Årgång 43, 1960

Första häftet

2244. Vilka värden kan

a) $\tan A \cdot \tan B + \tan A \cdot \tan C + \tan B \cdot \tan C$,

b) $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

anta i en triangel ABC? *(X.)*

2245. På en cirkel med centrum O väljes en båge AB, som är större än halvcirkeln. Tangenterna i A och B råkas i C. När denna figur får rotera kring CO uppkommer en päronliknande kropp. Visa, att normalplanet mot kroppens axel i dess tyngdpunkt halverar totala ytan, om det råkar dess kalott. *(V. Thébault.)*

2246. Sidorna i en triangel ABC har längderna a, b och c i vanlig ordning. Deras mittpunkter bildar en ny triangel, vars inskrivna cirkel har centrum i M. I vilket förhållande delar sekanten AM sidan BC? *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2247. Utför divisionen

$$\left[(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5\right] : \left[(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3\right].$$

(Svar: $\frac{5}{3}(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$.
– Ledning: Divisorn är $3(x+y)(x+z)(y+z) = 3f$. Dividenden innehåller som ena faktor $5f$. Den andra har formen $k\sum x^2 + l\sum xy$. Sättes t.ex. $x=0$, fås $k=l=1$.)

2248. När får man riktigt resultat vid den kvasilösning av andragradsekvationen $(ax+b)(cx+d) = f$, där $f \neq 0$, som består i att man sätter vänstra ledets faktorer, en i sänder, lika med högra ledet?
(Svar: För $(ax+b)(cx+d) = b+d-1$ med rötterna $(d-1):a$ och $(1-b):a$)

2249. I rektangeln $ABCD$, där $AB : BC = 3\sqrt{3} : 5$, inskrives en liksidig triangel med ett hörn i A, ett på BC och ett på CD. Beräkna förhållandet mellan triangelns och rektangelns ytor.
(Svar: $7:15$)

2250. I triangeln ABC, där $AB = AC$, drages medianen BM. Vinkeln ABM är hälften så stor som vinkeln CBM. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: $A = 31{,}94°$, $B = C = 74{,}03$)

2251. Visa, att om sidan AB i triangeln ABC är aritmetiska mediet till sidorna AC och BC, så kan vinkeln C ej vara större än $60°$.

2252. En rät cirkulär kon med basradien 7 cm och höjden 24 cm skäres av ett med basytan parallellt plan. På vilket avstånd från basytan skall planet läggas, för att toppkonen och den stympade konen skall få lika totala ytor?
(Svar: 4,8 cm)

2253. I ett givet klot inskrives en rät cirkulär kon och i denna inskrives ett halvklot med sin plana yta i konens basyta. Bestäm det största värde, som förhållandet mellan halvklotets och det givna klotets volymer kan anta.
(Svar: $32\sqrt{3} : 243 = 0{,}2281$)

2254. Från en godtycklig punkt på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = 2a^2b^2$ drages tangenterna till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Visa, att de med dessa tangenter parallella diametrarna i ellipserna är konjugatdiametrar.
Ledning: Ellipserna är projektionerna av en kvadrats in- och omskrivna cirklar.

2255. Man har $f(x) = \tan x : \tan\alpha - x : \alpha$, där $0 \leq x < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Visa, att $f'(0) < 0$ och $f'(\alpha) > 0$.

Andra häftet

2256. Den parabel, som i en likbent triangel tangerar de lika sidorna i basens ändpunkter, går genom de punkter på triangelns in- och vid dess bas vidskrivna cirklar, som har maximiavstånd från figurens symmetriaxel. *(X.)*

2257. I en tetraeder med sidoytorna A, B, C och D finnes en punkt P så belägen att de fyra plan som lägges genom P parallellt med var sin sidoyta utskär likytiga trianglar i tetraedern. Bestäm en sådan triangelyta. *(V. Thébault.)*

2258. Sök orten för brännpunkterna till ett kägelsnitt med givet centrum och två givna tangenter. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2259. Ekvationen $x^3 - 5x^2 + x - 1 = 0$ har rötterna x_1, x_2, x_3. Beräkna $(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)$ och $(1-x_1^4)(1-x_2^4)(1-x_3^4)$.
(Svar: -32 och -512)

2260. Lös ekvationen $6^x + 2 = 2^{x+1} + 3^x$.
(Svar: $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}6309$)

2261. I den vid A rätvinkliga triangeln ABC är I och O den inskrivna resp. den omskrivna cirkelns medelpunkt. Den brutna linjen AIO delar triangelns yta i förhållandet $1:2$. Beräkna den minsta vinkeln.
(Svar: 16,35°)

2262. En regelbunden femhörning med sidan 5 cm skall förvandlas till en regelbunden tiohörning genom att hörnen bortskäres. Beräkna tiohörningens sida.
(Svar: $\sqrt{5}$ cm)

