Årgång 41, 1958

Första häftet

2143. I en given cirkel är inskriven en triangel ABC, i vilken $b+c=ma$, där m är ett givet tal >1. Sök enveloppen för linjen BC, då hörnet A är fixt. *(X.)*

2144. Man har $x+y+z=0$. Två konjugattal tecknas u, $\bar{u}$. Sök enkla samband mellan de cykliska summorna a) $\sum x\bar{x}$ och $\sum(x-y)(\bar{x}-\bar{y})$ b) $\sum x^2\bar{x}^2$ och $\sum(x-y)^2(\bar{x}-\bar{y})^2$. *(X.)*

2145. I triangeln ABC med ytan T är medianen $AM=m_a$. Beräkna avståndet mellan fokus och styrlinje i den parabel, som tangerar AB och AC i B resp. C. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2146. Två mot varandra vinkelräta linjer genom origo, O, skär i M och N linjen genom $A(4,-1)$ och $B(-4,5)$ så, att sträckorna AB och MN får samma mittpunkt. Ange ekvationerna för linjerna OM och ON.
(Svar: $x-2y=0$ och $2x+y=0$.)

2147. Av två parallella linjer, som delar sträckan $A(2,0)\,B(5,0)$ harmoniskt, går den ena genom $(4,2)$ och den andra genom $(8,4)$. Sök linjernas ekvationer.
(Svar: $x=4$ och $x=8$ eller $8x-11y-10=0$ och $8x-11y-20=0$.)

2148. Två cirklar med medelpunkterna O och O_1 tangerar samma räta linje i A resp. A_1 och skär varandra i P. Sök vinkeln mellan tangenterna i P, då linjerna OA_1 och O_1A är vinkelräta mot varandra.
(Svar: 60°.)

2149. På ett lutande plan ligger en liksidig triangel. Två av sidorna bildar vinklarna 20° och 30° med horisontalplanet. Sök planets lutning.
(Svar: 30,75° eller 57,88°.)

2150. Ange ekvationen för en linje, som är både tangent och normal till kurvan $x^2y=1$.
(Svar: $4y=\pm x\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}$.)

2151. En normal i punkten $(a,1/a^2)$ till kurvan $x^2y=1$ råkar kurvan i punkterna A och B. Hur stor är ytan mellan linjen AB och bågen AB?
(Svar: $|(1-2a^6)^{3/2}:a^7|$. Villkor $a^6<0,5$.)

2152. Visa, om $cy^2=(x^4+1)\sqrt{x^4+4}-x^2(x^4+3)$, så är $y'\sqrt{x^4+4}+3xy=0$.

2153. Tangenten i en punkt P på kurvan $y = ax^3 + bx + c$ råkar kurvan i Q. Sök orten för mittpunkten av sträckan PQ.
(Svar: $y = 28ax^3 + bx + c$.)

2154. Konstruera kurvan $3y\cos x = 3 - \tan x$.
(Svar: Asymptoter: $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$. Minima: $\frac{5}{12}\sqrt{5}$ och $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$. Maxima: $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ och $-\frac{5}{12}\sqrt{5}$.)

Andra häftet

2155. Beräkna

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x} \cdot \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}.$$

(X.)

2156. Två räta linjer a och b råkas i O. Normalerna från punkten P mot a och b skär resp. b i B och a i A. Sök orten för P, då fyrhörningen $OAPB(O)$ bibehåller samma yta. *(X.)*

2157. I varje triangel ABC är

$$\frac{p^4 + (p-a)^4 + (p-b)^4 + (p-c)^4 - a^4 - b^4 - c^4}{T^2}$$

ett och samma hela tal. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2158. I varje triangel ABC är

$$\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C - \cos A \cos B \cos C = 1.$$

2159. AB är diameter i en cirkel O med radien 1. Tangenten i en punkt M på cirkeln skär tangenterna i A och B i A_1 resp B_1. Bestäm medelproportionalen till volymerna av de dubbelkoner som alstras av trianglarna ABM och A_1OB_1 vid rotation runt AB.
(Svar: $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$)

2160. Volymerna av de kroppar som alstras i föregående uppgift av cirkeln, trapetset AA_1B_1B och triangeln A_1OB_1 vid rotation kring diametern AB är V_1, V_2, och V_3 resp. Beräkna $(2V_3 - V_2)/V_1$.
(Svar: $\frac{1}{2}$. – Detta förhållande gäller även för en ellips som har AB till axel)

2161. Mellan vilka gränser varierar skillnaden mellan hypotenusan och tillhörande höjd i en rätvinklig triangel med given katetsumma, s? *(Efter Cardano, 1500-talet)*
(Svar: Mellan s (exklusive) och $\frac{1}{4}s\sqrt{2}$ (inklusive))

