Årgång 29, 1946

Första häftet

1435. I en triangel drages en höjd, varigenom två deltrianglar uppstå. Uttryck höjden som funktion av radierna i de cirklar, som äro inskrivna i den ursprungliga triangeln och i deltrianglarna.

(C.E. Fröberg.)

1436. I en aritmetisk serie är $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = A$, $t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 = B$, $t_1^3 + t_2^3 + \cdots + t_n^3 = C$. Uttryck C i A, B och n utan hjälp av formler för A, B och C. *(X.)*

1437. Linjen L tangerar parabeln $y^2 = 4ax$ i P och en rörlig parabel i Q. Den senare parabeln har x-axeln till vertextangent, och dess styrlinje går genom skärningspunkten mellan den fasta linjen $y = kx$ och en linje genom P, parallell med y-axeln. Sök orten för Q. *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1438. Uppdela i faktorer $x^8 + x^7y + x^6y^2 + \cdots + xy^7 + y^8$.
(Svar: $(x^2 + xy + y^2)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$)

1439. Visa, att $\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{250-110\sqrt{5}} = \sqrt{200-88\sqrt{5}}$.

1440. Visa, att

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2(1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x).$$

1441. Lös ekvationen $\sin 3x + \cos 3x = 2\cos 2x$.
(Svar: $30° + n \cdot 360°$; $45° + n \cdot 180°$; $\pm 60° + n \cdot 360°$; $150° + n \cdot 360°$)

1442. En parallellogram är omskriven kring en cirkel. De punkter i vilka parallellogrammens diagonaler skära cirkeln äro hörn i en fyrhörning. Visa, att dess yta aldrig kan bli större än parallellogrammens halva yta.

1443. Tyngdpunkten i en likbent triangel tages till centrum för en cirkel genom triangelns spets. Denna cirkel skär sidorna i fyra punkter, som utgöra hörn i en rektangel. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: 30°, 30°, 120°)

1444. Man sammanbinder de punkter, i vilka de vidskrivna cirklarna tangera en likbent triangels sidor. Den så erhållna triangelns yta är 24% av den ursprungligas. Bestäm dennas vinklar.
(Svar: Toppvinkeln är 73,74° eller 47,16°)

1445. Tyngdpunkten i en likbent triangel tages till centrum för en cirkel genom toppen. Denna cirkel skär sidorna i fyra punkter som utgöra hörn i ett parallelltrapets. Beräkna – om höjden mot basen i triangeln är konstant – dennas toppvinkel, när trapetsets yta är så stor som möjligt.

(Svar: 140°)

1446. Av två cirklar som skära varandra i A och B, har den ena sin medelpunkt O på den andras periferi. Bestäm vinkeln AOB, om ytan av den mindre av de båda halvmånformiga figurer, som begränsas av två cirkelbågar, är kvadraten på den mindre cirkelns radie.

(Svar: Ekv. $2v\cos v = \sin v - 1$ ger $v = 90°$)

1447. Ett plan parallellt med bottenytan i regelbunden tetraeder med kanten a, delar sidokanterna mitt itu. Sök radien i den sfär, som kan omskrivas kring den uppkomna stympade pyramiden.

(Svar: $\frac{a\sqrt{22}}{8}$)

1448. Ett fartyg seglar längs storcirkeln mellan två på norra halvklotet belägna orter med latituden α och longitudskillnaden β. Visa, att den nordligaste latitud x, som vid seglatsen uppnås, bestämmes ur formeln $\tan x \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \tan\alpha$. ($\beta < 180°$)

1449. Bestäm den latitud α, för vilken differensen $x - \alpha$ mellan de i föregående problem nämnda latituderna får sitt största värde för en konstant longitudskillnad β.

(Svar: α bestämmes ur ekv. $\tan\alpha = \sqrt{\cos\frac{\beta}{2}}$; $\frac{x+\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ (Se uppg. 192, årg. 3))

1450. En rätvinklig parallellepiped med kanterna a, b, c ($a < b < c$) delas av ett plan parallellt med en sidoyta så, att de två delfigurerna äro likformiga men ej kongruenta. Visa, att detta är möjligt, om $a^3 + b^3 = abc$.

1451. En rak kon är sådan, att en sfär med centrum i konens topp delar såväl mantelytan som volymen i förhållandet 1 : 3 från toppen räknat. Bestäm konens toppvinkel.

