Årgång 52, 1969

Första häftet

2697. Låt b vara en konstant, $-1 < b < 1$. Bestäm konstanten a så att

$$\lim_{r\to+0} r^a \int_o^\infty \frac{x^b}{r+x^2}\,dx$$

existerar och är skilt från 0 och ∞.

2698. Ändligt många intervall $I_1, I_2, \ldots, I_n$ på räta linjen är givna. Unionen $\cup_{k=1}^{N} I_k$ är en mängd som består av ett antal intervall (i regel skilda från I_k, $k = 1, 2, \ldots, N$) som är parvis utan gemensamma punkter och vilkas sammanlagda längd är L (man säger att $\cup_{k=1}^{N} I_k$ har mått eller totallängd L). Visa att man ur den givna följden av intervall $I_1, I_2, \ldots, I_n$, kan utvälja en delföljd $I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_n}$ av intervall som är parvis utan gemensamma punkter, dvs $I_{k_i} \cap I_{k_j} = \emptyset$ för $i \neq j$, och vilkas sammanlagda längd är $\geq \frac{1}{2}L$.

2699. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $-\infty < x < \infty$. Antag att f är periodisk med period 2π och att f på hela reella axeln överensstämmer med en funktion som är analytisk i ett band

$$\{z = x + iy \mid x, y \text{ reella tal}, |y| < \delta\}, \text{ för något } \delta > 0.$$

Visa att det finns ett tal $\varepsilon > 0$ och en konstant K, sådan att

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \right| \leq K e^{-\varepsilon |n|},$$

för alla heltal n.
Ledning: Använd Cauchys integralsats på en lämplig rektangel. Som vanligt betecknar i den imaginära enheten $i = \sqrt{-1}$.
Anmärkning: För att kunna lösa uppgift 2699 måste man känna till grunderna av teorin för analytiska funktioner. En lättläst framställning av dessa grunder ges i Brinck–Persson, *Elementär teori för analytiska funktioner*, Studentlitteratur, Lund.

Enklare matematiska uppgifter

2700. Lös ekvationen ${}^a\log({}^b\log({}^c\log x)) = 0$.
(Svar: $x = c^b$)

2701. Funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$. Vidare gäller för varje $x \in [0, 1]$ att

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0, 1]$.

2702. Avbildningen L avbildar vektorn med koordinaterna (x, y) på vektorn med koordinaterna $(3x+y, x-3y)$. Visa att vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är vinkelräta då och endast då $L(\vec{u})$ och $L(\vec{v})$ är det. (Ortonormerad bas.)

2703. Definiera funktionerna f, g och h genom

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$
$$h(x) = \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Visa att

a) f är kontinuerlig men inte deriverbar i 0.

b) g är kontinuerlig och deriverbar i 0, men att derivatan inte är kontinuerlig i 0.

c) h är kontinuerlig och deriverbar i 0, och att derivatan är kontinuerlig i 0.

2704. Bestäm alla komplexa tal z som uppfyller

$$\begin{cases} |z| = |z+1| \\ z = i\bar{z} \end{cases}.$$

(Svar: $z = -\frac{1}{2}(1+i)$)

2705. Låt $*$ vara en kompositionsregel på en godtycklig mängd G. Antag att $*$ har ett neutralt element (dvs det finns ett $e \in G$ så att $a * e = e * a = a$ för alla $a \in G$) och att

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

för alla $a, b, c,$ i G. Visa att $*$ är associativ och kommutativ.

2706. Låt f vara en funktion från A till B. Sätt för varje mängd $X \subseteq A$ $f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$ och för varje $Y \subseteq B$ $f^{-1}(Y) = \{y\colon f(y) \in Y\}$. Visa att för varje mängd $C \subseteq B$ gäller $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Visa också att om f är surjektiv (dvs $V_f = B$) så gäller att $f(f^{-1}(C)) = C$.

