Årgång 49, 1966

Första häftet

2555. Visa att $4^n + 11^n + 18$ ej kan vara primtal för något heltal $n \geq 0$.

2556. Man vill göra en behållare utan lock, som rymmer 1 m^3, i form av en rätvinklig parallellepiped. Den tillverkas av fyra stålplåtar, som svetsas samman och sedan svetsas fast på ett befintligt stålgolv. Man vill minimera kostnaden. Hur stor skall då resp. längd, bredd och höjd vara om plåten kostar 60 kr/m^2 och svetsningskostnaden är 20 kr/m (golvkostnaden är 0)?

2557. Låt a, b och c vara sidor i en triangel, vars yta är T. Bevisa att

$$4T\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Enklare matematiska uppgifter

2558. I ett nybyggt affärscentrum finns 8 butiker, fördelade i två plan med 4 butiker i varje plan. I båda planen är butikerna ordnade intill varandra i rad. De olika butikerna utlottas bland 8 sökande. Två av dessa, A och B, tänker öppna speceriaffär. Beräkna sannolikheten att a) A och B får butiker i samma plan, b) A och B får butiker intill varandra i samma plan.
(Svar: a) $3/7$, b) $3/14$)

2559. Sannolikheten att en tillverkningsprocess skall ge defekt enhet är lika med 0,2. Hur många enheter måste man minst tillverka för att man med en sannolikhet, som är minst $0,99$, skall ha tillverkat åtminstone en defekt enhet?
(Svar: 21)

2560. Rötterna till ekvationen $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ bildar termer i en geometrisk serie. Vilket samband råder mellan koefficienterna p, q och r?
(Svar: $r = q^3/p^3$)

2561. P är ett polynom av andra graden, sådant att $P(1) = -P(2) = P(3) = 1$. Beräkna $\sum_{k=1}^{n} P(k)$.
(Svar: $(2n^3 - 9n^2 + 10n)/3$)

2562. Givet en rät linje l och tre punkter A, B och C på en annan rät linje. P är en variabel punkt på l, medan Q är en punkt på AP och R en punkt på CP. Sök orten för Q, då B är mittpunkt på QR.
(Svar: En rät linje parallell med l)

2563. Visa att om $a_v \geq 0$, $v = 1, 2, 3, \ldots$, så konvergerar inte både $\sum_{v=1}^{\infty} 1/a_v$ och $\sum_{v=1}^{\infty} a_v/v$. Gäller detta även om villkoret $a_v \geq 0$ strykes?
(Svar: Nej. Sätt t.ex. $a_v = (-1)^v \sqrt{v}$)

2564. Beräkna $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)(v+2)\ldots(v+k)}$ för varje naturligt tal k.
(Svar: $\frac{1}{k \cdot k!}$)

2565. Bevisa att kurvorna $y = e^x$ och $y = Ax^2$ ej kan ha mer än tre skärningspunkter. för vilka värden på A finns resp. noll, en, två och tre skärningspunkter?
(Svar: a) 0 skärningspunkter för $A \leq 0$, b) 1 skärningspunkt för $0 < A < e^2/4$, c) 2 skärningspunkter för $A = e^2/4$, d) 3 skärningspunkter för $A > e^2/4$)

2566. Visa att $\sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} \geq \sqrt[3]{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}$.

Andra häftet

2567. För vilka heltal h är $(3^{59} + 7^{49})^{17} + h$ delbart med 7?

2568. För följden $\{a_n\}_1^{\infty}$ av reella tal gäller att $\sum_1^{\infty} a_n b_n$ är konvergent för varje följd $\{b_n\}_1^{\infty}$ av reella tal med $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Visa att $\sum_1^{\infty} |a_n| < \infty$.

2569. $f(x)$ är en icke-negativ funktion, som är definierad, monotont avtagande och kontinuerlig för $x > 0$. Dessutom existerar en konstant $a < 2$, sådan att $f(x) < af(2x)$ för alla $x > 0$. Visa att det finns en konstant A sådan att

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \leq Af(x) \text{ för alla } x > 0.$$

Enklare matematiska uppgifter

2570. Visa att ekvationen $nx^3 - x^2 - 1 = 0$ för varje naturligt tal n har precis en positiv rot a_n och att $\sum_1^{\infty} a_n$ är divergent.

