# Årgång 53, 1970

## Första häftet

**2761.** Antag att $a_{n,m}$ är icke-negativa tal och att $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ existerar för alla $n$. Gäller följande implikationer?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \le K$ för alla $m \ge m_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \le K$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \le K \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \le K$ för alla $m \ge m_0$, för något $m_0$.

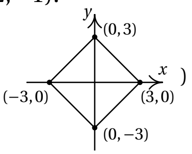
**2762.** Låt $\mathbb{Q}$ beteckna de rationella talen, $\xi$ en fix lösning till ekvationen $x^2 = 3$ och $\eta$ en fix lösning till $x^2 + x + 1 = 0$. Betrakta talmängderna $\mathbb{Q}(\xi) = \{a\xi + b | a, b \in \mathbb{Q}\}$ och $\mathbb{Q}(\eta) = \{a\eta + b | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Bestäm alla omvändbara avbildningar $T\colon x \curvearrowright Tx$ av hela $\mathbb{Q}(\xi)$ på hela $\mathbb{Q}(\eta)$, sådana att

$$T(x+y) = Tx + Ty \quad \text{och} \quad T(xy) = Tx \cdot Ty \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{Q}(\xi).$$

**2763.** Låt $f$ vara derivatan av en reell funktion. Visa att $f$ avbildar intervall på intervall. *(Ulf Persson.)*

# Enklare matematiska uppgifter

**2764.** Om $(x_1, y_1)$ och $(x_2, y_2)$ är två punkter i planet, definierar vi ”avståndet” $d$ mellan dem som $d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Illustrera i en figur vilka punkter som har samma ”avstånd” till origo som punkten $(2, -1)$.

(Svar: 

)

**2765.** Sätt $f(x) = x^{x^x}$, $x > 0$. Beräkna $f'(x)$.
(Svar: $f'(x) = x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right)$)

**2766.** Betrakta $M = \{a + b\sqrt{2}\colon\ a,\ b \in \mathbb{Q}\}$. Om $x = a + b\sqrt{2} \in M$ sätter vi $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$. Visa att $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ samt att $\overline{x} = x$ precis då $x \in \mathbb{Q}$. Använd därefter resultatet för att visa, att om $x \in M$ är en rot med rationella koefficienter,så är även $\overline{x}$ rot till ekvationen.

**2767.** Een Bondepijga gåår til Torgs medh några Egg / hwarest henne möter een Druckenbulter / och slår sönder några af Eggen / Pijgan brukar Mundh / thenne Druckenbulter säger / huru många woro Eggen / iagh vill tigh dem betala /Pijgan swarar och säger / ia ottade intet på när Moor hässe inladhe / men hää huxar ia / at hun först lade dum i jeen Korgh altjidh 2 tillika och tå bleff ett åfwer / sedan lade hun dum i een annor Korgh medh 3 och tåå bleef å ett åfwer / lijka så när hun lade in dum 4 äller 5 å 6 tå bleff altijdh 1 åfwer / men sisdt lade hun dum in medh 7 och tå gick hää just vth: Nu frågas huru många Eggen voro? (från gammal svensk räknelära.)

(Svar: 301 Egg)

**2768.** Lös differentialekvationen $x^2y'' - 2y = 2x$, $x > 0$, genom att införa $z = y \cdot x^{-2}$ som ny obekant.

(Svar: $y(x) = -x + Cx^2 + Dx^{-1}$, där $C$ och $D$ är konstanter)

**2769.** Betrakta talföljden $(a_n)_0^\infty$, bestämd av $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$. Visa att om $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existerar, så är detta gränsvärde 3.

**2770.** Det kostar en krona att spela följande spel: I en urna har placerats 12 vita och 3 svarta bollar. Man tar bollar ur urnan utan återläggning. Man vinner 25 öre för varje vit boll som kommer före den först erhållna svarta bollen. Hur mycket förlorar man i genomsnitt per spel?

