Årgång 32, 1949

Första häftet

1619. Den ena basytan i ett prisma är $ABCD\ldots H$. Sidokanterna äro AA_1, BB_1, CC_1, $DD_1,\ldots$, HH_1. Punkterna A_1, B_1, C och H ligga i ett plan, som delar prismats volym i förhållandet $1:2$. Visa, att medianen från H i triangeln BCH halverar basytan. *(X.)*

1620. Om de till vinklarna 2α, 2β, 2γ hörande punkterna på trigonometriska cirkeln bilda en egentlig, icke liksidig triangel, har systemet $\sin(\beta+\gamma-x):\sin(\beta+\gamma-2\alpha) = \sin(\gamma+\alpha-x):\sin(\gamma+\alpha-2\beta) = \sin(\alpha+\beta-x):\sin(\alpha+\beta-2\gamma)$ en lösning. Angiv dess geometriska betydelse. *(X.)*

1621. I triangeln ABC är I medelpunkten för den inskrivna cirkeln, I_1 medelpunkten för den vid sidan BC vidskrivna cirkeln samt P och P_1 dessa punkters projektioner på BC. Visa, att IP_1 och I_1P råkas mitt på höjden från A. *(G. Bergendal.)*

Enklare matematiska uppgifter

1622. I en aritmetisk serie med n termer är t den mellersta termen. Summan av de $(n-1)$ första termerna är lika stor som hela seriesumman. Beräkna första termen och differensen som funktion av t och n.

(Svar: 1:a termen $= 2t$, differensen $= -2t:(n-1)$)

1623. I en cirkel med radien $6\sqrt{3}$ cm drages en korda av längden $8\sqrt{3}$ cm samt vinkelrätt mot denna två andra kordor, vardera av längden 18 cm. Beräkna den yta (i det mindre segmentet), som begränsas av de tre kordorna och bågen.

(Svar: $18\pi + 27\sqrt{3} - 35\sqrt{5} = 22{,}82$ cm)

1624. I en cirkelkvadrant med radien 1 cm inskrives en cirkel. Vidare ritas en ny cirkel, som tangerar nämnda cirkel samt dessutom kvadrantens båge och den ena av dess radier. Beräkna cirkelns radie.

(Svar: $(5\sqrt{2}-1):49 = 0{,}1239$ cm)

1625. Kring en given kvadrat omskrivas tvenne likytiga likbenta trianglar så, att en kvadratsida faller på trianglarnas gemensamma bas. Visa, att mellan trianglarnas toppvinklar 2α och 2β råder sambandet $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 0,25$.

1626. Basytan i en pyramid är en parallellogram. Genom en av baskanterna lägges ett plan, som av motstående sidokanter avskära $1/n$ från

toppen räknat. Bestäm förhållandet mellan den avskurna topp-pyramiden och hela pyramiden.
(Svar: $(n+1):2n^2$)

1627. Av ett klot utskäres en sektor. Hur stor del av klotet utgör den, om den återstående kroppens totala yta är så stor som möjligt?
(Svar: $(5-\sqrt{20}):10 = 0,0528$)

1628. En liksidig hyperbels medelpunkt ligger i $(1;2)$ och ena vertex i origo. Bestäm hyperbelns ekvation.
(Svar: $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x + 20y = 0$)

1629. Sök ekvationen för den tangent till kurvan $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$, som har vinkelkoefficienten k. Använd resultatet för att bestämma orten för skärningspunkten mellan två mot varandra vinkelräta tangenter till kurvan.
(Svar: $y = kx + (k+1)^2 : (k-1) :\ x + y + 2 = 0$)

1630. För vilket a-värde råkas normalen i origo till kurvan $y = x^3 - ax$ och tangenten i en maximi- eller minimipunkt på kurvan?
(Svar: $\sqrt{3}$)

1631. En cirkel går genom punkterna $(0;0)$; $(a/2;0)$; $(a;b)$. Uttryck b i a, om orten för dess medelpunkt är linjen $y = 3x$.
(Svar: $b = a$ eller $b = a:2$)

1632. För kurvan $y = ax^4 + bx^2$ äro abskissorna för ett nollställe och en inflexionspunkt x_1 resp. x_2, varvid $x_1 > x_2 > 0$. Visa att $x_1^2 = 6x_2^2$.

