Årgång 33, 1950

Första häftet

1679. Från punkten T dragas tangenterna till en parabel med brännpunkten F. Normalerna i tangeringspunkterna råkas i N. Visa, att $\overline{TN}^2 = \overline{NF}^2 + 3\overline{TF}^2$. *(R. Ingre.)*

1680. Att konstruera inflexionstangenten till en kubisk parabel, när man utom oändlighetsriktningen känner inflexionspunkten och två punkter på kurvan. *(X.)*

1681. Beräkna höjden i en fyrsidig pyramid, om dess fotpunkt är skärningspunkt mellan de mot varandra vinkelräta basdiagonalerna samt de triangulära sidorna äro i ordning a, b, c och d. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1682. Lös ekvationen $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$.
(Svar: $30° + n \cdot 60°$; $45° + n \cdot 90°$.)

1683. I en likbent triangel delar medianen mot en av de lika sidorna basvinkeln i förhållandet 1:2. Beräkna toppvinkeln.
(Svar: 31,94°.)

1684. I triangeln ABC är $AB = BC$. Med A som centrum ritas en cirkel genom basens mittpunkt. Från B drages en rät linje, som tangerar cirkeln i D och skär AC i E. Bestäm vinkeln C, om $BD : DE = 3 : 1$.
(Svar: 120°.)

1685. Beräkna y av likheterna $\tan x : \tan 2x : \tan 4x = 1 : 4 : y$.
(Svar: $y = -8/7$.)

1686. I triangeln ABC är $A = 90°$. I och O äro de in- resp. omskrivna cirklarnas medelpunkt. Dragas AI och IO, uppdelas triangeln i två fyrhörningar, vilkas ytor förhålla sig som 11:13. Angiv förhållandet mellan sidorna.
(Svar: $3 : 4 : 5$.)

1687. I en cirkel råkas tre kordor, AA_1, BB_1 och CC_1 i samma punkt P. Beräkna förhållandet mellan ytorna av trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$, då $PA = 4\,\text{cm}$, $PB = 3\,\text{cm}$, $PC = 2\,\text{cm}$ och $PA_1 = 1\,\text{cm}$.
(Svar: 9:1.)

1688. Ett öppet koniskt kärl med basradien R cm hålles så, att axeln är vertikal och fylles med en vätska i en kontinuerlig ström, som tillför volymen a cm^3/s. Med vilken hastighet stiger vätskeytan i det ögonblick, då kärlet är fyllt till hälften?
(Svar: $a\sqrt[3]{4} : \pi R^2$ cm/s.)

1689. Från en punkt P på en ellips med brännpunkterna F och F_1 har man dragit fokalradien $PF = 6$ enheter samt en korda PQ, som går genom F_1. Triangeln FPQ har heltaliga sidor och är rätvinklig vid P. Angiv ellipsens ekvation.
(Svar: $x^2 + 2y^2 = 36$.)

1690. En cirkulär bricka med radien r står på ett vågrätt bord och belyses av solen under höjdvinkeln v. Längs periferin går en låg vertikal kant av höjden h. Lägg origo i brickans centrum samt y-axeln parallellt med strålarnas horisontalprojektion och angiv formen och begränsningen av skiljelinjen mellan brickans belysta och obelysta del.
(Svar: $x^2 + (y + h\cot v)^2 = r^2$ mellan $x = \pm 0,5(4r^2 - h^2\cot^2 v)$.)

1691. Tangenten i en punkt P på hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ skär en asymptot i A. Visa, att avståndet från A till linjen FP, där F är en fokus, är $= b$.

1692. AB är en fast korda i en given cirkel, PQ en rörlig korda med konstant riktning i samma cirkel. Sök orten för skärningspunkten mellan AP och BQ.
(Svar: Emedan bissektriserna till vinklarna mellan AP och BQ ha fasta riktningar, är orten en liksidig hyperbel med dessa riktningar som asymptotriktning och AB som diameter.)

1693. I triangeln ABC är $A = 90°$ och sidan AB konstant. En cirkel med A som centrum och AC som radie skär BC i D. Bestäm vinkeln B så, att punkten D:s avstånd till AB blir så stort som möjligt.
(Svar: 25,91°.)

