Årgång 58, 1975

Första häftet

Matematiska uppgifter

2984. Visa att om A, B och C är vinklar i en triangel så är

$$\frac{1}{\tan A+\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{1}{\cot A+\cot B}$$

2985. Visa att för alla positiva heltal n gäller att

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\frac{1}{j+1}=\frac{1}{n+1}.$$

2986. Undersök om det finns några rätvinkliga trianglar där kateternas längder är två på varandra följande udda heltal och hypotenusans längd också är ett heltal.

2987. Visa att $e^{\pi/4}<1+\dfrac{4}{\pi}$.

2988. Ett kvadratiskt bord är indelat i kvadrater med sidolängden 5 cm. Ett mynt med diametern 2 cm kastas slumpmässigt ner på bordet. Beräkna sannolikheten att myntet hamnar helt innanför någon av kvadraterna. (Myntet får tangera kvadratens sidokant.)
(Svar: 9/25)

2989. Visa att n:te derivatan av $\tan x$ är ett heltal i punkten $\pi/4$.

2990. Bestäm alla heltal n för vilka 2^n+1 är delbart med 3.
(Svar: Alla udda heltal)

2991. Visa att om $x>y>0$ så är $\dfrac{\ln x-\ln y}{x-y}>\dfrac{1}{x+y}$.

2992. Låt p vara ett reellt tal med $0\le p\le 1$ och låt x_1 och y_1 vara givna positiva reella tal. Sätt för $n\ge 2$

$$\begin{cases} x_n=px_{n-1}+(1-p)y_{n-1}\\ y_n=px_{n-1}^{-1}+(1-p)y_{n-1}^{-1}.\end{cases}$$

Visa att de båda följderna $x_1, x_2, x_3,\ldots$ och $y_1, y_2, y_3,\ldots$ är konvergenta.

2993. Sätt $f_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$.
a) Visa att

$$f_n(x)=\frac{\sin[(2n+1)x/2]}{\sin(x/2)}$$

b) Visa att om $E_n = \int_0^{\pi} x f_n(x)\, dx$ så är

$$E_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right]$$

c) Visa att

$$E_{2n-1} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

d) Visa att om $g(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x/2}{\sin(x/2)}\right)$ så är

$$E_{2n-1} = \frac{1}{4n-1} \left[2 + 2 \int_0^{\pi} g(x) \cos[(4n-1)x/2] \right] dx$$

e) Använd resultatet i d) för att visa att $\lim_{n\to\infty} E_{2n-1} = 0$

f) Använd resultaten i c) och e) för att visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Andra häftet

Matematiska uppgifter

2994. Av två urnor innehåller den ena 3 vita och 6 svarta kulor och den andra 7 vita och 3 svarta. Man tar på måfå 3 kulor ur vardera urnan. Vad är sannolikheten att man tar samma antal vita kulor ur båda urnorna?

(Svar: 1067/5040)

2995. Låt a vara ett positivt tal skilt från 1. Lös ekvationen

$$\sqrt{{}^{a}\log \sqrt[4]{ax} + {}^{x}\log \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{{}^{a}\log \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + {}^{x}\log \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$$

(Svar: a^{a^2} och $a^{a^{-2}}$)

2996. Visa att för varje x med $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ gäller att

$$(1 + \sin x)^{3/2} - (1 - \sin x)^{3/2} = (2 + \cos x)\sqrt{2 - 2\cos x}$$

2997. Visa att serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{1/n} - 1\right)$ är konvergent.

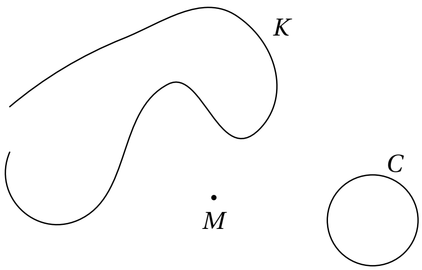
2998. Visa att det finns en konstant C med $1 < C < 2$ så att

$$\int_0^x \exp\left(t^2/2\right) dt \leq \frac{C}{x} \exp\left(x^2/2\right)$$

för alla $x > 0$. (Den som finner bättre begränsningar på C kan sända dem till problemredaktören.)

2999. Talföljden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ är definierad av $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ och $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$, $n \geq 2$. Visa att följden konvergerar och att gränsvärdet är $5/3$.

3000. Cirkeln C, kurvan K och punkten M är given i planet. Bestäm alla möjliga lägen av punkterna P och Q så att P ligger på C, Q ligger på K och M är mittpunkt på sträckan PQ.



3001. En likbent triangel ABC med $AB = AC$ och vinkeln $A = 20°$ är given. Punkten P ligger på AC så att $AP = BC$. Visa att ABP är 10°.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3002. Visa att ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ inte har andra heltalslösningar än $x = y = z = 0$.

3003. Obducenten A hade just börjat undersöka mordoffret M i laboratoriet som hölls vid den konstanta temperaturen 21 °C då mördaren smög sig in, stack A till döds med en kniv och stal liket av M. Assistent B fann senare A:s lik och uppmätte genast dess kroppstemperatur. Den var 31 °C och klockan var då 15.32. En timme senare uppmätte B temperaturen igen. Den hade då sjunkit till 29 °C. Assistenten kände till att Newtons avsvalningslag är tillämpbar på lik och slog upp lydelsen i sin anteckningsbok:

En kropp med temperaturen y_0 placerad i ett rum med temperaturen a får efter tiden t temperaturen y, där $y - a = (y_0 - a)e^{-kt}$, och k är en konstant.

Assistenten B kunde nu räkna ut när obducenten A blev mördad, under antagande att kroppstemperaturen då var 37 °C. Kan Du?