(Svar: 25 öre)

**2771.** Visa att $3n^4 + 2n^3 + n$ är delbart med 6 för varje positivt heltal $n$.

**2772.** Betrakta avbildningen $L$ som avbildar vektorn $v$ med koordinaterna $(x_1, x_2)$ på vektorn $L(v)$ med koordinaterna $(3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$.

a) Visa att $L$ är linjär, dvs att $L(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1L(v_1) + a_2L(v_2)$ för alla vektorer $v_1$ och $v_2$ och alla reella tal $a_1$ och $a_2$.

b) Om det finns ett tal $\lambda$ och en vektor $v \neq 0$ så att $L(v) = \lambda v$ kallas $v$ egenvektor till $L$ och $\lambda$ tillhörande egenvärde. Bestäm alla egenvektorer och tillhörande egenvärden till $L$.

c) Välj bland egenvektorerna till $L$ ut två stycken $e'_1$ och $e'_2$ sådana att $(e'_1, e'_2)$ utgör en ortonormerad bas.

d) Betrakta $L$ i denna nya bas $(e'_1, e'_2)$. Om $v$ har koordinaterna $(x'_1, x'_2)$ i basen $(e'_1, e'_2)$, vad har $L(v)$ för koordinater i basen $(e'_1, e'_2)$?

(Svar: b) Egenvektorerna är $s(1,1)$ och $t(-1,1)$, där $s$ och $t$ är reella tal, skilda från 0. Motsvarande egenvärden är 4 respektive 2. c) T ex $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ och $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. d) $L(v)$ har koordinaterna $(4x'_1, 2x'_2)$)

## Andra häftet

I den tidigare nämnda belgiska tidskriften *Mathesis*, som har haft en liknande problemavdelning som Elementa, har 148 problem publicerats, där lösningarna ej hunnit inflyta i tidskriften. Det är Elementas avsikt att genom förmedling av Hans Riesel publicera ett urval av dessa. De kommer att signeras ”Mathesis, årtal, lösning ej publicerad”.

**2773.** Låt $[x]$ beteckna heltalsdelen av $x$. Sätt

$$u = \frac{y^2 + [(1 + x^2 + y^2)^{-1}]}{e^{x^2} - 1}.$$

Studera diskontinuiteterna hos funktionen

$$z = [\cos^2 x + \sin^2 y] + \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} u$$

där principalvärdet av arccot väljs, alltså $0 < \operatorname{arccot} u < \pi$.

*(Mathesis, 1923, lösning ej publicerad.)*

**2774.** Visa att bland $n$ givna naturliga tal kan alltid ett antal utväljas vilkas summa är jämnt delbar med $n$. *(Torsten Ström.)*

**2775.** Låt $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i \geq 0$. Sätt $v_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_{j,i}$, där $b_{j,i} = 2^{i-1} a_{j2^{i-1}}$. Visa att (om $v_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$)

1) $\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{2N} (-1)^{i+1} v_i - \sum_{i=N+1}^{2N} v_i$
2) $s = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} v_j$,

under förutsättning att termerna i den senare serien får omordnas lämpligt.

3) $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-c} = (1 - 2^{1-c}) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} j^{-c}, \quad c > 1$

Denna omformulering av en seriesummation ger under vissa förutsättningar en snabbare konvergens som 3) visar. *(Torsten Ström.)*

## Enklare matematiska uppgifter

Avdelningen har denna gång samma utformning som ett centralt prov av den typ som ges i åk 3. Provet är avsett för NT-linjen och omfattar hela årskursens teori.

### *Del L. Om ej annat anges skall endast svar ges till uppgifterna*

Betrakta mängden $\mathbb{Z}$ av alla heltal. Vi tänker oss nu att vi delar upp heltalen i tre olika boxar som vi kallar box 0, box 1 och box 2. I box 0 lägger vi alla heltal som är delbara med 3, dvs $\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots$. I box 1 placerar vi de heltal som kan skrivas som 1 plus en heltalsmultipel av 3, dvs $\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots$. I box 2 slutligen lägger vi alla heltal som kan skrivas på formen $3k + 2$ för något heltal $k$. Vi får alltså:

box 0: $\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots$
box 1: $\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots$
box 2: $\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots$

Vi definierar nu summan av två boxar på följande sätt: Tag ett tal ur vardera boxen och addera dessa på vanligt sätt. Definiera summan av boxarna som den box i vilken det så erhållna talet ligger.

Låt oss t ex addera box 1 och box 2. Tag ett tal ur box 1, t ex 4, och tag ett tal ur box 2, t ex $-1$. Eftersom $4 + (-1) = 3$ och talet 3 ligger i box 0 är

$$\text{box } 1 + \text{box } 2 = \text{box } 0$$

(om vår definition av addition av boxar skall vara menigsfull måste vi få samma resultat oberoende av vilka tal vi väljer ur de båda boxarna. Man kan visa att så är fallet.)

