Årgång 31, 1948

Första häftet

1559. Varje lösning till systemet

$$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{x^2+y^2}=\frac{(x-c)^2+(y-d)^2}{(x-1)^2+y^2}=(a-c)^2+(b-d)^2$$

är rationell i a, b, c, d. *(X.)*

1560. Om kurvan $y=a_0x^5+\cdots+a_5$ har tre inflexionspunkter, som ligga i rät linje, så är den mellersta kurvans centrum. *(X.)*

1561. Skillnaderna mellan de delar, i vilka diagonalerna i en parallellogram dela var sin vinkel äro $2u$ och $2v$ resp. Bestäm förhållandet mellan a) sidorna, b) diagonalerna. *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1562. En likbent triangels omkrets är 16 cm. Summan av radierna i de tre vidskrivna cirklarna är 14 cm. Beräkna sidorna.
(Svar: 5, 5 och 6 cm eller $5\frac{7}{9}$, $5\frac{7}{9}$ och $4\frac{4}{9}$ cm.)

1563. I triangeln ABC är $AB=19$ cm och $BC=13$ cm. Om AC förlänges till D, så att $CD=AC$, blir triangeln ABD rätvinklig. Beräkna AC.
(Svar: 13 cm eller 8 cm.)

1564. I en given rektangel kunna två rektanglar inskrivas med ett hörn i en given punkt på den kortare rektangelsidan. Visa, att summan av de båda inskrivna rektanglarnas ytor är lika med den givna rektangelns yta.

1565. I en rätvinklig triangel kan en kvadrat inskrivas på två sätt; ett hörn kan sammanfalla med den räta vinkeln eller en sida ligga på hypotenusan. Visa, att av de två kvadraterna den förra har större sida än den senare.

1566. Höjden i en triangel delar en vinkel i delarna u och v. Visa, att de vid hypotenusorna till de båda deltrianglarna vidskrivna cirklarnas radier uppfylla sambandet $r_u\left(1-\tan\frac{u}{2}\right)=r_v\left(1-\tan\frac{v}{2}\right)$.

1567. En triangels bissektriser äro b_1, b_2, b_3 och de delar av dessa, som falla mellan bissektrisernas skärningspunkt och motstående sidor, resp. x_1, x_2, x_3. Visa, att

$$\frac{x_1}{b_1}+\frac{x_2}{b_2}+\frac{x_3}{b_3}=1.$$

1568. I en triangel är den längsta sidan a och motsvarande höjd h. Triangeln roterar kring en axel genom tyngdpunkten parallell med den nämnda sidan. Beräkna rotationskroppens volym.
(Svar: $4\pi ah^2 : 27$.)

1569. I en regelbunden fyrsidig pyramid går mittnormalplanet till en sidokant genom den motstående sidokantens ändpunkt. I vilket förhållande delar planet pyramiden?
(Svar: $1 : 2$.)

1570. Vinkeln mellan de tangenter, som från en hyperbels (H) ena brännpunkt dragas till konjugat hyperbeln ($\overline{H}$) är 60°. Bestäm vinkeln mellan de tangenter, som dragas från $\overline{H}$:s ena brännpunkt till H.
(Svar: 60°.)

1571. Om en hyperbel med asymptoterna $2x+3y-6=0$ och $3x-y+6=0$ går genom origo, vilken är ekvationen för hyperbelns normal i denna punkt?
(Svar: $4x+y=0$.)

1572. Tangenten till hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i punkten P skär asymptoterna i A och B. Kurvans normal i P skär transversalaxeln i N. Beräkna ytan av triangeln ABN, om $PN = n$.
(Svar: $an^2 : b$.)

1573. Normalen i punkten P på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a > b > 0$, skär x-axeln i A och y-axeln i B. På normalen mellan A och B väljes punkten C, så att $\overline{PC}^2 = PA \cdot PB$. Beräkna avståndet från C till origo.
(Svar: $a-b$.)