2707. Sätt för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$L_n(x) = e^x D^n\big(x^n e^{-x}\big).$$

a) Visa att $L_n(x)$ är ett polynom av graden n.

b) Visa att $L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$.

($L_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ kallas Laguerrepolynomen.)

2708. Sätt $I = \int_0^{\pi/2} \ln(2\cos x)\,dx$ och $J = \int_0^{\pi/2} \ln(2\sin x)\,dx$.

a) Visa att $I + J = J$.

b) Beräkna $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$.

c) Beräkna $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$.

(Svar: b) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; c) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$)

Andra häftet

2709. Låt V vara mängden av alla reella funktioner f som är kontinuerliga för $x \geq 0$ och uppfyller $f(0) = 0$. Definiera operatorn A på V genom

$$(Af)(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, & x > 0, \end{cases}$$

för alla $f \in V$. Sök egenvektorerna till A, dvs de funktioner $f \in V$ för vilka $Af = \lambda f$ för någon reell konstant λ. *(Torgny Lindvall.)*

2710. Funktionen f är kontinuerlig och ej konstant på $]-\infty, \infty[$. Ett reellt tal a kallas en period till f om $f(x + a) = f(x)$ för alla reella x. Visa att f har en minsta positiv period p och att mängden av perioder till f utgörs av mängden av alla tal $\{np\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

2711. Låt talen F_n vara definierade på följande sätt: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2, \ldots$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $n \geq 2$. (Fibonacci-serien). Bevisa formeln

$$F_{n+p} \cdot F_{n-1} - F_{n+p-1} \cdot F_n = (-1)^n F_p.$$

(H Hellström.)

Enklare matematiska uppgifter

Avdelningen har denna gång samma utformning som ett centralt prov av den typ som ges i åk 3. Provet är avsett för NT-linjen. Det innehåller teori t o m moment 47 enligt kursplanen i Läroplan för gymnasiet.

Del L. Om ej annat anges skall endast svar ges till uppgifterna

Något om permutationer

Beteckna mängden $\{1, 2, 3\}$ med M. En funktion (avbildning) ϕ från hela M till hela M kallas en *permutation på M* . Så är t ex den funktion som avbildar 1 på 3, 2 på 1 och 3 på 2 en permutation på M. Däremot är den funktion som avbildar 1 på 3, 2 på 1 och 3 på 1 inte en permutation på M, eftersom 2 inte tillhör dess värdemängd.

Om ϕ är en permutation på M och $\phi(1)$, $\phi(2)$ och $\phi(3)$ är bilderna av 1, 2 respektive 3 brukar man skriva permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) \end{pmatrix}.$$

Permutationen som avbildar 1 på 3, 2 på 1 och 3 på 2 skriver vi alltså

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2712. Skriv på detta sätt den permutation som avbildar 1 på 2, 2 på 3 och 3 på 1.

Om ϕ är permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) \end{pmatrix}$ och ψ är permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \psi(1) & \psi(2) & \psi(3) \end{pmatrix}$ så menar vi med permutationen $\phi \circ \psi$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (\phi \circ \psi)(1) & (\phi \circ \psi)(2) & (\phi \circ \psi)(3) \end{pmatrix}.$$

Om ϕ är $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och ψ är $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ så är

$$(\phi \circ \psi)(1) = \phi(\psi(1)) = \phi(1) = 3$$
$$(\phi \circ \psi)(2) = \phi(\psi(2)) = \phi(3) = 2$$
$$(\phi \circ \psi)(3) = \phi(\psi(3)) = \phi(2) = 1$$

Således är $\phi \circ \psi$ permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2713. Bestäm $\phi \circ \psi$ om ψ är $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och ψ är $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2714. Bestäm två permutationer på M, ϕ och ψ, sådana att $\phi \circ \psi$ och $\psi \circ \phi$ inte är samma permutation. (Såväl ϕ och ψ som $\phi \circ \psi$ och $\psi \circ \phi$ skall anges.)