**2776.** Beräkna box 0 + box 2.

I fortsättningen skriver vi $0_3$, $1_3$ och $2_3$ i stället för box 0, box 1 och box 2. Boxarna kallas *restklasser modulo 3*. Vårt räkneexempel får med de nya beteckningarna utseendet

$$1_3 + 2_3 = 0_3.$$

Multiplikation mellan två boxar definierar vi på liknande sätt som additionen. Till exempel är $2_3 \cdot 0_3 = 0_3$ eftersom talet 2 tillhör $2_3$ och talet 3 ligger i $0_3$ samt $2 \cdot 3 = 6$ och 6 återfinns i $0_3$.

**2777.** Beräkna $2_3 \cdot 2_3$

På liknande sätt kan vi naturligtvis dela upp $\mathbb{Z}$ i fyra boxar som vi betecknar med $0_4$, $1_4$, $2_4$ och $3_4$ (och kallar restklasser modulo 4), där

$0_4$: $\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots$
$1_4$: $\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots$
$2_4$: $\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots$
$3_4$: $\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots$

Vi definierar addition och multiplikation av dessa boxar på samma sätt som för $0_3$, $1_3$ och $2_3$.

**2778.** Lös ekvationen $x \cdot 3_4 = 2_4$ där $x$ är någon av boxarna $0_4$, $1_4$, $2_4$ eller $3_4$.

Vi är vana vid att ekvationen $x^2 = 0$, där $x^2$ betyder $x \cdot x$, endast har lösningen $x = 0$. Denna räknelag gäller dock inte för dessa boxar.

**2779.** Lös ekvationen $x^2 = 0_4$, där $x$ är någon av boxarna $0_4$, $1_4$, $2_4$ eller $3_4$.

**2780.** Lös ekvationen $x^2 + 2_4 x + 1_4 = 0_4$, där $x$ är någon av boxarna $0_4$, $1_4$, $2_4$ eller $3_4$.

## *Del A. Uppgifter till vilka endast svar skall ges*

**2781.** Bestäm realdelen av det komplexa talet $\dfrac{i}{2+i}$.

**2782.** Ange skärningspunkten mellan linjen

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

och planet $3x + y - 4z + 1 = 0$.

**2783.** Bestäm konstanten $k$ så att $y = \sin x$ satisfierar differentialekvationen $y'' + ky = 0$.

**2784.** För vilket värde på $x$ är $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = 2$?

**2785.** Ange en vektor som är vinkelrät mot vektorn $(1, -2, 1)$. (Ortonormerad bas.)

**2786.** Tre persioner skjuter varsitt skott mot en tavla. Sannolikheten att de träffar tavlan är $0,8$, $0,6$ respektive $0,4$. Bestäm sannolikheten att precis två av dem träffar tavlan.

**2787.** Man kan visa att $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{2/3}\,dx = \frac{\pi}{16}$. Beräkna med hjälp härav $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{1/3}\,dx$.

**2788.** Den stokastiska variabeln $\xi$ är normalfördelad med väntevärdet $m$ och standardavvikelse $\sigma$. Vidare gäller att $P(\xi \leq 4) = 0,2743$ och $P(\xi \geq 7) = 0,3446$. Beräkna $m$ och $\sigma$.

| $x$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0,5000 | 0,5398 | 0,5793 | 0,6179 | 0,6554 | 0,6915 | 0,7257 | 0,7580 | 0,7881 | 0,8159 |

## *Del B. Uppgifter till vilka fullständiga lösningar skall ges*

**2789.** Bestäm volymen av den rotationskropp som alstras då kurvan $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring $a$-axeln.

**2790.** Lös ekvationen $(z+1)^2 = (z+i)^2$. Svaren skall ges på formen $a + ib$, där $a$ och $b$ är reella.

**2791.**
a) Lös differentialekvationen $xy' + y = 0$, $x > 0$. (1p)
b) Lös med hjälp av resultatet i a) differentialekvationen $xy'' + y' = 0$, $x > 0$. (2p)

**2792.** Bestäm den punkt på kurvan

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$$

som har kortaste avståndet till linjen $x + 2y + 3 = 0$. (Ortonormerat system.)