1633. Genom punkten $A(1;0)$ drages en linje med riktningvinkeln 60° och längden n i första kvadranten. Ändpunkten är B. Genom origo O drages en linje med vinkelkoefficienten $n\tan 60°$, som skär AB i C. Undersök hur sträckan BC varierar för olika n-värden.
(Svar: När n växer från 0 till 1, går BC från 0 till ∞; när n växer från 1 till ∞ avtar BC till min.$= 3+\sqrt{8}$ för $n = \sqrt{2}+1$ för att sedan växa till ∞)

Andra häftet

1634. En rätvinklig triangel har den räta vinkelns spets i origo, de andra hörnen på kurvan $y^2(1-3x) = x^3 - x^2$. Visa, att orten för höjdens fotpunkt på hypotenusan är en cirkel. *(X.)*

1635. Alla klot, som gå genom tyngdpunkten i en tetraeder och tre av hörnen, ha samma potens i det fjärde. *(X.)*

1636. Om sidorna i en plan eller skev fyrhörning äro a, b, c och d samt ”diagonalerna” e och f, så är $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq e^2+f^2$. När råder likhet? *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1637. Vid foten av en rak backe invid en sjö står en flaggstång. När solen står i backens vertikalplan, erhålles en direkt skugga på backen och en annan dylik av strålar, som reflekterats i vattenytan. Sök förhållandet mellan skuggornas längd, om backens lutning är α och solens höjd β, där $\alpha > \beta$.
(Svar: $\sin(\alpha-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$)

1638. Ett antal personer (n st.) skulle mottaga en penningbelöning. De ordnades slumpvis i två grupper. Varje person fick lika många kronor som det fanns medlemmar i hans grupp. Det visade sig, att den utbetalade summan blev den minsta möjliga. Hur stor var denna summa?
(Svar: $n^2 : 2$ kr, om n var ett jämnt tal, men $(n^2+1) : 2$ om det var ett udda tal.)

1639. Basytan i en pyramid är en rektangel. Sidokanterna äro i ordning a, b, c och d. Visa, att $a^2+c^2 = b^2+d^2$.

1640. I triangeln ABC är $\cos A = \cos B + \cos C$. Visa, att $R = r_a$.

1641. Visa, att i varje triangel är $(r_a - r) : (r_a + r) = \sin\frac{1}{2}A : \cos\frac{1}{2}(B-C)$.

1642. Ett plan skär en regelbunden tetraeders sidokanter, så att avskärningarna från toppen räknat äro 1 cm, 2 cm och 3 cm. Beräkna vinkeln mellan det skärande planet och tetraederns bottenyta.
(Svar: 42,83°)

1643. Linjerna $x = 0$, $y = 0$,$x = p$ och $y = q$, där p och q betyda hela positiva tal, begränsa en rektangel. Genom linjer, parallella med axlarna, uppdelas rektangeln i pq kvadrater. Varje kvadrat är belagd med en massa, som kan skrivas $ax_m + by_m$ där x_m och y_m betyda koordinaterna för kvadratens mittpunkt. Beräkna massan för hela rektangeln.
(Svar: $\frac{1}{2}(ap^2q + bpq^2)$)

1644. I en ellips med excentriciten e synes storaxeln från en parameterändpunkt under vinkeln v. Visa, att $e^2 \cdot \tan v + 2 = 0$.

1645. En kvadrat har två närliggande hörn på linjen $y = x$ och ett hörn på y-axeln. Sök orten för det fjärde hörnet, då kvadratens storlek varierar.
(Svar: Linjerna $y = 3x$ och $y = -x$)

1646. Hyperblerna $x^2 - y^2 = \pm a^2$ äro givna. Bestäm parametern i en parabel, som går genom fyra på samma sida om den ena av hyperblernas axlar belägna parameterändpunkterna.
(Svar: $a(\sqrt{2}+1)$)

1647. Sök orten för basens ändpunkter i en likbent triangel, i vilken den omskrivna cirkelns medelpunkt och tyngdpunkten intaga fixa lägen.

(Svar: Med medelpunkten i origo och tyngdpunkten i $(a;0)$ är ortens ekvation $3(x-2a)^2 - y^2 = 3a^2$)

1648. Man har ett 5π m långt rep med en löpande ögla i den ena ändan och vill med detta kasta lasso kring en lodrät cylinder med 1 m basdiameter. Hur långt från cylinderns axel får man högst ställa sig, om det skall finnas en teoretisk möjlighet att lyckas?