Betrakta permutationen ϕ med utseendet $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Eftersom ϕ är omvändbar, existerar inversen ϕ^{-1} och är också en permutation på M. Vi får att ϕ^{-1} avbildar 1 på 2, 2 på 3 och 3 på 1. Alltså är ϕ^{-1} permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2715. Ange inversen till permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2716. Hur många olika permutationer på M finns det?

Del A. Uppgifter till vilka endast svar skall ges

2717. Ange koordinaterna för någon punkt som ligger i planet $x+2y-z+4=0$.

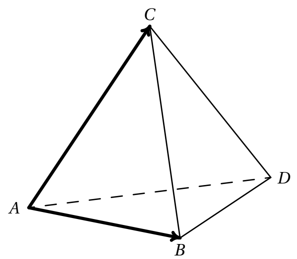
2718. Ange samtliga primitiva funktioner till $x \curvearrowright \dfrac{1}{x+1}$, $x > -1$.

2719. För vilket eller vilka värden på θ gäller att $e^{i\theta} = i$?

☐ $-\dfrac{\pi}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\dfrac{3\pi}{2}$

2720. Ange samtliga lösningar till differentialekvationen $y'' = 2$.

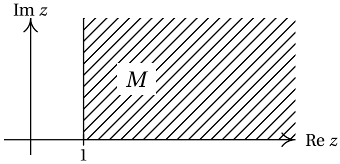
2721. En reguljär tetraeder begränsas som bekant av fyra liksidiga trianglar. Beräkna skalärprodukten mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ om triangelsidorna har längden 1.



2722. Funktionen f är definierad genom $f(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$. Värdet av $|f'(t)|^2$ är oberoende av t. Ange värdet av $|f'(t)|^2$.

2723. Beräkna $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ med hjälp av partialintegration.

2724. Figuren illustrerar en mängd M i det komplexa talplanet.



Vilken av följande mängder beskriver M?

☐ $\{z\colon \operatorname{Im}(z-1) \geq 0\}$ ☐ $\{z\colon 0 \leq \arg(z-1) \leq \dfrac{\pi}{2}\}$ ☐ $\{z\colon \operatorname{Re}(iz) \geq 0\}$

☐ $\{z\colon |z-1| \geq 0\}$ ☐ $\{z\colon 0 \leq \arg(z-3) \leq \pi\}$ ☐ $\{z\colon \operatorname{Re} z \geq 1)\}$

Del B. Uppgifter till vilka fullständiga lösningar skall ges

2725. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - xy = 0$$

som uppfyller $y(0) = 2$.

2726. Punkterna $P_1 : (1,2)$ och $P_2 : (3,-6)$ är givna. Mittpunkten på sträckan P_1P_2 kallas P. Bestäm en ekvation för den linje som dels är vinkelrät mot linjen genom P_1 och P_2 och dels går genom P. (Ortonormerat system.)

2727. a) Bestäm de reella tal x för vilka serien

$$1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \ldots$$

är konvergent. (1p)

b) Visa att seriens summa $S(x)$ uppfyller olikheten $S(x) > \frac{1}{2}$ för alla x för vilka serien konvergerar. (2p)

2728. Låt z vara ett komplext tal, $z \neq -1$. Visa att

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z > 0.$$

Tredje häftet

2729. Finns det någon reell, kontinuerlig funktion på intervallet $0 \leq x \leq 1$ som antar rationella värden i irrationella punkter och irrationella värden i rationella punkter?

