# Årgång 47, 1964

## Första häftet

**2457.** $ABC$ är en fix liksidig triangel. Linjerna $AD$ och $BE$ är parallella och skär linjerna $BC$ och $AC$ i $D$ resp. $E$. Vidare är $A_1$, $D_1$, $B_1$ och $E_1$ mittpunkterna på sträckorna $AC$, $AD$, $BC$ resp. $BE$. Sök orten för skärningspunkten mellan linjerna $A_1E_1$ och $B_1D_1$. *(X.)*

**2458.** Med $AkB$ betecknas att personerna $A$ och $B$ känner varandra och med $AiB$ att de inte känner varandra (om $A$ känner $B$ förutsätts $B$ känna $A$). En grupp $(A, B, C)$ på tre personer säges vara singulär, när antingen $AkB$, $BkC$, $CkA$ eller $AiB$, $BiC$, $CiA$. Visa, att bland de 20 grupper om tre personer, vilka kan uttagas bland sex personer $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, finns åtminstone två singulära.
*(efter Amer. Math. Monthly.)*

**2459.** Låt $f$ vara en funktion, som är definierad för alla reella tal. För alla $x$ och $y$ gäller att $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Bestäm $f$ om $f'(0)$ existerar lika med $C$. (En svårare uppgift fås om förutsättningen $f'(0) = C$ byts mot att $f$ är kontinuerlig i punkten 0 och $f(1) = C$.) *(M. L.)*

## Enklare matematiska uppgifter

**2460.** Lös ekvationen

$$\frac{a_1 - a_2}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{(x-a_2)(x-a_3)} + \ldots + \frac{a_n - a_1}{(x-a_n)(x-a_1)} = x,$$

där $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \neq 0$.
(Svar: $x = 0$)
(*Ledning:* $(p-q)/((x-p)(x-q)) = 1/(x-p) - 1/(x-q)$)

**2461.** Lös systemet

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 675 \\ (x-y)(x^2+y^2) = 351. \end{cases}$$ *(Michael Stifel 1544)*

(Svar: $x_1 = 9$, $y_1 = 6$; $x_2 = -6$, $y_2 = -9$)

**2462.** För vilka hela tal $x$ och $y$ gäller

$$x(y^2+1) + y^2 = (x+y)^2?$$ *(Efter Diofantos)*

(Svar: 1) $x = 0$, $y$ godtycklig, 2) $x = n^2$, $y = 1 \pm n$, där $n$ är heltal)

**2463.** En linje $l$ och en cirkel $c$ med medelpunkten $O$ är givna. Avståndet $PL$ från punkten $P$ till $l$ är lika med längden av tangenten från $P$ till $c$. Konstruera tangenten i $P$ till orten för $P$.
(Svar: Normalen mot $OL$)

**2464.** Två av en triangels hörn är $(2; 0)$ och $(-2; 0)$. Det tredje hörnet rör sig på linjen $y = 4$. Sök orten för niopunktscirkelns medelpunkt.
(Svar: $x^2 = -4y + 5$)

**2465.** Sök enveloppen till ellipsskaran $x^2 + a^4y^2 = a^2$ (ellipser med konstant yta $\pi$ ytenheter) genom att söka skärningspunkterna mellan två ellipser $x^2 + a^4y^2 = a^2$ och $x^2 + a_1^4y^2 = a_1^2$ och därefter låta $a_1$ gå mot $a$. Eliminera därefter $a$.
(Svar: $xy = \pm\frac{1}{2}$)

**2466.** Funktionerna $f$ och $F$ definierade genom $f(x) = x^2 + 2ax + 3a^2 + 12a + 1$ och $F(x) = 3x^2 + 2ax + 12x + a^2 + 1$ har minimivärdena $m(a)$ resp. $M(a)$. De minsta värden $m(a)$ och $M(a)$ kan anta för olika värden på $a$ betecknas $m$ resp $M$. Visa att $m = M$ och beräkna det gemensamma värdet.
(Svar: $m = -17 = M$)

**2467.** Funktionen $f$ är två gånger deriverbar. I punkten $(x; y)$ på kurvan $y = f(x)$ dras tangenten. Denna skär axlarna i $A$ resp. $B$. Ytan av triangeln $AOB$, där $O$ är origo, betecknas med $T(x)$. Visa, att $f'(x) \neq 0$ och $f''(x) \neq 0$ medför $T'(x) = 0$.