1574. Angiv alla punkter, i vilka parablerna $y^2 = 4x$ och $y^2-8x+4y+12 = 0$ synas under lika stora vinklar.
(Svar: Orterna äro den gemensamma styrlinjen $x = -1$ och den del av den gemensamma kordan $x-y=3$, som faller utanför parablerna.)

Andra häftet

1575. I triangeln ABC är $AB = AC$. D är en punkt på den omskrivna cirkeln, E och F äro diametralt motsatta punkter. DE och DC skära linjen AB i F och G. Sök sambandet mellan $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$ och $\overrightarrow{AB}$. *(X.)*

1576. I serien $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ bilda termdifferenserna $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$ en geometrisk serie med kvoten k. Härled en summaformel, innehållande n, k, a_1 och a_2. *(T. Edqvist.)*

1577. Parabeln $P_1 : y^2 = 4ax$ är given. Den variabla parabeln P har x-axeln till topptangent. En gemensam tangent berör P i A och P_1 i A_1 $(x_1; y_1)$. Sök orten för A, då P har sin topp i a) $(0; 0)$, b) $(x_1; 0)$. Sök orten för fokus till P, om dess styrlinje går genom c) $(x_1; y_1)$, d) $(x_1; kx_1)$. *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1578. Lös ekvationen $4\sin^5 x + 4\cos^5 x = 5\sin x + 5\cos x$.
(Svar: $x = 135° + n \cdot 180°$.)

1579. Ytan av det i en rät cirkulär kon inskrivna klotet förhåller sig till konens totala yta som $4:9$. Bestäm konens toppvinkel.
(Svar: 60° eller 23,07°.)

1580. I en ellips dela normalerna i parametrarnas ändpunkter lillaxeln i tre lika delar. Beräkna excentriciten.
(Svar: $\sqrt{(\sqrt{37}-1):18} = 0{,}531$.)

1581. I en ellips är inskriven en rektangel så beskaffad, att ellipsnormalerna i rektangelns hörn dela såväl storaxeln som lillaxeln i tre lika delar.Sök excentriciten och förhållandet mellan rektangelns sidor.
(Svar: $e = \sqrt{(\sqrt{17}-1):8} = 0{,}625$; förh. $= (5\sqrt{17}-13):16 = 0{,}476$.)

1582. För vilket siffervärde på a ligga minimipunkterna på kurvan $y = ax^4 - (a+1)x^2$ så nära x-axeln som möjligt?
(Svar: $a = 1$.)

1583. Linjerna $y = kx$ och $x = a$ äro uppritade i ett vågrätt plan. Om man på $y = kx$ uppställer en plan spegel vertikalt, ser man i denna en spegelbild av linjen $x = a$. Vilken är spegelbildens ekvation?
(Svar: $x(k^2-1) - 2ky + a(k^2+1) = 0$.)

1584. Parametern a i funktionen $y = 2a^2x - x^2$ kan antaga alla möjliga reella värden. Vilken är orten för funktionskurvans maximipunkt?
(Svar: $y = x^2$.)

1585. Kurvan $y = ax^2 + bx^4$ tangerar cirkeln $x^2 + y^2 - 2y = 0$ i en punkt, vars abskissa är 0,5. Beräkna konstanterna a och b.
(Svar: $a = (24 - 13\sqrt{3}):3$; $b = 4(7\sqrt{3} - 12):3$.)

1586. Beräkna krökningsradien i punkten $(1; 1)$ för kurvan $xy = 1$. Krökningsradien definieras här som radien i den största cirkel på kurvans konkava sida, som endast har den nämnda punkten gemensam med kurvan.
(Svar: $\sqrt{2}$.)

1587. I en given cirkel drages kordan AB. På en av kordans bågar finnes en punkt P_1, sådan att $P_1A = P_1B = a$. För en annan punkt P_2 på samma båge är $P_2A = a + x$ och $P_2B = a - y$, där x och y äro pos. storheter. Visa, att $y > x$.