(Svar: $25\pi : 6 = 13{,}1$ m)

Tredje häftet

1649. Ekvationen $1 : (6+x) + 1 : (3+x) + 1 : (2+x) = 1$ har två rötter $\neq 0$.Beräkna värdet av

$$\left\{1 : (6+x)^2 + 1 : (3+x)^2 + 1 : (2+x)^2\right\} :$$
$$: \left\{1 : 6(6+x)^2 + 1 : 3(3+x)^2 + 1 : 2(2+x)^2\right\}$$

(X.)

1650. Ett klot tangerar en given kons mantel, som tänkes obegränsat utdragen. Bestäm klotets radie så, att det inom konen belägna segmentet får maximivolym. *(X.)*

1651. Vilket samband finnes mellan krökningsradierna i tre punkter på kurvan $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, där tangenterna äro parallella? *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1652. Bestäm antalet lösningar till ekvationen

$$\cos x + 2\cos 3x + \cos 5x = a(\cos x + 2\cos^3 x + \cos^5 x).$$

(Svar: Utom $\cos x = 0$ fås två värden på $\cos 2x$ då $-\frac{9}{7} \leq a \leq 0$, och ett, då $0 < a \leq 1$.)

1653. I ett pentagram, vars spetsar äro i ordning A, B, C, D och E, råkas AC och BE i F, BD och CE i G. En rät linje genom G parallell med BE råkar tangenterna i B och E till den omskrivna cirkeln i resp. H och I. Linjerna HF och AD råkas i K. Visa rent geometriskt, att pentagrammet och triangeln HIK äro likytiga.

1654. Sidorna i en viss triangel kunna skrivas ac, bc och $a^2 - b^2$. Visa, att skillnaden mellan de mot de förstnämnda sidorna stående vinklarna är 90°, om $a^2 + b^2 = c^2$.

1655. I triangeln ABC är I den inskrivna cirkelns medelpunkt. Visa, att $AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$.

1656. En halvcirkels diameter ($2r$) är sida i en liksidig triangel. Beräkna ytan av den solida figur, som uppstår, då halvcirkeln och triangeln rotera ett varv runt diametern.
(Svar: $\pi r^2(2 + 3\sqrt{3})$.)

1657. I en rak cirkulär cylinder inskrives en kub så, att tre av kubens hörn falla på vardera av bottenperiferierna och de återstående på cylinderaxeln. Angiv förhållandet mellan bottenradien och höjden.
(Svar: $\sqrt{2}$)

1658. Kurvan $a^2y = x^3 - 2a^2x$ skäres av linjen $y = kx$ (utom i origo) i A och C samt tangeras av de med AC parallella tangenterna i B och D. Bestäm k så, att fyrhörningen $ABCD$ blir en romb.
(Svar: $k = 1$ eller 3)

1659. Angiv ekvationerna för de tangenter till kurvan $x^2y = 6x + 6$, som icke ha någon annan punkt gemensam med kurvan än kontaktpunkten.
(Svar: $y = -1,5$ och $2x + 9y + 18 = 0$)

1660. I funktionen $y = (\tan x)^n$ är n ett udda tal. Visa, att $y'' : y' - y' : y = y^{1/n} - y^{-1/n}$.

1661. I ellipser med brännpunkterna $(-1; 0)$ och $(1; 0)$ dragas de lika långa konjugatdiametrarna. Bestäm orten för deras ändpunkter.
(Svar: $x^2 - y^2 = 1 : 2$)

1662. Sök orten för toppen på en parabel, som går genom punkterna $(-1; -2)$ och $(1; 2)$, då axeln är parallell med y-axeln.
(Svar: Hyperbeln $xy = x^2 + 1$)

1663. En cirkel med centrum M på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ tangerar x-axeln i N. Sök orten för skärningspunkten mellan MN och cirklarnas gemensamma korda, när M beskriver cirkeln. (Att MN halveras av den gemensamma kordan inses utan räkning.)
(Svar: Ellipsen $x^2 + 4y^2 = 1$)

Fjärde häftet

1664. En rörlig tangent till en parabel bildar vinkeln α med parabelns axel. Genom tangeringspunkten drages en korda, så att vinkeln mellan tangenten och kordan räknad i positiv led är konstant $= \beta$. Visa, att kordan är minst, när $3\sin(2\alpha+\beta) = \sin\beta$. *(R. Ingre.)*

1665. Sidorna i en sexhörning, inskriven i en cirkel, äro i ordning a, b, c, d, e och f samt huvuddiagonalerna genom skärningspunkten mellan b och c, c och d, d och e resp. g, h och i. Vilken lineär relation i g, h och i råder mellan dessa storheter? Härled tredjegradsekvationens lösning genom att betrakta fallet $a = c = e$, $b = d = f$. *(N.J.)*

1666. Att inskriva en kvadrat i en kubisk parabel. *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1667. I vilket förhållande delar punkten E sidan AB i kvadraten $ABCD$, om linjerna DE och AF, där F ligger på BC och $BF = BE$, skära varandra mitt emellan sidorna BC och AD?