2730. Ett amerikanskt spel som kallas ”Craps” tillgår så att spelaren börjar med att kasta två symmetriska tärningar en gång. Om poängsumman på de två tärningarna blir 7 eller 11, så vinner han, blir den 2, 3 eller 12, så förlorar han. Blir poängsumman däremot a, där $a = 4, 5, 6, 8, 9$ eller 10 fortsätter han att kasta tärningarna tills han får antingen just den summa a han fick i första omgången, varvid han vinner, eller summan 7, varvid han förlorar. Beräkna sannolikheten att spelaren vinner. *(Bengt Klefsjö.)*

2731. M är en delmängd av planet med följande egenskap: Om S_i, $i = 1, 2, \ldots$ är numrerbart många öppna cirkelskivor, vilkas union täcker M (dvs $M \subseteq \cup_1^\infty S_i$), så kan man bland de givna cirkelskivorna S_i välja ut *ändligt* många, vilkas union täcker M. (Mängden M sägs vara kompakt.) Antag att p är en punkt i planet, sådan att varje öppen cirkelskiva kring p innehåller minst en punkt som tillhör M. Bevisa att $p \in M$. (En öppen cirkelskiva kring p består av det inre av en cirkel med centrum i p.) *(Ulf Persson.)*

Enklare matematiska uppgifter

2732. En symmetrisk tärning kastas. Låt ξ vara det poängtal den visar. Därefter lägges ξ stycken lappar, märkta med talen $1, 2, \dots, \xi$, i en urna. En av dessa lappar drages på måfå. Vad är sannolikheten att den dragna lappen är märkt med a) talet 6, b) talet 2?
(Svar: a) 1/36, b) 29/120)

2733. Låt $(a_n)_1^\infty$ vara den s k Fibonaccitalföljden som är definierad genom $a_1 = a_2 = 1$ och $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n \geq 3$. Visa, t ex med induktion, att $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

2734. Låt A och B vara två mängder med kompositionsreglerna $\circ$ respektive $*$. Definiera kompositionsregeln $\otimes$ på mängden $A \times B = \{(a,b)\colon\ a \in A,\ b \in B\}$ genom $(a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 * b_2)$. Visa att

a) $\otimes$ är kommutativ på $A \times B$,
b) $\otimes$ är associativ på $A \times B$,
c) $(A \times B, \otimes)$ har neutralt element,
d) varje element i $A \times B$ har invers med avseeende på $\otimes$,
e) $(A \times B, \otimes)$ är en grupp,

då och endast då både $(A, \circ)$ och $(B, *)$ har motsvarande egenskap.

2735. Låt $(a_n)_1^\infty$ vara en talföljd med $0 < a_n < 1$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. vidare är följden $(na_n)_1^\infty$ begränsad och serien $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent. Visa att serierna

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1-a_n)^2}$,
b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1-a_n)^{1/a_n}}$,
c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1-a_n)^n}$

alla är konvergenta.
Ledning: b) Utnyttja att $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x} = e^{-1}$, c) utnyttja att $(1-a_n)^n = \left((1-a_n)^{1/a_n}\right)^{na_n}$.

2736. Visa att om x och y uppfyller $0 < x \leq y \leq \pi/2$ så gäller att

$$\frac{\sin x}{\sin y} \geq \frac{x}{y}.$$

Ledning: Visa att funktionen $t \curvearrowright \dfrac{\sin t}{t}$ är avtagande i $]0, \pi/2[$.

2737. Beräkna summan av alla 9-siffriga, positiva heltal som innehåller siffrorna 1, 2, ..., 9.
(Svar: $5(10^9 - 1) \cdot 8! = 201\,599\,999\,798\,400$)

2738. Visa att linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 4 - 2s \\ z = 16 - 5s \end{cases}$$

skär varandra. Bestäm en ekvation på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ för det plan som innehåller båda linjerna.
(Svar: $12x + 11y - 2z - 40 = 0$)

2739. De reella funktionerna $f_1, f_2, \ldots, f_n$, definierade på hela $\mathbb{R}$, säges vara linjärt oberoende om det finns reella tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$, som inte alla är noll och sådana att $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n = 0$. I annat fall säges funktionerna vara linjärt oberoende.

a) Visa att funktionerna $f_1 : x \curvearrowright 1 + x$, $f_2 : x \curvearrowright 1 + x + x^2$ och $f_3 : x \curvearrowright 1 + x - x^2$ är linjärt beroende.

b) Visa att funktionerna $f_1 : x \curvearrowright \sin x$ och $f_2 : x \curvearrowright \cos x$ är linjärt oberoende.