2263. I triangeln ABC är $AB : AC = 1 : 2$. Den inre bisektrisen till vinkeln A är 3 cm och den yttre 4 cm. Bestäm sidan AB.
(Svar: $\frac{1}{4}\sqrt{97} = 2{,}46$ cm)

2264. Från $P(a; b)$ drages tangenterna till kurvan $x^2y = 1$. Kontaktpunkterna är A, B och C. Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten i triangeln ABC.
(Svar: $(0; 3 : 4a^2)$)

2265. Man har $u = 1 : \sqrt{f'(x)}$ och $v = f(x) : \sqrt{f'(x)}$. Visa, att $vu'' = uv''$.
(Ledning: $v : u = f(x)$)

2266. I skärningspunkten mellan kurvan $y^2 = a(x+1)$ (där $a > 0$) och y-axeln drages kurvans normal. Från origo drages en rät linje vinkelrät mot normalen. Sök orten för dessa linjers skärningspunkt, när a varierar.
(Svar: $y^2 = x^3 : (2-x)$ (Kissoid))

2267. En vid origo O rätvinklig triangel OAB har hörnet A på linjen $x = 6$ och B på linjen $y = 2$. Sök orten för triangelns tyngdpunkt.
(Svar: Linjen $9x + 3y = 20$)

2268. I en egyptisk triangel är vinkeln A 90°, den mindre kateten AB, M hypotenusans mittpunkt och I den inskrivna cirkelns medelpunkt. Visa, att vinkeln BIM är 90°.

2269. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av de två första termernas inverterade värden 1. Ange seriens summa (y) som funktion av kvoten (x), och upprita motsvarande kurva.
(Svar: $y = \dfrac{x+1}{x(1-x)}$; $0 < x^2 < 1$. Min. i $(\sqrt{2}-1; 3+\sqrt{8})$)

Tredje häftet

2270. Om $F(x) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$ och $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, är $F(f) = f(F)$. Varför? *(X.)*

2271. Punkterna A, B, C, D ligger i denna ordning på en rät linje så, att $AB : BC = -AD : DC$. Konstruera en figur, i vilken $AD : BC$ är minimum. *(X.)*

2272. Cirklarna (O) och (I) är givna. En variabel triangel ABC är inskriven i (O) och omskriven kring (I). Ytterbisektriserna till triangelns vinklar A, B, C råkar (O) på nytt i A_1, B_1, C_1 respektive. Vad kan man bevisa om höjdernas skärningspunkt i triangeln $A_1B_1C_1$? *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2273. Visa genom förkortning, att

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi+n\pi} \frac{\cos 3x+\sin 3x}{\cos x-\sin x} = 3.$$

2274. Eliminera t mellan ekvationerna

$$1:\cos t - \cos t = a, \quad 1:\sin t - \sin t = b.$$

(Svar: $a^4b^2 + a^2b^4 + 3a^2b^2 = 1$.
–Ledning: $a : b = \tan^3 t$ och $ab = \sin t \cdot \cos t$.)

2275. Lös ekvationen $\log^3 x - \log x^3 + \log 3x = \log 30$.
(Svar: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 41,5$, $x_3 = 0,241$)

2276. I en likbent triangel har den omskrivna cirkeln och den vid basen vidskrivna cirkeln båda radien 1 cm. Bestäm den inskrivna cirkelns radie.
(Svar: $\sqrt{12} - 3 = 0{,}464\,\text{cm}$)

2277. Två mot varandra vinkelräta linjer, den ena genom $A(1;2)$ och den andra genom $B(-1;5)$, skär x-axeln i resp. P och Q så, att avståndet PQ blir 9 längdenheter. Sök linjernas ekvationer.
(Svar:

$$\begin{matrix}(AP)\\(BQ)\end{matrix}\ \begin{cases}2x-y=0\\x+2y-9=0\end{cases}\quad \begin{cases}x-5y+9=0\\5x+y=0\end{cases}\quad \begin{cases}2x+5y-12=0\\5x-2y+15=0\end{cases}\quad \begin{cases}x+y-3=0\\x-y+6=0\end{cases}$$

)

2278. En parallellogram $ABCD$ har hörnen A och C i godtyckliga punkter på en hyperbel. Sidorna AB och DC är parallella med den ena, AD och BC med den andra asymptoten. Visa, att BD går genom centrum.