**2468.** Origo $O$ förenas med en punkt $P$ på kurvan $y = lx - x^3/k^2$. Abskissan för $P$ är $p$. Bestäm ytan av det kurvsegment, vars korda är $OP$. Vilken kurvradie $OQ$ halverar denna yta?
(Svar: $p^2/4k^2$; $x_Q = p/\sqrt[4]{2}$)

**2469.** Kordan $AB$ i ett givet parabelsegment råkas i $Q$ av diametern genom punkten $P$ på bågen. Hur delas triangeln $ABP$ av $PQ$, när triangeln $APQ$:s yta är maximal?
(Svar: Ytan av $APQ$: ytan av $BPQ = 2:1$)

## Andra häftet

**2470.** Låt $f$ vara ett (reellt) polynom med idel reella nollställen. Visa att $(f')^2 - ff'' \geq 0$. *(M. L.)*

**2471.** För vilka värden på $a$ är olikheten

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz \geq a(x^2 + y^2 + z^2)$$

riktig för alla $x$, $y$ och $z$? *(Från tvåbetygsskrivningen dec. 1963.)*

**2472.** Bestäm alla deriverbara funktioner $f$, vilka är definierade på hela den reella linjen och vilka för alla $x$ och $y$ uppfyller $f(x)f(y) = f(x+y)$. *(Torgny Lindwall.)*

## Enklare matematiska uppgifter

**2473.** Sju personer uppställes på måfå 1) i en ring, 2) på ett led. Sök sannolikheten att två givna personer kommer intill varandra.
(Svar: 1) 1/3, 2) 2/7)

**2474.** Två orter $A$ och $B$ ligger tio mil från varandra och är förbundna med en rak väg. En mil från denna väg ligger orten $C$. Normalen från $C$ mot vägen träffar denna sex mil från $A$. Hur skall man bygga en anslutningsväg från $C$ om man vet, att det reser dubbelt så många personer mellan $A$ och $C$ som mellan $B$ och $C$ och man önskar minimera den totala resvägen?
(Svar: Anslutningsvägen skall träffa $AB$ i $P$ så, att $AP = (6 - 1/\sqrt{8})$ mil)

**2475.** Visa att ekvationen
$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\,dt = \frac{1}{2}$$
har en och endast en positiv rot, $x_1$, och att $1 < x_1 < 2$.

**2476.** Bestäm det område i $ab$-planet, där punkten $(a; b)$ måste ligga, för att ekvationen $x^3 + ax + b = 0$ skall ha tre reella rötter.
(Svar: $a \le 0$ och $|b| \le \frac{2}{9}\sqrt{3}|a|^{3/2}$)

**2477.** En cirkel tangeras innantill av en annan cirkel med hälften så stor radie. Två lika stora cirklar tangerar dessa och varandra. Hur stor del av den största cirkelns yta upptages av de tre mindre?
(Svar: 209/324)

**2478.** Vilket av talen $2(a^4+1)^3$ och $(a^3+1)^4 + (a^3-1)^4$ är störst?
(Svar: För $a = 0, \pm 1$ är de lika, annars är det första störst)

**2479.** Ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ har rötterna $x_1$, $x_2$ och $x_3$. Beräkna $(-x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3) + 8x_1x_2x_3$.
(Svar: $a^3 - 4ab$)

**2480.** I en triangel $ABC$ är $H \neq A$ höjdernas skärningspunkt. Den mot medianen $HM$ i triangeln $HBC$ vinkelräta linjen genom $H$ skär $AC$ och $AB$ i $P$ resp. $Q$. Beräkna förhållandet $PH : HQ$.
(Svar: 1 : 1)