2740. Genom att göra substitutionen $x = 1/y$ får vi att

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1 + y^2} = -I.$$

Således är $I = 0$. Men $I = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$. Härav följer att $\pi = 0$. Förklara felet i ovanstående resonemang!

Fjärde häftet

2741. Med en *interaktion* i ett område med n stater menas ett mellanhavande mellan två (icke tomma) grupper av stater i området. Bestäm

a) antalet tänkbara interaktioner i vilken *en* av staterna är involverad,

b) totala antalet tänkbara interaktioner i området.

(Tore Öberg.)

2742. Visa att polynomet

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x - a_n$$

har precis ett positivt nollställe om $a_j \geq 0$ för alla j och $\sum_{j=1}^{n} a_j > 0$.

(Bengt Klefsjö.)

2743. I en rektangel $ABCD$ (medurs räknad) är $AB = p$ och $AD = q$, där p och q är heltal. Från A utgår en ljusstråle, sammanfallande med bisektrisen till vinkeln BAD. Rektangelns sidor antas vara speglande och strålen reflekteras enligt reflektionslagen. Bevisa att strålen slutligen hamnar i ett av rektangelns hörn och beräkna den väglängd som strålen har tillryggalagt innan den träffar ett hörn. *(Ulf Persson.)*

Enklare matematiska uppgifter

Avdelningen har denna gång samma utformning som ett centralt prov av den typ som ges i åk 3. Provet är avsett för S-linjen men torde med vissa justeringar duga även på E-linjen. det omfattar i princip hela årskursens teori.

Del L. Om ej annat anges skall endast svar ges till uppgifterna

Något om Fibonacciföljden

Man placerar vid början av en månad (som vi kallar månad 1) ett nyfött kanainpar i en bur. Vi antar att varje kaninpar föder ett nytt kaninpar varje månad med första nedkomsten under andra levnadsmånaden. Hur många kaninpar finns det då vid början av månad 2, månad 3 osv?

Detta problem studerade en italiensk matematiker kallad Fibonacci (1200-talet). Det ledde till studiet av en viss talföljd som sedermera fick namnet Fibonacciföljden. Denna talföljd har vissa speciella egenskaper, av vilka vi skall studera några.

Vi betecknar antalet kaninpar vid början av månad n med a_n. Då är tydligen $a_1 = 1$. Vidare är $a_2 = 1$. För $n = 3, 4, 5, \ldots$ gäller att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Den så definierade talföljden a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ är den s k Fibonacciföljden. Genom att sätta $n = 3$ får vi att $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$. På samma sätt är $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$.

2744. Beräkna a_5.

Vi ser att för Fibonacciföljden gäller att $a_1 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^1$ och $a_2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$ eftersom $1 \leq \frac{3}{2}$ och $1 \leq \frac{9}{4}$. Olikheten $a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ är alltså sann för $n = 1$ och $n = 2$. Det ligger då nära till hands att undra om olikheten är sann för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2745. Undersök om $a_3 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3$. (Kort utredning erfordras.)

Vi ser också att $a_2 < \frac{a_1+a_3}{2}$ ty $a_2 = 1$ och $\frac{a_1+a_3}{2} = \frac{3}{2}$. Olikheten $a_n < \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ är således sann för $n = 2$.

2746. Beräkna $\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ för $n = 3$. Gäller olikheten för $n = 3$? (Kort utredning erfordras.)

Eftersom $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]=1$, gäller det för första elementet i Fibonacciföljden att

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right].$$

I själva verket kan man visa att formeln

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

är sann för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2747. Visa att formeln är sann för $n = 2$ genom att beräkna

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

för $n = 2$ och jämföra med värdet på a_2. (Kort utredning erfordras.)