2571. f har kontinuerlig derivata i intervallet $0 \leq x \leq 1$ och $f(1) = 2$. Beräkna $f(0)$, om $\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx = 1$.
(Svar: $f(0) = \pm\sqrt{2}$)

2572. Beräkna $I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ för varje naturligt tal n.
(Svar: Rekursionsformeln $I_n = 2nI_n - 2nI_{n+1}$ och $I_1 = \pi/2$ ger $I_n = \frac{\pi\cdot(2n-3)!!}{2^n(n-1)!}$, $n \geq 2$)

2573. Visa att om A och B är händelser med sannolikheter mindre än $1/3$ vardera så är sannolikheten för snitthändelsen $\complement A \cap \complement B$ större än $1/3$. ($\complement A$ och $\complement B$ är komplementhändelserna till A respektive B.)

2574. Fyra tärningar kastas. Beräkna sannolikheten att tre av dem visar ett och samma antal ögon och den fjärde ett antal skilt från detta.
(Svar: $5/54$)

2575. Visa, t.ex. med induktion, att för varje naturligt tal k gäller $|\sin kt| \leq k|\sin t|$ för alla t.

2576. A och B är delmängder av en viss grundmängd. Visa att $\complement A \cap (A \cup B) = B$, om och endast om $A \cap B = \emptyset$ (= tomma mängden).

2577. Lös fullständigt differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 5y = \sin x + e^{2x}.$$

(Svar: $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{4}(\cos x + \sin x) + e^{2x}$, c_1 and c_2 godtyckliga konstanter)

2578. Låt $w = \dfrac{1-i-z}{1+i+z}$, i = imaginära enheten, $z \in \mathbb{C}$ = mängden av komplexa tal. Visa att $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ och $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ är delmängder av högra respektive vänstra komplexa halvplanet.

Tredje häftet

2579. Tre spelare A , B och C spelar med lika vinstchanser och lika förlustchanser ett spel, varvid en av dem vinner och en förlorar. Vid spelets slut betalar den förlorande en krona till den vinnande. A startar med 2 kronor och de båda övriga med 1 krona var. Spelet upprepas till någon blir ruinerad. Bestäm sannolikheten att A blir ruinerad.
(Från 2-betygsskrivning i matematisk statistik. Insänt av Bengt Klefsjö.)

2580. Låt x vara ett reellt tal skilt från 0. Bevisa att

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}.$$

(Högerledet betecknar gränsvärdet, då $n \to \infty$, av produkten av de n faktorerna $\cos \frac{x}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$)

2581. Existerar det två reellvärda funktioner f_1 och f_2, definierade på intervallet $0 \leq x \leq 1$, som båda saknar lokala maxima och minima men som är sådana att $f_1 + f_2$ har oändligt många lokala maxima och oändligt många lokala minima, utan att vara konstant i något delintervall av $0 \leq x \leq 1$? Ge exempel eller motbevisa!

Enklare matematiska uppgifter

2582. $a_n = \dfrac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Visa att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2583. a, b, c och d är rella tal, $c \neq d$. Visa att

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^{cx} - e^{dx}} = \frac{a-b}{c-d}.$$

2584. För vilka heltal $n \geq 2$ finns ett heltal k, $1 \leq k \leq n-1$, sådant att

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1} = 2\binom{n}{k}?$$

(Svar: För alla n av formen $a^2 - 2$, a heltal, $a \geq 3$)

2585. Låt a vara ett heltal ≥ 3. Visa att $(a-1)^n - 1$ är delbart med $a(a-2)$ för alla jämna, naturliga tal n.

2586. A är en delmängd av det komplexa talplanet $\mathbb{C}$, sådan att $A = A^2$, där $A^2 = \{z \in \mathbb{C} : z = w^2 \text{ för något } w \in A\}$. Dessutom finns ett tal $R > 1$ så att $A \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Bevisa att $A \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

2587. A_1 och A_2 är två ändliga mängder, som består av 17 respektive 22 element. Dessutom vet man att $A_1 \cup A_2$ består av 29 element. Hur många element har $A_1 \cap A_2$?