**2481.** Parabeln $y = l - x^2$, $l > 0$, är given. En cirkel inskrives i segmentet, som begränsas av kurvan och $x$-axeln. Hur beror antalet tangeringspunkter mellan cirkeln och parabeln på $l$?
(Svar: Om $0 < l \le 1$ finns en tangeringspunkt och om $l > 1$ finns två)

## Tredje häftet

**2482.** Betrakta en regelbunden oktaeder med kanten 1 dm. I tyngdpunkten på en av sidoytorna sitter en spindel och lurar på en fluga, vilken befinner sig i den motsatta sidoytans tyngdpunkt. Hur långt måste spindeln minst gå för att nå flugan och hur många lika korta vägar har den att välja på? *(L. Winqvist.)*

**2483.** Betrakta en godtycklig triangel. Dela varje sida i $n$ lika delar. Delningspunkterna förbindes med linjer parallella med sidorna. Hur många trianglar (av olika storlekar) uppstår i den så bildade figuren inklusive utgångstriangeln? (*Ledning:* Det är olika uttryck för jämna och udda $n$.) *(L. Winqvist.)*

**2484.** Låt $f$ vara en två gånger deriverbar funktion med $f(0) = 0$ och $f''(x) > 0$ för $x > 0$. Visa att för positiva $x_1$ och $x_2$ gäller $f(x_1) + f(x_2) < f(x_1 + x_2)$. *(M. L.)*

# Enklare matematiska uppgifter

**2485.** Man har två urnor $A$ och $B$. Urna $A$ innehåller 5 vita och 4 svarta kulor, medan urna $B$ innehåller 4 vita och 5 svarta kulor. Man tar slumpmässigt en kula ur $B$ och flyttar till $A$, varefter man ävenledes slumpmässigt tar en kula ur $A$. Vad är sannolikheten, att den sist dragna kulan är vit? Vad blir motsvarande sannolikhet, om man först flyttar två kulor från $B$ till $A$?
(Svar: $\frac{49}{90}$ resp. $\frac{53}{99}$)

**2486.** Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.
(*Ledning:* $\sum_1^\infty 1/n! = e-1$.)
(Svar: $7e-2$)

**2487.** Bestäm alla två gånger deriverbara funktioner $f$, för vilka gäller $f(x) = f'(-x)$ för alla $x$.
(Svar: $f(x) = K(\sin x + \cos x)$.)

**2488.** Ett fixt positivt tal $n$ och de bägge rekursionsformlerna

$$a_k = a_{k-1} + n\cdot a_{k-2},\ a_1 = 1,\ a_2 = 2n+1,$$
$$b_k = b_{k-1} + n\cdot b_{k-2},\ b_1 = 1,\ b_2 = 1$$

är givna. Visa att

$$a_k + b_k\sqrt{4n+1} = 2\Big(\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}\Big)^k.$$

**2489.** Fyra orter ligger i var sitt hörn av en rektangel med sidorna 10 km och 20 km. Man vill förena orterna med ett så kort vägnät som möjligt. Hur långt måste vägnätet vara minst om landskapet är slätt?
(Svar: $(20+10\sqrt{3})$ km $\approx 37{,}3$ km)

**2490.** Om i triangeln $ABC$ bissektriserna $BB_1$ och $CC_1$ råkas i $I$ och $IB_1 = IC_1$, medan $AB \neq AC$, hur stor är då vinkeln $A$?
(Svar: 60°)

**2491.** Längden på sidorna i en triangel bildar geometrisk serie. Mellan vilka gränser ligger kvoten?
(Svar: $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) < k < \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$)

**2492.** I ett likbent parallelltrapets är de parallella sidorna $2a$ resp. $2b$. Höjden är $a$. Hur stort är avståndet från den omskrivna cirkelns medelpunkt till den förstnämnda sidan?
(Svar: $b^2 : 2a$)

## Fjärde häftet

**2493.** Funktionen $f$ är definierad på $R$ (= mängden av alla rella tal) och har egenskapen $f(x) = f(2x)$. Bevisa att om $f$ är kontinuerlig på hela $R$, så är $f$ konstant. Kan förutsättningen ”$f$ kontinuerlig på hela $R$” minskas? Ge också ett exempel på att påståendet inte behöver vara sant, om förutsättningen strykes helt.