Att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ kan vi också skriva $a_{n-1} = a_n - a_{n-2}$. Sätter vi $n = 3$ får vi att $a_2 = a_3 - a_1$. Genom att även sätta $n = 5, 7, +, \ldots, (2k-1)$ får vi att

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_3 - a_1\\
a_4 &= a_5 - a_3\\
a_6 &= a_7 - a_5\\
&\ldots\\
a_{2k} &= a_{2k+1} - a_{2k-1}
\end{aligned}$$

Adderar vi båda leden får vi att $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2k} = a_{2k+1} - a_1$ eftersom de andra termerna på höger sida försvinner. Utnyttjar vi att $a_1 = 1$ kan vi skriva att

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2k} = a_{2k+1} - 1$$

2748. Det finns en liknande formel för $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2k-1}$. Försök finna denna genom att $n = 4, 6, \ldots, 2k$ i $a_{n-1} = a_n - a_{n-2}$ och därefter addera på samma sätt som ovan. (Kort utredning erfordras.)

Del A. Uppgifter till vilka endast svar skall ges

2749. Bestäm $\lg 867$.

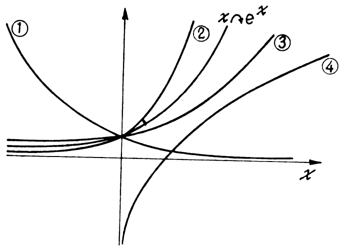
2750. Ange värdet av integralen $\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$.

2751. Ange summan till serien

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\dots$$

2752. Personalen på AB Plastsaker & Son skall bland sina 6 kvinnliga anställda utse en lucia och en tärna. På hur många sätt kan det ske?

2753. I figuren finns de grafiska bilderna till fem olika funktioner. En av dem är $x \curvearrowright e^x$. Vilken av de grafiska bilderna hör till funktionen $x \curvearrowright 10^x$?



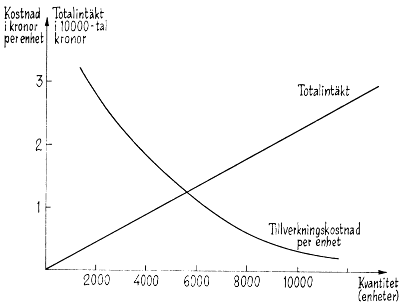
□ ① □ ② □ ③ □ ④

2754. lös ekvationen $2^{x+3}=3^{x+2}$.

2755. En urna innehåller 2 röda och 2 vita kulor. Man drar utan återläggning kulor ur urnan tills man får 2 kulor av samma färg. Ange sannolikheten $P(k)$ att det fordras precis k dragningar, $k=1, 2, 3, 4$.

k	1	2	3	4
$P(k)$				

2756. Vid ett företag kan tillverkningskostnaden per tillverkad enhet och totalintäkten illustreras i nedanstående diagram. Hur stor är bruttovinsten vid en produktion av 8000 enheter?



Del B. Uppgifter till vilka fullständiga lösningar skall ges

2757. Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = x^5$.

2758. Man kastar två symmetriska tärningar. Beräkna sannolikheten att antalet ögon på minst en av tärningarna är större än 2.

2759. Visa att $e^x + e^{-x} \geq 2$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

2760. Personerna A och B spelar en variant av ett gammalt ryskt sällskapsspel kallat ”rysk roulett”. En revolver med roterbart magasin har plats för sex skott. Den är vid spelets början laddad med ett skott. A börjar med att slumpmässigt rotera magasinet, sätter därefter revolvern mot tinningen och trycker av. Om han därefter fortfarande är vid liv sätter han in ytterligare ett skott och överlämnar revolvern till B, varefter proceduren upprepas. Efter varje klick byter spelarna alltså roll efter det att ytterligare ett skott insatts. När revolvern för första gången inte klickar är spelet slut!

a) Beräkna sannolikheten att B skjuter sig i sitt ”första försök”. (1p)

b) Beräkna sannolikheten att A vinner spelet, dvs att B skjuter sig. (2p)