Andra häftet

1694. Storheterna a, b, c, $a + b$ och $p - q$ äro alla $\neq 0$. Vilken relation råder mellan a, b och c, om ekvationen

$$(x-p)^2 : a + (x-q)^2 : b + ((p-q)^2 : c = 0$$

har dubbelrot? *(X.)*

1695. Att i triangeln ABC, där $b \neq c$ och $A \neq 90°$ draga hörntransversalerna BB_1 och CC_1, så, att $B_1C_1 \parallel BC$ och $AC \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$. *(N. J.)*

1696. Ett plan skär en regelbunden n-sidig pyramids sidokantlinjer i punkter, vilkas avstånd från spetsen räknat utgöra bråkdelarna $m_1, m_2, \ldots, m_n$ av nämnda kantlinjer. Beräkna skärningsytans projektion i pyramidens bottenplan med detta som enhet. *(B. S.)*

Enklare matematiska uppgifter

1697. Lös ekv. $\sin^5 x + \cos^5 x = \sin^3 x + \cos^3 x$.
(Svar: $n \cdot 90°$; $135° + n \cdot 180°$.)

1698. I triangeln ABC äro sidorna AB, BC och CA i ordning $4\sqrt{2}$ cm, 32 cm och $20\sqrt{2}$ cm. En punkt D på BC tages till centrum för en cirkel med radien DA. Cirkeln skär AB och AC i E och F, varvid EF är parallell med BC. Bestäm radien.
(Svar: 5 cm.)

1699. I den i en cirkel inskrivna sexhörningen $ABCDEF$ är $AB = BC = CD = a$ och $DE = EF = FA = b$. Beräkna AD.
(Svar: $3ab(a+b) : (a^2 + ab + b^2)$.)

1700. Bestäm värdet på y ur likheterna $\cos x : \cos 2x : \cos 4x = 1 : 2 : y$.
(Svar: $5 - \sqrt{27}$.)

1701. I serien $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ är $u_1 = a$ och $u_2 = b$. För var och en av de övriga termerna gäller, att $u_n : (u_{n-1} : u_{n-2}) = k$, där k är en konstant. Beräkna summan av seriens 600 första termer uttryckt i a, b och k.
(Svar: $100\left[a + b + (bk + k^2) : a + (ak + k^2) : b\right]$.)

1702. I fältet mellan positiva x-axeln och den del av linjen $y = x$, som befinner sig i första axelvinkeln, rör sig en punkt P så, att dess avstånd till $y = x$ är lika med dess avstånd från punkten $(2, 0)$. Angiv orten samt dennas ändpunkter.
(Svar: Parabelbågen $y = -x + \sqrt{8(x-1)}$ mellan $(4 - \sqrt{8}, 0)$ och $(4 + \sqrt{8}, 0)$.)

1703. Linjen $3y = 4x$ tänkes avklippt i punkten $P(6, 8)$. Sträckan mellan P och origo böjes till en cirkel, som tangerar den givna linjen i origo. Angiv cirkelns ekvation.
(Svar: $(x + 0,8r)^2 + (y - 0,6r)^2 = r^2$ eller $(x - 0,8r)^2 + (y + 0,8r)^2 = r^2$, där $r = 5 : \pi$.)

1704. En kurva $y = f(x)$ går genom punkterna $(1, 1)$ och $(-2, 0)$. Vinkelkoefficienten för normalen i en godtycklig punkt på kurvan är proportionell mot kvadraten på punktens x-koordinat. Härled ett uttryck för $f'(x)$, bilda därav $f(x)$ och konstruera kurvan.
(Svar: $3xy = x + 2$.)

1705. Beräkna excentriciteten för en ellips, som tangerar sidorna i en romb med vinklarna 60° och 120° i deras mittpunkter.
(Svar: $\sqrt{6} : 3$.)

1706. En ellips, som har sin lillaxel på y-axeln, tangerar x-axeln i origo. Den tangerar dessutom linjen $4x + 3y = 12$. Sök orten för brännpunkterna.
(Svar: $2x^2 + 2y^2 + 9y = 18$.)

1707. Tangenten och normalen i en parameters ändpunkt P i en hyperbel skära konjugataxeln i T resp. N. Beräkna excentriciten, då $PT : PN = 2 : 1$.

(Svar: 2.)

1708. Cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ och hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$ ha fyra gemensamma tangenter, om $r^2 < a^2$. Visa, att de åtta kontaktpunkterna ligga fyra och fyra på två räta linjer genom origo.