## Tredje häftet

**2793.** Låt $z_i$ vara komplexa tal sådana att $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Bevisa att

$$\left|\prod_{i=1}^{N} z_i - 1\right| \leq \sum_{i=1}^{N} |z_i - 1|.$$

**2794.** Konstruera kurvan $y^3 - x^3 + 3ax^2 - 3by^2 = 0$. Studera särskilt fallen $b = 0$, $b^3 < 2a^3$, $b^3 > 2a^3$ och $b^3 = 2a^3$.

*(Mathesis 1925, lösning ej publicerad.)*

**2795.** a) Man placerar $2n$ trådar av samma längd intill varandra. Trådarna knyts ihop två och två helt på måfå i vardera änden med $n$ knutar i den ena och $n$ knutar i den andra. Beräkna sannolikheten att trådarna efter sammanknytningen bildar en enda ”ring”. Beräkna också det förväntade antalet erhållna ringar.

b) Behandla motsvarande problem med följande förutsättningar. En person håller $n$ trådar på mitten i en hand och trådarnas ändar knyts ihop helt på måfå med $n$ knutar.

*(Artur Engel, Lennart Råde.)*

# Enklare matematiska uppgifter

**2796.** Den s k Herons formel för arean av en triangel med sidolängderna $a$, $b$ och $c$ lyder $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, där $p = (a+b+c)/2$. Bevisa Herons formel med hjälp av cosinussatsen, areasatsen och trigonometriska ettan.

**2797.** Funktionen $f$ är definierad på hela reella axeln. Är det sant att

a) $f$ är kontinuerlig $\Rightarrow$ $f^2$ är kontinuerlig?

b) $f^2$ är kontinuerlig $\Rightarrow$ $f$ är kontinuerlig?

(Svar: a) Ja, b) Nej)

**2798.** Punkterna $A$, $B$ och $C$ är hörn i en triangel. Punkterna $L$, $M$ och $N$ är bestämda av att $\overrightarrow{CL} = 2\overrightarrow{LB}$, $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MA}$ och $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NB}$ och $T$ är skärningspunkten mellan de räta linjerna genom $A$ och $L$ respektive genom $B$ och $M$. Visa att $C$, $T$ och $N$ ligger i rät linje.

**2799.** Bestäm lösningsmängden till ekvationen

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}$$

(Svar: {0, 2})

**2800.** $A$ och $B$ är två händelser med komplementhändelserna $\complement A$ och $\complement B$. Vidare förutsättes att $0 < P(B) < 1$. Visa att om $P(A\cap B) \leq P(A)\cdot P(B)$ så är

$$P(A|B) \leq P(A) \leq P(A|\complement B).$$

**2801.** Visa att samtliga nollställen till polynomet $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ ligger i området $1 < |z| < 2$. (Ledning: Visa med hjälp av triangelolikheten att för $|z| \geq 2$ och $|z| \leq 1$ är $|p(z)| > 0$.)

**2802.** I gruppen $(G,*)$ har varje element ordningen 2, dvs $a*a=e$ för alla $a\in G$. Visa att gruppen är abelsk, dvs $a*b=b*a$ för alla $a$ och $b$ i $G$.

**2803.** Bestäm alla funktionspar $u$ och $v$ som är deriverbara på hela reella axeln och där uppfyller

$$\begin{cases} u' = u+3v \\ v' = 4u+5v \end{cases}$$

(Svar: $u(x) = Ce^{7x} - 3De^{-x}$ och $v(x) = 2Ce^{7x} + 2De^{-x}$, där $C$ och $D$ är konstanter)

**2804.** De linjära avbildningarna $L_1$ och $L_2$ är definierade på något reellt vektorrum $A$ (t ex mängden av vektorer i rummet). Vidare gäller att $V(L_1) \subseteq N(L_2)$ och $V(L_2) \subseteq N(L_1)$. Visa att det reella talet $\lambda \neq 0$ är egenvärde till $L_1 + L_2$ om och endast om $\lambda$ är egenvärde till $L_1$ eller $L_2$.

(Att $\lambda$ är egenvärde till en linjär avbildning $L$ innebär att det finns ett $v\in A$, $v\neq 0$, så att $Lv = \lambda v$. Med $V(L)$ och $N(L)$ menas värderum respektive nollrum till $L$, dvs $V(L) = \{Lv\colon v\in A\}$ och $N(L) = \{v\colon Lv = 0\}$.)

