Årgång 55, 1972

Första häftet

Matematiska uppgifter

2863. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\sin x - \cos x = 1 \\ \sin x - 2\cos x = 2 \end{cases}$$

(Svar: $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$)

2864. Visa att $(1{,}000001)^{1\,000\,000} > 2$.

2865. Visa att ekvationen $x^4 - x^2 + 2x + 3 = 0$ saknar reella rötter.

2866. Bestäm alla deriverbara funktioner f som satisfierar $f(x) + f(y) = f(xy)$ för alla $x > 0$ och $y > 0$.

(Svar: $f(x) = A \ln x$ där A är en godtycklig konstant)

2867. Man har n kulor numrerade från 1 till n och n urnor numrerade från 1 till n. Man placerar på måfå en kula i varje urna. Vad är väntevärdet för antalet kulor som placerats i en urna med samma nummer som kulan har?

(Svar: 1)

2868. Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 2^{-k}$.

(Ledning: Utgå från en geometrisk summa.)

(Svar: 6)

2869. Låt A, B och C vara vinklar i en triangel. Visa att

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$

2870. Visa att man genom att byta plustecken mot minustecken i summan

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10$$

aldrig kan få summan 20.

2871. För varje val av x_1 och x_2 finns ett reellt tal λ så att ekvationssystemet

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2$$

är satisfierat. Visa att detta är möjligt då och endast då $a_{11} = a_{22}$ och $a_{12} = a_{21} = 0$.

2872. a) Visa att $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} (\cos t)^{2n}\, dt = 0$.
b) Visa, t ex med ledning av a), att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)(\cos n\pi x)^{2n}\, dx = 0$$

för varje funktion f som är kontinuerlig på $[0, 1]$.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

2873. Tre golfspelare Tom, Dick och Harry är på väg till klubbhuset. Tom, som är den bäste av de tre, talar alltid sanning. Dick däremot talar ibland sanning och ljuger ibland medan Harry, den sämste golfspelaren, alltid talar osant. Avgör med ledning härav och figuren vem av spelarna som är vem.

(Svar: De är i följd Dick, Harry och Tom)

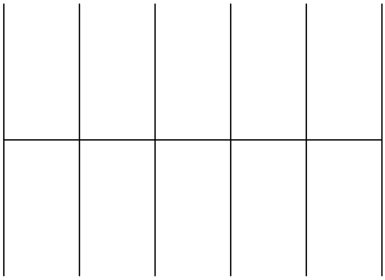
2874. Bestäm produkten av de 20 första termerna i den talföljd som definieras av att $t_1 = 2$ och $t_n = 2t_{n-1}$ för $n \geq 2$.
(Svar: 2^{210})

2875. Beräkna $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\, dx$.
(Svar: 3)

2876. Bestäm den punkt i planet genom punkterna $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 2)$ och $(3, -1, 2)$ vars avstånd till punkten $(2, 1, -9)$ är minimalt.
(Svar: $(1, -3, 1)$)

2877. Låt r betckna en rot till ekvationen $x^3 - 3x - 1 = 0$. Visa att även $2 - r^2$ är en rot.

2878. Till ett nybyggt bostadsområde iordningställes för varje uppgång 10 stycken parkeringsplatser, ordnade enligt följande figur:



Et av hushållen i en viss uppgång har två bilar. Vad är sannolikheten att detta hushåll får intilliggande parkeringsplatser (antingen nos mot nos eller sida vid sida), om dessa fördelas på måfå?
(Svar: 13/45)

2879. På ett schackbräde sågar man bort två diametralt motsatta hörnrutor. Visa att de återstående 62 rutorna inte kan täckas av dominobrickor. Dominobrickorna, som antas bestå av två hopsatta kvadrater av samma mått som schackrutorna, får inte läggas ovanpå varandra.