1709. I en regelbunden tresidig pyramid $O(ABC)$ tagas på de tre sidokanterna OA, OB och OC punkterna D, E och F, som från spetsen räknat av kanterna avskära bråkdelarna m, n och p resp. Beräkna projektionen av triangeln DEF i bottenplanet ABC med denna yta som enhet.

Tredje häftet

1710. Styrlinjerna och en tangent till ett kägelsnitt äro givna. Bestäm orten för brännpunkterna. *(X.)*

1711. En variabel cirkel med centrum M på y-axeln går genom en fast punkt A på positiva y-axeln och skär den positiva x-axeln i N. Konstruera den punkt X, i vilken linjen MN tangerar sin envelopp. Konstruera även enveloppens krökningscirkel i X. *(X.)*

1712. A, B, C och D äro konsekutiva hörn till en i enhetscirkeln inskriven regelbunden sjuhörning. Visa, att ytan av triangeln ABD är $\sqrt{7} : 4$ ytenheter. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1713. Lös ekvationssystemet

$$\frac{x : a - a}{b} = \frac{y : b - b}{b} = \frac{z : c - c}{c}$$
$$x + y + z = (a + b + c)^2$$

(Svar: $x = 2ab + a^2$, $y = 2bc + b^2$, $z = 2ac + c^2$.)

1714. I en rätvinklig triangel synes den inskrivna cirkeln under 120° från hypotenusans mittpunkt. Beräkna de spetsiga vinklarna.

(Svar: 35,70° och 54,30°.)

1715. I en rätvinklig triangel drages från den omskrivna cirkelns medelpunkt en tangent till den inskrivna cirkeln. Denna tangent bildar 60° med den längre kateten. Sök den minsta vinkeln.

(Svar: 30° eller 42,4°.)

1716. I en cirkel med medelpunkten O är AB diameter och OC en mot AB vinkelrät radie. I vilket förhållande skall AC delas av en punkt P, för att AB och OC från denna skola synas under lika vinklar?
(Svar: $2:1$.)

1717. En likbent triangel är omskriven kring en cirkel. En av basens ändpunkter tages till topp i en ny likbent triangel, omskriven kring cirkeln, denna triangels ena bashörn till spets i en ny likbent triangel osv i oändlighet. Visa, att trianglarna tendera att bli liksidiga.

1718. I serien $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ är $t_0 = a$ och $t_1 = b$. För alla n är $6t_{n+2} = 5t_{n+1} - t_n$. Sök $\lim_{n\to\infty} s_n$.
(Svar: $0,5a+3b$.)

1719. Bestäm $\lim_{n\to\infty}(1+3+6+10+\cdots+t_n) : t_n^{1,5}$.
(Svar: $\sqrt{2}:3$.)

1720. I en regelbunden tetraeder $O(ABC)$ delas kanten OB mitt itu i D och OC i E i förhållandet $1:2$ från O räknat. Bestäm projektionen av triangeln ADE på bottenplanet ABC med denna yta som enhet.
(Svar: $1:3$.)

1721. En rät linje skär parabeln $y^2 = 4ax$ i A och B på samma sida om x-axeln. Beräkna summan av *linjens* subnormaler i A och B.
(Svar: $4a$.)

1722. Sök brännpunkterna i de parabler med x-axeln som symmetriaxel, vilka gå genom $(0; 4)$ och tangera linjen $x-2y+10=0$.
(Svar: $(0; 0)$ och $(-7,5; 0)$.)

1723. Linjerna $8x-y+16=0$ och $x+y+2=0$ tangera kurvan $y = ax^3+bx$. Bestäm a och b.
(Svar: $a=1$, $b=-4$.)

Fjärde häftet

1724. Centrum för den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln är O. Centra för triangelns in- resp. vidskrivna cirklar äro I, I_a, I_b och I_c. Visa, att den största av trianglarna OII_a, OII_b och OII_c har lika stor yta som de båda andra tillsammans. *(X.)*

1725. I den regelbundna femhörningen $ABCDE$ med sidan a skära diagonalerna AD och CE varandra i F. Bestäm riktningen och storleken av axlarna i den ellips, som går genom B, C och D samt har centrum i mittpunkten på AF. *(N. J.)*

1726. Konstruera skärningspunkten H mellan diagonalerna BE och CF i den regelbundna sjuhörningen $ABCDEFG$, om punkterna A och G äro givna. Bestäm förhållandet mellan sidorna i triangeln ALG, där L är tyngdpunkten i triangeln AHG. Var ligger medelpunkten till cirkeln GIK, där I halverar GH och K är skärningspunkten mellan diagonalerna AD och CG? *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1727. Det finnes blott två hela, tresiffriga konsekutiva tal, så beskaffade, att vartdera talet är lika stort som summan av dess siffrors kuber. Vilka äro talen?

