.

3055. Man placerar slumpmässigt tre punkter på en cirkelperiferi. Visa att sannolikheten att punkterna ligger inom en halvcirkel är $3/4$.

3056. Visa att det för varje val av de positiva heltalen k och n finns ett positivt heltal m som är delbart med k och som uppfyller att $\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^n = \sqrt{m+1}+\sqrt{m}$.

3057. Låt P vara matrisen $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ och $P^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n \end{pmatrix}$. Låt vidare P^∞ vara den matris vars element är $a_{ij}^\infty = \lim_{n\to\infty} a_{ij}^n$. Visa att $P^\infty = \begin{pmatrix} a_{11}^\infty & a_{12}^\infty \\ a_{21}^\infty & a_{22}^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ledning: Om $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ så blir $P^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

3058. Låt $\sum_{k=1}^\infty a_k$ vara en serie med partialsummorna $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Visa att om $a_k > 0$ för alla k så är $\sum_{k=1}^\infty (a_k/s_k)$ divergent om $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är divergent.

b) Visa att om vi tillåter godtyckligt tecken på a_k så finns det divergenta serier $\sum_{k=1}^\infty a_k$ för vilka $\sum_{k=1}^\infty (a_k/s_k)$ är konvergent.

3059. Femtonspelet går som bekant ut på att flytta femton kvadratiska brickor vertikalt och horisontellt för att därigenom uppnå en viss sifferföljd. En hel del siffermönster är dock omöjliga att uppnå. Visa exempelvis att man inte kan flytta så att sifferföljden i vänstra figuren ändras till den i den högra figuren.