2279. Parabeln $y = a(4x - x^2)$ skär x-axeln i O och A. Det av OA avskurna segmentet roterar kring OA. Bestäm konstanten a, så att den uppkomna rotationskroppen får lika stor volym som en sfär med OA som diameter.
(Svar: $a = \pm\frac{1}{4}\sqrt{5}$)

2280. Punkterna $A(a; 0)$ och $B(-a; 0)$ är givna. C är en rörlig punkt på AB. Med AC och BC som diametrar ritas cirklar. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenten i C och en annan gemensam tangent.
(Svar: Ellipsen $x^2 + 4y^2 = a^2$)

2281. På kurvan $ny = x^2$ och linjen $x = m$ är A och B punkter så belägna, att linjen AB går genom origo. Sök orten för mittpunkten av sträckan AB.
(Svar: Parabeln $ny = x(2x - m)$)

2282. För vilken spetsig vinkel x har

$$\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 x} + \sqrt{a^2 + b^2 \cot^2 x}$$

extremvärde, då a och b är givna sträckor?
(Svar: Min. är $2\sqrt{a^2 + b^2}$ för $x = \frac{1}{4}\pi$. – Sök minimum av sträckornas medelproportional)

Fjärde häftet

2283. Vilken är den största gemensamma divisorn till talen $N = n^{10} + n^6 - 2n^2$, då n genomlöper alla heltalsvärden? *(X.)*

2284. I triangeln ABC tangerar den inskrivna cirkeln sidorna BC, CA och AB i resp. A_1, B_1 och C_1. Om l, m och n betecknar längderna B_1C_1, C_1A_1 och A_1B_1, så är $(m^2+n^2) : h_a + (n^2+l^2) : h_b + (l^2+m^2) : h_c = 6r$. *(V. Thébault.)*

2285. På linjen l ligger punkterna O, A och B i denna ordning och $OB > 3OA$. Att på normalen mot l i O konstruera punkten P, så att
a) vinkeln OAP blir tre gånger så stor som vinkeln OBP,
b) vinkeln OPB tre gånger så stor som vinkeln OPA. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2286. Bestäm två tal, vilkas summa, skillnad, produkt och kvot i denna ordning bildar en aritmetisk serie.
(Svar: $-1,125$ och $-0,6$)

2287. Lös ekvationen $(1-\sin 2x):(1-\cos 2x)=\tan x$.
(Svar: $26{,}565° + n\cdot 180°$)

2288. Två cirklar med radierna 3 och 10 cm tangerar varandra utantill i punkten A. Bestäm på tangenten i A en punkt P, så att övriga tangenter som drages från P med varandra bildar rät vinkel.
(Svar: AP är 2 cm eller 15 cm)

2289. Genom $P\,(0;\,1)$ drages en korda AB i parabeln $2y=x^2$. Bestäm höjden mot hypotenusan i den triangel, vars kateter utgöres av PA och PB.
(Svar: 1 längdenhet)

2290. I en triangel har en sida längden a. Samma längd har en annan sidas projektion på den tredje. Sök maximum för triangelytan.
(Svar: $\frac{3}{8}a^2\sqrt{3}$ ytenheter)

2291. I vilka likbenta trianglar ABC med $AB=AC$ är $\tan A+\tan B$ ett minimum?
(Svar: Basvinkeln 64,09°. Höjden mot sidan AB delar denna enligt ”gyllene snittet”)

2292. Bestäm den yta som inneslutes av kurvorna $y=x^3$ och $y=x^2+2x$.
(Svar: $3\frac{1}{12}$ ytenheter)

2293. Räta linjen $y=x+1$ tangerar kurvan $y=x^2+ax+2$. Bestäm konstanten a. Beräkna ytan av det slutna området, som bildas av tangenten och de mot a-värdena svarande kurvorna.
(Svar: $a_1=3$; $a_2=-1$; ytan är $\frac{2}{3}$ ytenheter)

2294. I kvadraten $ABCD$ kan man alltid draga en rät linje genom A, som skär diagonalen BD i F, sidan BC i G och förlängningen av sidan DC i H så, att trianglarna AFB och GCH får lika ytor. Visa, att $AF\cdot AG=HG^2$ och $FG\cdot FH=AF^2$.
(Svar: Tillskrives Archimedes enligt en arabisk källa. Likheterna gäller, även om $ABCD$ är en parallellogram)

2295. (x,y,z) är ett positivt lösningssystem till $x^2=y^2+z^2$, $xz=y^2$, $yz=1$. Beräkna x^4-2y^4 och y^4-z^4.
(Svar: Båda uttrycken har värdet 1)

2296. Man har två serier cirklar $a_1, a_2,\ldots$ och $b_1, b_2,\ldots$ I a_n är diametern $\frac{1}{4}n$ längdenheter, hos b_n är ytan n motsvarande ytenheter. Vilka a_n och b_n är närmast ytlika?
(Svar: $n=20$)

2297. Undersök, hur antalet normaler till kurvan $2y=(x-1)^2$ från en punkt P på y-axeln varierar, när P genomlöper nämnda axel.

(Svar: Om p är P:s ordinata, gäller för områden $p > 2,5$, $p = 2,5$ och $p < 2,5$ resp. 3, 2 och 1 normaler)