(Svar: 13.26)

3004. En rätblocksformad och målad träkloss har kantlängderna a, b och c som alla är heltal större än 1. Klossen sågas sönder med snitt parallella med sidoytorna så att kuber med kantlängderna 1 erhålles. Hur många av kuberna har 3, 2, 1 respektive 0 målade sidoytor?

(Svar: 8, $4(a-2)+4(b-2)+4(c-2)$, $2(a-2)(b-2)+2(b-2)(c-2)+2(c-2)(a-2)$ resp $(a-2)(b-2)(c-2)$)

3005. På ett horisontellt bord står en låda utan lock som har formen av ett rätblock med bottenkanterna a och b samt höjden H. Lådan är fylld med vatten till höjden h. Vrid lådan vinkeln v kring kanten med längden b. Sök v som funktion av h då vattnet precis rinner över kanten.

(Svar: $v = \arctan(H^2/(2ah))$ för $0 < h < H/2$ och $v = \arctan((2H-2h)/a)$ för $H/2 < h < H$)

3006. Avgör vilket av talen

$$\frac{2.00000000004}{(1.00000000004)^2 + 2.00000000004} \text{ och } \frac{2.00000000002}{(1.00000000002)^2 + 2.00000000002}$$

som är störst.

(Svar: Det andra)

3007. För att beräkna $\sqrt{2}$ gjorde Theon från Smyrna (200-talet före Kristus) på följande sätt (bortsett från beteckningarna). Han satte $\begin{cases} x_1^0 = 1 \\ x_2^0 = 1 \end{cases}$

och beräknade successivt $\begin{cases} x_1^n = x_1^{n-1} + 2x_2^{n-1} \\ x_2^n = x_1^{n-1} + x_2^{n-1} \end{cases}$, $n = 1, 2, \ldots$

De första n-värdena ger

	x_1^n	x_2^n	$(x_1^n)^2$	$(x_2^n)^2$
$n=0$	1	1	1	1
$n=1$	3	2	9	4
$n=2$	7	5	49	25
$n=3$	17	12	289	144
$n=4$	41	29	1681	841
$n=5$	99	70	9801	4900

Han såg då att $\left(\frac{x_1^n}{x_2^n}\right)^2$ närmar sig 2, dvs att $\frac{x_1^n}{x_2^n}$ närmar sig $\sqrt{2}$ då $n \to \infty$. Visa att Theons metod är korrekt.

3008. Visa att $\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$ för alla positiva heltal n.

3009. En likbent triangel ABC med vinkeln BAC 20° och sidorna AB och AC lika långa är given. Punkterna P och Q avsättes på AC resp AB så att vinkeln BCQ blir 60° och vinkeln CPB blir 50°. Visa att vinkeln APQ är 50°.

3010. Medelvärdet M_p mellan två positiva reella tal x och y definieras av

$$M_p = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}$$

För $p = 1$ blir M_p det vanliga aritmetiska medelvärdet och för $p = -1$ fås det harmoniska medelvärdet.

a) Visa att $M_0 = \lim_{p \to 0} M_p$ är lika med det geometriska medelvärdet $\sqrt{xy}$

b) Det är välkänt att $M_0 \leq M_1$. Kanske är det inte lika välkänt att M_p växer med p. Visa att

$$p > q \implies M_p \geq M_q$$

c) Visa att det logaritmiska medelvärdet L definierat av

$$L = \frac{x - y}{\ln x - \ln y}$$

separerar M_0 och M_1, dvs att

$$M_0 \leq L \leq M_1 \qquad (*)$$

d) Kan man byta gränserna i $(*)$ mot något ”bättre”? Finns $p > 0$ och $q < 1$ så att $M_p \leq L \leq M_q$?

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3011. Visa att $n^{n-1} - 1$ är delbart med $(n-1)^2$ för alla heltal $n > 1$.

3012. Visa att om $|a_j| \leq 1$ för $j = 1, 2, \ldots, n$ så är

$$1 - \prod_{1}^{n} a_j \leq \sum_{1}^{n} (1 - a_j)$$

3013. Vilket av talen e^{π} och $(e^{e}\pi^{\pi}\pi^{e})^{1/3}$ är störst?

3014. Välj två punkter slumpmässigt på en cirkels omkrets. Dra kordan mellan punkterna. Vad är sannolikheten att kordan är längre än cirkelns radie?
(Svar: 2/3)

3015. Låt AB och CD vara två vinkelräta diametrar i en cirkel och låt P vara en punkt på cirkelns perifieri. Linjen genom P och A skär linjen genom C och D i punkten E. Linjen genom E parallell med AB skär linjen genom P och C i F. Visa att då P genomlöper cirkelns periferi kommer F att förflytta sig längs en linje genom D.

3016. Bestäm alla deriverbara funktioner f som satisfierar

$$y^{m}f(x)+x^{n}f(y)=f(xy)$$

för alla $x>0$ och $y>0$.
(Svar: För $m\neq n$ är $f(x)=A(x^{n}-x^{m})/(n-m)$ och för $m=n$ är $f(x)=Ax^{n}\ln x$)

3017. En avbildning T av punkterna i planet till sig själv kallas en kontraktion om $\|T(P)-T(Q)\|\leq\|P-Q\|$ för alla punkter P och Q. Låt nu M vara mängden av alla fixpunkter till T dvs $M=\{P:\ T(P)=P\}$. Visa att M är konvex, dvs att om P och Q tillhör M så tillhör $tP+(1-t)Q$ också M för alla $0\leq t\leq 1$.
Anm. Med $\|A-B\|$ menas avståndet mellan A och B.

3018. Visa att $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin nx|}{x}\,dx=\frac{1}{\pi}$.

3019. Visa att den veckodag som den 13:e dagen i månaden oftast infaller på är en fredag.