2880. Per och Pål kastar en symmetrisk tärning varannan gång tills någon får en sexa. Hur stor är sannolikheten att Per får första sexan om Pål börjar kasta?
(Svar: 5/11)

2881. Låt $p(x)$ vara ett andragradspolynom med båda nollställena i intervallet $[-1, 1]$. Visa att om $\max_{-1\leq x\leq 1}|p(x)| = 1$ så är $\max_{-1\leq x\leq 1}|p'(x)| \geq 1$.
(Ledning: Skilj på fallen $x_0 = \pm 1$ och $-1 < x_0 < 1$ där x_0 är den punkt i vilken $\max_{-1\leq x\leq 1}|p(x)|$ antas.)

2882. Tvåhundra studenter placeras i 10 rader om vardera 20 studenter. I var och en av de 20 kolonnerna väljer vi ut den kortaste studenten. Om flera är lika korta väljer vi en av dem. Den längsta av de så utvalda 20 studenterna kallar vi A. Därefter låter vi studenterna återvända till sina platser. Vi väljer nu ut den längsta studenten i var och en av de 10 raderna. Den kortaste av dessa 10 studenter kallar vi B. Visa att B aldrig är kortare än A.
(Ledning: Studera de tre fallen A och B i samma rad, i samma kolonn samt i olika rad och kolonn var för sig.)

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

2883. Två personer spelar följande spel. De har en blomma med 13 kronblad och drar varannan gång kronblad från den. Det är tillåtet att dra antingen ett kronblad eller, om det finns, två intilliggande. Den som drar det sista kronbladet vinner spelet. Visa att den person som inte börjar alltid kan vinna och förklara hur han ska bära sig åt för att vinna.

2884. I en triangel med vinklarna A, B och C gäller att $\cos C = \sin A \sin B$. Bevisa att triangeln är rätvinklig.

2885. Från en vägskylt med texten LULEÅ har slumpmässigt genom vindens försorg två bokstäver fallit ner. Den vänlige analfabeten Laban sätter upp bokstäverna på de tomma platserna. Bestäm sannolikheten att det åter står LULEÅ på skylten när Laban går därifrån.
(Svar: 11/20)

2886. Visa att ekvationen $x^2 + 2px + 2q = 0$, där p och q är udda heltal, saknar rationella rötter.

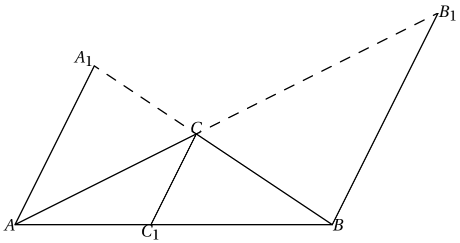
2887. Talen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ är positiva och uppfyller

$$2nx_n^3 - (n+5)x_n - (n-1) = 0$$

för alla n. Visa att $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar. Bestäm gränsvärdet.
(Svar: 1)

2888. Låt $M = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ vara en mängd bestående av ändligt många komplexa tal sådan att produkten av två tal ur M fortfarande tillhör M. Visa att om alla $z_j \neq 0$ så är $|z_j| = 1$ för $j = 1, 2, \ldots, n$.

2889. Låt C_1 vara en punkt på sidan AB i triangeln ABC (se figuren).



Drag C_1C. Låt A_1 vara skärningspunkten mellan linjen genom B och C och linjen genom A parallell med C_1C. Låt på liknande sätt

B_1 vara skärningspunkten mellan linjen genom A och C och linjen genom B parallell med C_1C. Visa att

$$\frac{1}{l(AA_1)}+\frac{1}{l(BB_1)}=\frac{1}{l(CC_1)}$$

där $l(AA_1)$ betecknar längden av sträckan AA_1.

2890. Funktionen f är två gånger deriverbar för alla x och $f''(x)\geq 0$. Visa att

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 2f(0).$$

2891. Traingeln ABC är given. På sidorna AB och BC är punkterna M och N belägna så att $\overrightarrow{BA}=n\cdot\overrightarrow{BM}$ och $\overrightarrow{BC}=(n+1)\cdot\overrightarrow{BN}$,där n är ett positivt heltal ≥ 2. Visa att det finns precis en punkt som oberoende av n ligger på linjen genom M och N.