(Svar: 370 och 371.)

1728. I en serie är allmänna termen $a_n = (n+1)^3 - n^3 - (n+1)^2 + n^2$. Visa generellt, att $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots$ är en aritmetisk serie med differensen 6.

1729. Sex studenter fingo ett gruppstipendium för vistelse i utlandet. Enligt bestämmelserna erhöll gruppen, oberoende av antalet medlemmar, dels a kr som engångssumma och dels b kr för varje hel månad utomlands. Det visade sig, att stipendiet räckte för två månaders utlandsvistelse. Nästa år reste tre studenter på samma villkor till samma plats och kunde då stanna borta 5 månader. Hur länge hade man kunnat stanna, om gruppen bestått av a) två personer b) en person? Penningvärde och levnadsstandard antagas oförändrade.

(Svar: a) 10 månader, b) hur länge som helst.)

1730. En person köpte en tomt med $7200\,\mathrm{m}^2$ yta. Säljaren bestämde, att tomten skulle ha rektangelform, att ett av hörnen skulle ligga i en given punkt O samt att två av rektangelns sidor skulle falla utefter var sin av två givna från O utgående linjer OA och OB. Mellan A och B går en rak kanal, vars bredd kan försummas. Sträckan $OA = 240$ m och $OB = 120$ m. Hur bör köparen dimensionera tomten för att a) så litet som möjligt, b) så mycket som möjligt av kanalen skall komma inom densamma?

(Svar: Minsta kanalsträckan = 0, då sidan längs OA är 120 m. Största sträckan = $30\sqrt{5} \approx 67$ m, om nämnda sida är 60 eller 240 m.)

1731. I triangeln ABC är $a - b = 3{,}457\,\mathrm{m}$, $A - B = 48{,}16°$ och $c = 5{,}182\,\mathrm{m}$. Solvera triangeln.

(Svar: $a = 4{,}719\,\mathrm{m}$, $b = 1{,}262\,\mathrm{m}$, $A = 61{,}79°$, $B = 13{,}63°$, $C = 104{,}58°$.)

1732. Lös ekvationen $2\log(\sin x) = 1 + \log(\cos 2x)$.

(Svar: $43{,}63° + n \cdot 360°$; $137{,}37° + n \cdot 360°$.)

1733. En rätvinklig triangel har ett hörn i $(3; -11)$. Hypotenusan faller utefter linjen $x - 2y + 10 = 0$ och delas av x-axeln i förhållandet $2:5$, så att den mindre delen ligger under nämnda axel. Visa, att triangeln är likbent.

1734. Från en punkt P på x-axeln dragas tangenter till cirkeln $x^2 + (y-5)^2 = 9$. Tangentkordan råkar förlängd x-axeln i Q. Sök minimum av sträckan PQ.
(Svar: 8 enheter.)

1735. Angiv ekvationen för den största cirkel, som kan inskrivas i det segment, linjen $x - y = 0$ avskär av parabeln $y^2 = 16x$.
(Svar: $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 72 = 0$.)

1736. Det finnes två ellipser som ha sina storaxlar parallella med x-axeln, excentriciten 0,6, en brännpunkt i (3; 1) och gå genom (6; 5). Under vilken vinkel skära de varandra?
(Svar: 56,31° ($\tan v = 1,5$).)

1737. Från en punkt på linjen $y = p$ dragas tangenterna till parabeln $y^2 = 2px$. Normalerna i tangeringspunkterna råkas i N. Sök orten för denna punkt.
(Svar: Den del av normalen $y = 2x - 6p$, som ligger ovanför linjen $y = -p$.)

1738. I en regelbunden tresidig pyramid är höjden mot en sidoyta 6 cm och kortaste avståndet mellan en baskant och motstående sidokant 5 cm. Bestäm längden av en baskant.
(Svar: 7,5 cm.)