2162. Av en sfär bortskäres två segment, vilkas höjder förhåller sig som $2:3$ och volymer som $1:2$. Hur stor del av sfären har bortskurits?
(Svar: $729:1331$)

2163. Visa, att om $3x=(y+1)\sqrt{1-2y}$, så är $y(y-1)y''=1+(y')^2$.

2164. En cirkel O går genom hörnen A och D i kvadraten $ABCD$ med sidan a samt skär sidorna AB och CD i E resp F. Bestäm radien så, att bågen EF delar kvadratens sida mitt itu.
(Svar: $0,5089\,a$. – Om medelpunktsvinkeln $EOF=x$, erhålles ekvationen $3\sin x+2\cos x=2-x$ med approximativ lösning 158,62°.)

2165. Baskanterna i en tresidig pyramid är 4, 5 och 6 cm. Sidokanterna är alla 7 cm. Bestäm pyramidens volym.
(Svar: $1,25\sqrt{279}=20,88\text{ cm}^3$)

2166. Vilken punkt på linjen $5x-3y-70=0$ ligger lika långt från de båda tangenter, som från punkten (45, 19) kan dragas till cirkeln $3x^2+3y^2-12x+15y+7=0$?
(Svar: (17, 5) och $(\frac{397}{11},\frac{405}{11})$)

Tredje häftet

2167. Varje dignitet av $\sqrt{2}-1$ kan skrivas $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.
(The Amer. Math. Monthly.)

2168. Punkterna A, B och C delar cirkelbågen $ABCD$ i tre lika delar. En cirkelbåge AD tangerar kordan AC och är belägen inom trapetset $ABCD$. Den av cirkelbågarna bildade ”månskäran” har samma yta som parallelltrapetset. Sök villkoret härför.
(Efter Hippokrates, 5:e årh. f. Kr.)

2169. I triangeln ABC är höjderna AA_1, BB_1 och CC_1. Ange avståndet mellan medelpunkterna för cirklarna ABC och $A_1B_1C_1$ som funktion av R och vinklarna A, B och C. Visa, att det minsta av avstånden från hörnen A, B, C till sidorna B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 understiger summan av de båda andra med radien i cirkeln ABC, om de nämnda cirklarna är ortogonala. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2170. I en likbent triangel är den inskrivna cirkelns diameter fjärde proportionalen till omkretsen, basen och en av de lika sidorna. Bestäm tirangelns vinklar.
(Svar: Basvinkeln är 30°.)

2171. I en aritmetisk serie med obegränsat antal termer är summan av alla termer med ensiffrigt nummer 100 och summan av alla termer med tvåsiffrigt nummer 100^2. Beräkna summan av alla termer med tresiffrigt nummer.
(Svar: 100^3. I allmänhet är summan av alla termer med n-siffrigt nummer 100^n.)

2172. I en geometrisk serie är summan av de nio första termerna 73 gånger så stor som summan av de tre första. Summan av de 18 första termerna är lika med summan av de nio första termernas kvadrater. Beräkna första termen.
(Svar: 3 eller $1-\sqrt[3]{9}$.)

2173. I en likbent triangel är avståenden från den omskrivna cirkelns medelpunkt till sidorna 3 cm, 3 cm och 7 cm. Beräkna vinklarna.
(Svar: Basvinkeln är 70,53°.)

2174. Sidorna AB och AC i triangeln ABC går genom punkterna $(-1,3)$ resp. $(3,-1)$. Sidan BC som är parallell med x-axeln går genom punkten $(0,-2)$. Bisektrisen till vinkeln A ligger på y-axeln. Beräkna ytan.
(Svar: 24,5 ytenheter.)

2175. En korda AB parallell med x-axeln avskär av parabeln $y=x^2$ ett segment med ytan A_1. I segmentet inskrives dels en triangel med två hörn i A och B och maximiyta A_2, dels en rektangel med två hörn på AB och maximiyta A_3. Visa, att $A_1 : A_2 : A_3 = 12:9:4\sqrt{3}$.

Resultatet gäller även för en godtycklig korda, vilket inses, om den med AB parallella tangenten tages till x-axel och doametern genom tangeringspunkten till y-axel.

2176. Räta linjerna $y=2x$ och $y=2x+l$ skär parabeln $y=x^2$ i origo O och punkten A resp B och C (B under C). Bestäm l, så att ytan av trapetset $OABC$ blir ett maximum.
(Svar: $l=-8/9$.)

2177. En ellips, vars axlar ligger på koordinataxlarna, går genom punkten $(3,1)$. Sök maximivärdet av ellipsens yta.
(Svar: 6π ytenheter. Svaret blir $2\pi|pq|$, om ellipsen går genom punkten (p,q).)

2178. Genom punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(5,0)$ drages linjer som bildar en liksidig triangel. Sök maximum för dess sida.
(Svar: $\sqrt{28}$ längdenheter.)