2892. Visa att det finns reella tal x och y sådana att $0<x<y$ och $x^y=y^x$. Visa dessutom att $1<x<e$.

Fjärde häftet

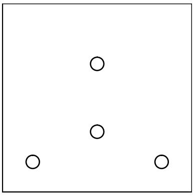
Matematiska uppgifter

2893. Vilket av talen $\dfrac{1,0002}{0,99999996}$ och $\dfrac{0,9998}{0,99960004}$ är störst?
(Svar: De är lika stora)

2894. I planet finns två cirklar med radierna r_1 respektive r_2 och avståndet mellan medelpunkterna är $a>r_1+r_2$. Drag en linje som tangerar båda cirklarna. Bestäm i de båda möjliga fallen sinus för vinkeln mellan nämnda linje och förbindelselinjen mellan medelpunkterna.
(Svar: $(r_1+r_2)/a$ och $|r_1-r_2|/a)$)

2895. Lös ekvationen $\big|2|x|-|x-4|\big|=2$.
(Svar: $x=-6$, -2, $2/3$ eller 2)

2896. Figuren nedan föreställer en tårta garnerad med fyra körsbär. Dela tårtan med fyra raka snitt i fyra lika stora delar så att varje tårtbit förses med ett körsbär.



2897. En mängd M bestående av reella tal skilda från 0 kallas en multiplikativ grupp om

1) $m_1 \in M$ och $m_2 \in M \Longrightarrow m_1 m_2 \in M$
2) $m_1 \in M \Longrightarrow \dfrac{1}{m_1} \in M$.

Antag att G, G_1 och G_2 är multiplikativa grupper sådana att $G \subseteq G_1 \cup G_2$. Visa att $G \subseteq G_1$ eller $G \subseteq G_2$.

2898. Visa att om $p \geq 1$ så gäller att

$$|z_1|^p + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^p \leq \big(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|\big)^p$$

för alla komplexa tal $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

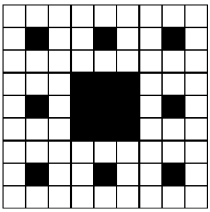
2899. Funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$. Sätt $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

Visa att $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$.

2900. LÅt $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en konvergent följd av reella tal sådan att serien $\sum_{j=2}^{\infty} |x_j - x_{j-1}$ är konvergent. Visa att om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ konvergent.

2901. Dela en kvadrat med sidolängden 1 i nio lika stora kvadrater med hjälp av linjer parallella med sidokanterna (se figuren). Måla den mittersta kavadraten svart. Behandla de åtta omålade kvadraterna på liknande sätt och upprepa proceduren n gånger. Låt A_n beteckna den sammanlagda arean av de omålade kvadraterna. Beräkna A_n samt $\lim_{n\to\infty A_n}$.

(Svar: $A_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ger $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$, dvs hela kvadratens area)



2902. Enligt anvisningar utfärdade av Kungliga Skolöverstyrelsen ska som bekant gymnasiebetygen i matematik (och andra ämnen) fördelas så:

Betyg	1	2	3	4	5
% av landets gymnasister i årskursen	7	24	38	24	7

Detta innebär t ex att en slumpmässigt vald elev i landet har betyget 2 i matematik med sannolikheten 0,24. Antag nu att en viss skolklass består av 26 slumpmässigt valda elever.

a) Bestäm med lämplig approximation sannolikheten att ingen av eleverna har betyget 1. Det är tillåtet att utnyttja att $1,8^2 \approx 1,8$.

b) Bestäm med Poissonapproximation (även om det inte riktigt är ”tillåtet”) sannolikheten att ingen elev har vare sig betyget 1 eller 5. Det är tillåtet att utnyttja att $3,6^5 \approx 3,6$.

c) Bestäm med lämplig approximation sannolikheten att minst ett av betygen 1 eller 5 inte utdelats i klassen.

(Svar: a) $0,17$, b) $0,027$, c) $0,31$)