*(Från tvåbetygsskrivningen sept. 1964.)*

**2494.** Visa, att om man kastar ett symmetriskt mynt $n$ gånger, så är sannolikheten att man aldrig slår två klave efter varandra lika med

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}}{4^{n+1}\sqrt{5}}.$$

(Lös eventuellt uppgiften utan kännedom om formeln.)

*(Rudolf Tabbe.)*

**2495.** Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en reell talföljd sådan att

$$a_n \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m$$

för alla $m$ och $n$. Visa att $(a_n/n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent.

*(Från trebetygsskrivningen sept. 1964.)*

# Enklare matematiska uppgifter

**2496.** En tankspridd herre glömmer sitt paraply vid besök i butiker med en sannolikhet av $1/4$ . En dag har han besökt tre butiker och konstaterar vid hemkomsten, att han glömt sitt paraply. Beräkna sannolikheten att detta har skett i respektive den första, den andra och den tredje butiken.

(Svar: 16/37, 12/37, 9/37)

**2497.** Längs en rät linje finns $n$ punkter på ett avstånd av $a$ längdenheter från varandra. Man väljer på måfå två av punkterna. Låt $\xi$ vara avståndet mellan de valda punkterna. Beräkna väntevärdet $E[\xi]$.

(Svar: $\frac{1}{3}(n+1)a$)

**2498.** Hur många termer måste tagas med i talföljden 1, 5, 9, 13, ..., $1+4n, \ldots$ för att $k$ st av dem ska vara heltalskvadrater?

(Svar: $k(k-1)+1$)

**2499.** En kvadrat och en liksidig triangel är inskrivna i samma cirkel. Om en sida i den förra delas mitt itu av en sida i den senare, vilka vinklar bildar dessa sidor?

(Svar: 45° och 135°)

**2500.** Med $p$ och $q$ förstås givna naturliga tal. I serien $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-1}$ betecknar $A_1$ summan av de $p$ första termerna, $A_2$ summan av de $p$ därpå följande termerna osv; i serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1/2n)$ är $B_1$ summan av de $q$ första termerna, $B_2$ summan av de $q$ därpå följande termerna osv. När är $\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)=0$?

(Svar: $q=4p$)

**2501.** $A$, $B$, $C$ ligger i denna ordning på en vågrät marklinje. Rätt över $C$ befinner sig en lysande punkt $D$. En rak stång med längden $k$ ger placerad lodrätt som $AA_1$ skuggan $AA_2=a$, som $BB_1$ skuggan $BB_2=b$. Beräkna $BC$ och $CD$, då $AB=l$ (*Kinesisk skrift från 300-talet e.Kr.*)

(Svar: $BC=bl/(a-b)$, $CD=k+kl/(a-b)$)

**2502.** Visa att om $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är fixa reella tal, så gäller för alla reella $x_1, x_2, \ldots, x_n$ med $\sum_{k=1}^{n}|x_k|=1$, $\sum_{k=1}^{n}x_k=0$, att $\sum_{k=1}^{n}a_kx_k \le \frac{1}{2}(\max_k a_k - \min_k a_k)$. Kan likhet förekomma?

*(Från trebetygsskrivningen sept. 1964.)*

(Svar: Ja)

**2503.** Bevisa att kurvorna $y=e^x$ och $y=Ax^2$ ej kan ha mer än tre gemensamma punkter. För vilka värden på $A$ finns resp. noll, en , två och tre gemensamma punkter?

(Svar: $A\le 0$ ingen punkt, $0<A<e^2/4$ en punkt, $A=e^2/4$ två punkter, varav en tangeringspunkt, $A>e^2/4$ tre punkter)

**2504.** Vad är villkoret för att rötterna till ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ skall bilda aritmetisk serie?
(Svar: $2a^3 - 9ab + 27c = 0$)