(Svar: Enl. gyllene snittet)

1668. En sträcka M_1M_2 har mittpunkten M. Åt samma håll uppritas likformiga trianglar MM_1P_1 och MM_2P_2, så att $\wedge MM_1P_1 = \wedge MM_2P_2 = A$, $\wedge M_1MP_1 = \wedge MP_2M_2 = B$ och $\wedge MP_1M_1 = \wedge M_2MP_2 = C$. Förena P_1 med P_2. Visa, att $\wedge MP_1P_2 = C$ och $\wedge MP_2P_1 = B$. (Jfr marshäftet 1949 sid. 32.)

1669. I triangeln ABC drages höjden CD och en linje från C genom den omskrivna cirkelns centrum till E på AB. Visa, att $AD \cdot AE : BD \cdot BE = AC^2 : BC^2$.

1670. I en triangel dragas från samma hörn höjden h, bissektrisen b och en linje l till motstående sida genom den omskrivna cirkelns centrum. Visa, att $b^2 l + b^2 h = 2h^2 l$.

1671. I en rätvinklig triangel äro I och O medelpunkterna för de in- och omskrivna cirklarna. Tyngdpunkten är T. Ytan av triangeln IOT är $1/36$ av den givna triangelns yta. Bestäm dennas vinklar.

(Svar: 61,14°; 28,86° och 90°.)

1672. Två raka cirkulära koner ha gemensam basyta med radien R och äro vända åt samma håll. Toppvinklarna äro 90° och 60°. Ett regelbundet tresidigt prisma har ena basytans hörn på den ena konens mantel och den andra basytans hörn på den andra konens mantel. Prismats sidokanter äro parallella med konernas axel. Beräkna prismats maximivolym.

(Svar: $(3-\sqrt{3})R^3 : 9$)

1673. En lastboms ena ändpunkt är rörlig kring en punkt A på den horisontella marken. Ett rep, som utgår från dess andra ändpunkt B, är i C fastgjort vid ett vertikalt träd, 4 m ovan marken. Horisontella avståndet AD från A till trädet är 2 m; $AB = BC = 6$ m. Då bommen svänger ändras B:s avstånd till marken. Sök detta, då det är som störst, dvs. då fig. $ABCD$ är plan, samt den vinkel bommens projektion på marken skall vrida sig, för att B:s höjd må bli 3 m.

(Svar: $(10+\sqrt{155}):5 = 4{,}49$ m; 78,9°)

1674. En parabels axel och en vertextangent tangera en given cirkel. Parabeln går genom cirkelns centrum. Sök orten för parabelns fokus.

(Svar: Om cirkelns ekvation är $x^2+y^2=r^2$, blir orten $16(x^2+y^2)=25r^2$)

1675. Kurvorna $y^2-4ay+4ax=8a^2$ och $x^2-4ax-8ay=-4a^2$ ha linjen $x+y=2$ som gemensam korda. Beräkna konstanten a.

(Svar: 1)

1676. Parabelns $y^2=2px$ tangenter från punkten T bilda lutningsvinklarna α och β med parabelns axel. Normalerna i tangeringspunkterna råkas i N, och tangentkordans lutningsvinkel är γ. Visa, att $p:TN=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

1677. Två parabler, som äro vända åt var sitt håll, ha båda y-axeln till styrlinje. Brännpunkterna äro belägna på cirkeln $4x^2+4y^2=289$. Bestäm parablernas ekvationer, om $y=4x$ är en gemensam tangent till dem.

(Svar: $(y-7,5)^2=8(x-2)$; $(y+7,5)^2=-8(x+2)$)

1678. Till kurvan $y=x^3-3x^2+1$ dragas de båda tangenter, som äro parallella med linjen $9x-y+15=0$. Tangenterna, x-axeln och sammanbindningslinjen mellan tangeringspunkterna bilda två trianglar. Beräkna förhållandet mellan ytorna av dessa.

(Svar: 1 : 9)