Fjärde häftet

2179. Från en punkt P drages tangenterna till en hyperbel. De med asymptoterna parallella linjerna genom P skär kurvan i A och B. Visa, att normalerna till PA och PB i A och B råkas på mittpunktsnormalen till tangentkordan. *(V. Thébault.)*

2180. En cirkel med centrum O och en en punkt A ej belägen på cirkeln eller i O är givna. Finnes en punkt B, för vilken förhållandet $\frac{PA^2}{PB \cdot PQ}$ är konstant, när kordan PQ (eventuellt förlängd) vrider sig kring B? *(X.)*

2181. Skriv upp alla primtal så beskaffade, att även alla konsekutiva sifferföljder, som ingår i talet, är primtal, varvid 1 räknas som primtal. *(J. Lundström.)*

Enklare matematiska uppgifter

2182. I en triangel ABC uppdelas ytan i tre delar av de linjer, som drages från den omskrivna cirkelns medelpunkt till hörnen. Delarnas ytor förhåller sig som sidorna i en annan triangel. Sök dennas vinklar.
(Svar: $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$.)

2183. I den likbenta triangeln ABC utdrages basen AB över B till D så, att $AB = BD$. En linje l drages genom A parallell med CD. En linje genom C skär l i E och förlängningen av BA i F, så att $EF = AC$. Visa, att sträckorna AB, CE, AF och $2AC$ bildar en geometrisk serie. *(Efter Nikodemus, 2:a årh. f. Kr.)*

(Ledning: använd transversalsatsen och cosinusteoremet på triangeln ACF.

Anm. Ur sin konstruktion fick Nikodemus för en liksidig triangel ABC, att $CE = AB\sqrt[3]{2}$; m.a.o. CE är kanten i en kub med dubbelt så stor volym som kuben med kanten AB. Inskjutandet av $EF = AC$ kan i allmänhet ej ske med passare och linjal.)

2184. Mittpunktsnormalen till hypotenusan i en rätvinklig triangel delar den längre kateten i förhållandet $1 : \sqrt{2}$. Beräkna den minsta vinkeln.
(Svar: 22,5°.)

2185. Visa, att punkterna $(1/a;\ ab+ac)$, $(1/b;\ ac+bc)$ och $(1/c;\ ab+bc)$ ligger på en rät linje och beräkna linjens y-intercept.
(Svar: $ab+ac+bc$.)

2186. Räta linjen $y = x$ skär kurvan $6y = 7x^2 - x^4$ i origo O samt i 1:a kvadranten från origo räknat i A och B. Sök förhållandet mellan ytorna av de mot kordorna OA och AB svarande segmenten.
(Svar: 13:17.)

2187. Visa att de tangenter som drages till kurvan $y = (x-a)^2 + 0{,}25$ från en punkt på x-axeln bildar 90° med varandra.

2188. En parabel $y = ax^2 + bx + c$ går genom punkterna $(-3;\ 1)$ och $(3;\ 7)$. Tangenterna i dessa punkter råkas i en punkt med ordinatan -5. Sök kurvans minimipunkt.
(Svar: $(-1;\ -1)$.)

2189. Om parablerna $y = ax^2 + bx + c$ och $y = cx^2 + bx + a$ har två gemensamma tangenter, i vilken punkt råkas dessa? Sök villkoret för att två gemensamma tangenter skall finnas.
(Svar: I origo; $ac > 0$.)

2190. Vilken kurva tangerar varje linje, på vilken parablerna $2y - x^2 = 0$ och $3y + x^2 = 0$ avskär lika kordor?
(Svar: $x^2 + y = 0$.)

2191. En linje genom origo O skär kurvan $y(x^2 + px + q) = x$ dessutom i punkterna A och B. Det förutsättes att $pq \neq 0$ och $p^2 \neq 4q$. Sök orten a) för mittpunkten av AB, b) för den punkt P, som jämte O delar sträckan AB harmoniskt.
(Svar: a) Om Q är kontaktpunkten för tangenten från origo, är för $p^2 < 4q$ orten den mellan Q och x-axeln belägna delen av linjen $2x + p = 0$. Är $p^2 > 4q$, skall nämnda del av linjen uteslutas. b) Delar av hyperbeln $pxy + 2qy - 2x = 0$, som tangerar kurvan i origo och går genom Q.)

2192. Kateterna AB och AC i en rätvinklig triangel är 6 cm resp. 8 cm. En rörlig med AC parallell transversal skär AB i D och BC i E. Undersök, hur ytan av fyrhörningen $ADEM$ varierar, då M är mittpunkten av AC.
(Svar: Ytan växer från 12 cm^2 till 13,5 cm^2 (för $DE = 2$ cm) och avtar sedan till 0.)