(Svar: 10)

2588. V_0 är en fix vektor i planet med $|V_0| = 1$. visa att om V är en vektor, skild från V_0, men sådan att V är vinkelrät mot $V - V_0$, så är $|V| < 1$.

2589. Urnorna U_1 och U_2 innehåller vardera 4 vita och 4 svarta kulor. Man flyttar två slumpmässigt utvalda kulor från från U_1 till U_2 och därefter två slumpmässigt utvalda kulor från U_2 till U_1. Beräkna sannolikheten att urnorna efter dessa omflyttningar fortfarande innehåller 4 vita och 4 svarta kulor vardera.

(Svar: 29/63)

2590. a och b är positiva tal och α är större än eller lika med 1. Bevisa att

$$|a^\alpha - b^\alpha| \leq \alpha|a-b|\{a^{\alpha-1} + b^{\alpha-1}\}.$$

(Ledning: Använd medelvärdessatsen på $f(x) = x^\alpha$.)

Fjärde häftet

2591. En statistiker låter en fiapjäs vandra längs ett långt måttband. Den startar på noll och går sedan varje gång 1 steg med sannolikheten 2/3 och 2 steg med sannolikheten 1/3. Visa att sannolikheten att pjäsen gör uppehåll på ruta n är $\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4}$. Lös eventuellt problemet utan kännedom om svaret. *(Bengt Klefsjö.)*

2592. I ett sällskap har man gått runt och hälsat på varandra, dock ej nödvändigtvis alla på alla. Visa att det finns två personer, som hälsat lika många gånger.
(Efter American Math. Monthly. Insänt av Torgny Lindvall.)

2593. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ är komplexa tal. Visa att det finns en delmängd M av $\{1, 2, \ldots, n\}$ sådan att

$$\Big|\sum_{i\in M} z_i\Big| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_i^n |z_i|.$$

(Ledning: Betrakta separat de z_i som ligger i vart och ett av de fyra områden som begränsas av axelbisektriserna till rella och imaginära axlarna.)

Enklare matematiska uppgifter

2594. Visa att $\cos x + x \sin x \geq 1$ för alla x sådana att $0 \leq x \leq \pi/2$.

2595. $\sum_i^\infty a_i$ är en konvergent serie med positiva termer. Med $b_i = a_i^2 - a_i^3$ bildas en ny serie $\sum_1^\infty b_i$. Visa att denna är konvergent. Gäller detta även om villkoret $a_i \geq 0$ strykes?
(Svar: Nej. Exempel: $a_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}$. Jämför uppgift 2531)

2596. Visa att för varje naturligt tal n gäller

$$\sum_{\nu=1}^n \nu(n-\nu) \leq \frac{n^3}{6}.$$

2597. En spelare vinner 6 kronor om han får en sexa vid ett tärningskast, i annat fall förlorar han 1 krona. Bestäm förväntningsvärdet och variansen för hans vinst.
(Svar: 1/6 respektive $6\frac{29}{36}$)

2598. Lös ekvationen $z^3 = -27i$.
(Svar: $z = 3e^{i(\pi/2+2n\pi/3)}$, $n = 0, 1, 2$)

2599. För två godtyckliga mängder M och N införes operationen $\triangle$ genom $M \triangle N = M \cup N - M \cap N$. Visa att

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

för alla mängder A, B och C. Ge även exempel på att det kan gälla att

$$A \cup (B \bigtriangleup C) \neq (A \cup B) \bigtriangleup (A \cup C).$$

(Rita figur!)

2600. f är en kontinuerlig funktion på $0 \leq x < \infty$ sådan att $f(x) \to a$ då $x \to \infty$. Visa att

$$t^{-1} \int_0^t f(x)\,dx \to a \text{ då } t \to \infty.$$

2601. I ett tredimensionellt koordinatsystem är givet vektorerna $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Komplettera detta vektorpar med en tredje vektor så att de tre vektorerna utgör basvektorer i ett nytt ortonormalsystem.
(Svar: $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$)

2602. Är funktionen f, definierad av

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

kontinuerlig för alla x?
(Svar: Nej)