(Svar: $y - x$ är prop. mot $1 - \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, där α och β äro periferivinklarna till P_2A och P_2B.)

1588. I en amperemeter med varmtrådssystem är visarens utslagsvinkel, från nolläget räknat, proportionell mot strömstyrkans kvadrat. Följaktligen blir skalan icke likformig. Beräkna med två decimaler, den verkliga strömstyrkan, då visarspetsen står mitt emellan delstrecken för 4 amp och 5 amp.

(Svar: 4,53 amp.)

Tredje häftet

1589. Angiv sambandet mellan en triangels höjder, om en median är vinkelrät mot den linje, som förenar medelpunkterna för triangelns om- och inskrivna cirklar.

1590. En obegränsad pyramidmantel, bildad av plan, som alla tangera samma klot, är fast i rymden. Två plan, parallella med var sitt av två givna, avgränsa jämte mellanliggande del av manteln en kropp med föreskriven total yta. Visa, att ett klot kan inskrivas i den av dessa kroppar, som har maximivolym. *(X.)*

1591. Två ellipser E och E_1 ha gemensamma symmetriaxlar, på vilka de avgränsa längderna $2a$, $2a_1$; $2b$, $2b_1$. På ett par konjugatdiametrar i E äro motsvarande längder $2A$, $2A_1$; $2B$, $2B_1$. Bevisa följande generalisering av Apollonius' ena sats: $A^2 : A_1^2 + B^2 : B_1^2 = a^2 : a_1^2 + b^2 : b_1^2$. Kunna endera eller båda ellipserna utbytas mot hyperbler? *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1592. Uppdelas i faktorer $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$.

(Svar: $(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$.)

1593. Lös ekvationen

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \ldots$$

(Svar: $(1+\sqrt{7}) : 3$.)

1594. I en viss rätvinklig triangel kunna medianerna bilda sidor i en ny rätvinklig triangel. Visa, att de två trianglarna är likformiga.

1595. Var och en av en fyrhörnings sidor delas i samma led i ett konstant förhållande och de så erhållna närliggande delningspunkterna sammanbindas. Visa, att av de uppkomna fyra hörntrianglarna det ena motstående paret har lika stor ytsumma som det andra paret.

1596. Två icke kongruenta cirkelsektorer ha lika ytor och omkretsar. Visa, att medelproportionalen till medelpunktsvinklarna är två radianer.

1597. En triangel har de variabla vinklarna A och B och den konstanta vinkeln v. Bissektrisen till denna uppdelar triangeln i två deltrianglar, i vilka cirklar med radierna r_A resp r_B inskrivas. Mot vilket värde tenderar förhållandet $r_A : r_B$ då $A \to 0$?
(Svar: $1 + \cos \frac{1}{2} v$.)

1598. Två raka, icke kongruenta koner med samma volym äro inskrivna i en sfär. Visa, att deras mantelytor äro lika.

1599. Triangeln ABC med ytan 12 enheter har A i origo, B på y-axeln och tyngdpunkten på linjen $x = 1$. Den omskrivna cirkelns medelpunkt ligger på linjen $4x = 3y$. Bestäm koordinaterna för C.
(Svar: (3; 9) eller (3; −1).)

1600. Två cirklar med radien r gå genom varandras medelpunkter. I det gemensamma fältet inskrives en likbent triangel, vars bas är parallell med centrallinjen. Visa, att ytans maximivärde är $2r^2 \sin^3 40°$.

1601. Mot den konstanta basen i en triangel dragas höjden, bissektrisen och medianen. Sök orten för triangelns spets, om bissektrisens ändpunkt faller mitt emellan de båda övrigas ändpunkter.
(Svar: En ellips med excentr. $1 : \sqrt{2}$.)

1602. Om skärningspunkten mellan kurvan $y = (x^3+bx^2+cx+d) : (x^2-1)$ och dess sneda asymptot är en ändlig inflexionspunkt, så är den centrum till kurvan.