**2805.** a) Visa att $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln x}{x+1}\,dx = 0$.

b) Använd resultatet i a) samt att

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

för att visa att

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$$

dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx$$

## Fjärde häftet

**2806.** Givet två koncentriska cirklar $C_1$ och $C_2$ med medelpunkterna i $O$ och med radierna $R_1$ resp $R_2$, där $R_1 < R_2$. Betrakta en vinkel $BAC$ av fix storlek, där $A$ ligger på $C_2$ och $B$ och $C$ ligger på $C_1$. Visa att vinkeln $BOC$ får sitt minimum, när radien $OA$ halverar vinkeln $BAC$. *(Mathesis 1928, lösning ej publicerad.)*

**2807.** Den så kallade Fibonacciföljden $(a_n)_0^\infty$ definieras genom

$$a_{i+1} = a_i + a_{i-1}, \quad i \geq 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Man kan visa att

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Bevisa följande relationer:

1) $\displaystyle\sum_{i=n}^{\infty} \arctan\frac{1}{a_{2i+1}} = \arctan\frac{1}{a_{2n}}$, för $n \geq 1$

2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \arctan\frac{1}{a_{2i+2}} = \frac{\pi}{2}$

Ledning: Visa först att $\arctan\dfrac{1}{a_{2n}} = \arctan\dfrac{1}{a_{2n+1}} + \arctan\dfrac{1}{a_{2n+2}}$.

*(Olof Hägerlund.)*

**2808.** Visa att om $f$ är en icke-negativ integrerbar funktion så gäller

$$\int_0^\infty f(x)\, dx \leq 2\left(\int_0^\infty \sqrt{x} f(x)\, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty (f(x))^2\, dx\right)^{1/4}$$

Ledning: Uppskatta med Schwarz olikhet

$$\int gh \leq \left(\int |g|^2 \cdot \int |h|^2\right)^{1/2}$$

på enklaste sätt $\int_0^t f$ och $\int_t^\infty f$ med hjälp av integraler i högerledet av den formel som skall visas.

## Enklare matematiska uppgifter

**2809.** Lös ekvationen $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$. Rötterna skall anges på formen $a + ib$, där $a$, $b \in \mathbb{R}$.
(Svar: $1 + 2i$ och $-1 + i$)

**2810.** Visa, t ex med induktion, att för varje heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$$

**2811.** Sätt $G = \{a \in \mathbb{R} : \ -1 < a < 1\}$. Om $a$ och $b$ tillhör $G$ så gäller att $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ tillhör $G$. (Detta behöver ej visas.) Visa att $G$ är en grupp under $*$.

**2812.** Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + 4y = 1 + x$.
(Svar: $y = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x) + \frac{x}{4} + \frac{3}{8}$)

**2813.** Lös ekvationen $\arcsin x = 2\arctan x$.
(Svar: $x = -1$, $0$ eller $1$ )

**2814.** Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna?

a) $a_k \to 0$ då $k \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent

b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent $\Rightarrow a_k \to 0$ då $k \to \infty$

c) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent $\Rightarrow f(x) \to 0$ då $x \to \infty$

d) $f(x) \to 0$ då $x \to \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent

(Svar: Endast påståendet i b) är sant)

**2815.** Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos(\ln(1+x))}{x^3}$.
(Svar: $-1/2$)

**2816.** Funktionen $f : x \curvearrowright x^2 - \ln x$, $x > 1$ är given. Låt, för varje $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_n$ vara det tal som uppfyller $f(x_n) = n$. Bestäm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.
(Svar: 1)

**2817.** Bestäm en ekvation på parameterform för den linje som går genom origo och är parallell med skärningslinjen mellan planen

$$2x - 4y - 7z = 1 \quad \text{och} \quad 4x + 2y + z = 3$$

(Svar: $x = t$, $y = -3t$, $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$)

**2818.** I en ortonormerad bas har vektorerna $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ koordinaterna $(1, 1, -1)$ respektive $(-3, 0, 2)$. Bestäm en vektor i linjära höljet till $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ som är ortogonal mot $\overline{v}_1$.
(Svar: T ex $(-4, 5, 1)$)

**2819.** Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Svar: $-4$)

**2820.** Bestäm en bas av egenvektorer till den linjära avbildning som i en bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(Svar: T ex $e_1 = (1, 1, -1)$, $e_2 = (1, 0, -1)$ och $e_3 = (0, 1, -1)$)

**2821.** Bestäm dimensionen av nollrummet och värderummet till den linjära avbildning som i en bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(Svar: 1 respektive 2)