1603. Visa, att om asymptoten till kurvan $y = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$, där $a \neq 0$, $d \neq 0$, skär den asymptotiska parabeln i A, så går parabelns tangent i A genom kurvans inflexionspunkt.

Fjärde häftet

1604. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} a : x + b : y + c = 0 & (1) \\ a(b-c)^2 x + b(c-a)^2 y + c(a-b)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

där 0, a, b, c äro distinkta tal, har dubbellösning, emedan (2) betyder tangenten till hyperbeln (1) i en viss punkt. Vilken? *(X.)*

1605. Bestäm koefficienterna a och b så, att ekvationen $\sin 3x = a \sin x + b \cos x$ satisfieras av $x_1 = 45°$ och $x_2 = 30°$. Angiv den fullständiga lösningen. *(X.)*

1606. Bestäm villkoret för att i triangeln ABC medianen från A, höjden från B och bissektrisen från C skära varandra i en punkt. *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1607. Lös ekvationen $\cos^3 2x = \cos 3x \cdot \cos^3 x$.
(Svar: $n \cdot 180°$; $\pm 60° + n \cdot 180°$.)

1608. I kvadraten $ABCD$ är P den punkt inom kvadraten, för vilken $\wedge APB = 90°$ och $\wedge BPC = 135°$. Bestäm $\wedge CPD$.
(Svar: 71,57°.)

1609. Beräkna $a+c-b$, då de tre linjerna $x+3y = a$, $2x+5y = b$, $x+2y = c$ avgränsa en triangel, vars yta är 2 ytenheter.
(Svar: ± 2.)

1610. I en regelbunden fyrsidig pyramid lutar sidoytan 45° mot basytan. Hur stor vinkel bildar basytans diagonal med en sidoyta?
(Svar: 30°.)

1611. En cylindrisk blyertspennas yttre diameter är 8 mm. Den cylindriska grafitkärnans diameter är 1,6 mm. Om den ena ändan spetsas i form av en rak cirkulär kon utan att pennans längd ändras, hur förhålla sig de bortskurna volymerna trä och grafit till varandra?
(Svar: 124 : 1.)

1612. På de delar av kurvorna $y = x^m$ och $y = x^n$, $0 < m < n$, som äro belägna mellan origo och kurvornas skärningspunkt, väljas punkterna A och B. Visa, att maximilängden av AB är densamma, vare sig AB är parallell med x- eller y-axeln.

1613. Maximi- eller minimipunkten på kurvan $y = ax^2 + bx$ ligger på kurvan $y = cx^3$. Visa, att tangenten till den sistnämnda kurvan i denna punkt alltid går genom en annan skärningspunkt mellan kurvorna.

1614. Till en cirkel med centrum i O dragas tangenterna från en punkt P. I mellanrummet mellan tangenterna och cirkeln inskrives en cirkel. Sök maximum för dess radie, när radien i O varierar och PO är konstant ($= 2a$).
(Svar: $(6 - \sqrt{32})\,a$.)

1615. Linjen $x+27y-8=0$ tangerar kurvan $y(x+1)^2=x$. Bestäm tangeringspunkten och ekvationen för den med den givna parallella tangenten.
(Svar: $(2; 2/9)$, $4x+108y+49=0$.)

1616. I en ellips är diametern genom en parameterändpunkt P lika lång som den av koordinataxlarna begränsade delen av tangenten i P. Bestäm excentriciteten.
(Svar: $1:\sqrt{2}$.)

1617. En parabel, vars axel är parallell med x-axeln har parametern 4 och tangerar linjen $y=x$. Sök orten för fokus.
(Svar: $y=x\pm 2$.)

1618. En romb har ett hörn i punkten $(9; 3)$, ett annat på x-axeln och ett tredje på y-axeln. Sök orten för det fjärde hörnet.
(Svar: Endera av kurvorna $(y-3)^2=18(x-4)$, $(x-9)^2=6(y+12)$, $x^2-y^2=72$.)