(Svar: 103,66°)

Andra häftet

1452. Om n är ett positivt helt tal > 2, vilket helt tal ligger då närmast

a) $1 : (2n - \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$?

b) $1 : (20 - \sqrt[10]{10^{10}+1} - \sqrt[10]{10^{10}-1})$?

(X.)

1453. Lös ekvationerna

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos x} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin x} = 1 \text{ och}$$
$$\frac{\cos^2 x}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2 x}{\sin\alpha} = 1.$$

(X.)

1454. Bevisa, att en sexhörning är regelbunden, om den kan inskrivas i *en* cirkel och omskrivas kring *en annan* samt har två par motstående sidor parallella. *(N.J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1455. Lös ekvationen $x - \sqrt{x - \sqrt{x}} = 1$.
(Svar: $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}555$)

1456. Summera serien $1 \cdot p + 2 \cdot (p+1) + 3 \cdot (p+2) + \cdots + n \cdot (p+n-1)$.
(Svar: $\frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+3p-2)$)

1457. I en triangel ABC träffar bissektrisen från sidan B sidan AC i punkten D, varvid $BD = AC$ och vinkeln $ADB = 30°$. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: $A = 137{,}85°$, $B = 24{,}30°$, $C = 17{,}85°$)

1458. Bestäm vinkeln A i en triangel, i vilken man känner h_a, r_a och b_a, där b_a är den inre bissektrisen till vinkeln A.
(Svar: $\sin\frac{A}{2} = \frac{h_a \cdot r_a}{b_a(h_a + r_a)}$)

1459. Bestäm vinkeln C i en triangel, i vilken man känner h_a, h_b och b_c.
(Svar: $\sin\frac{C}{2} = \frac{h_a \cdot h_b}{b_c(h_a + h_b)}$)

1460. Punkterna $(0; 0)$ och $(6; 8)$ utgöra mittpunkter på två sidor i en romb, vars ena diagonal ligger längs linjen $2y = x + 5$. Bestäm koordinaterna för rombens hörn.
(Svar: $(-5; 0)$; $(1; 8)$; $(11; 8)$; $(5; 0)$)

1461. Kurvan $y = x^3 - 21x + 1$ skäres av en rät linje parallell med x-axeln, så att de två successiva kordor som uppkomma förhålla sig som $1 : 2$. Sök linjens ekvation.
(Svar: $y = 21$ eller $y = -19$)

1462. En rät linje parallell med x-axeln skär kurvan $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ i tre punkter, så att avståndet mellan de två yttersta är ett maximum. Angiv maximiavståndet.
(Svar: $\frac{2}{3}\sqrt{3a^2 - 9b}$. Linjen går genom inflexionspunkten, emedan tangenterna i ändpunkterna äro parallella.)

1463. Basytan i en pyramid är en kvadrat med sidan a. Höjden som även har längden a går genom ett av kvadratens hörn. På vilket avstånd från basytan skall en punkt tagas på höjden, för att summan av kvadraterna på dess avstånd från 1) samtliga kanter, 2) samtliga begränsningsytor skall bli ett minimum?
(Svar: $\frac{5a}{17}$ i det första fallet och $\frac{a}{2}$ i andra fallet)

1464. Kurvorna $y = 3x^2 + bx + c$ och $y = x^3 + bx$ äga i en viss gemensam punkt en gemensam tangent. Beräkna konstanten c.
(Svar: $c = 0$ eller $c = -4$)

1465. I funktionen $y = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3} + bx$ är $a = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Tangenterna i inflexionspunkterna bilda rät vinkel med varandra. Beräkna konstanten b.
(Svar: $b = 1$)

1466. Ett klot är inskrivet i en kub med kanten a. Beräkna radien i det klot, som tangerar det nämnda klotet samt dessutom tre av kubens sidoytor.
(Svar: $\frac{a}{2}(2 - \sqrt{3})$)

1467. I en elliips är lillaxeln konstant. Från dess ena ändpunkt drages en normal till linjen genom ena fokus och lillaxelns andra ändpunkt. Den erhållna rätvinkliga triangeln roterar kring lillaxeln. För vilken excentricitet blir hos ellipsen blir rotationskroppens volym så stor som möjligt?
(Svar: $1 : \sqrt{2}$)

Tredje häftet

1468. Till två sfärer drages en gemensam tangent samt dennas och centrallinjens gemensamma normal. Orten för normalens fotpunkt på tangenten är en rotationsyta, vars snittkurva med ett plan genom centrallinjen skall bestämmas. *(N.J.)*

1469. Man kan visa, att om en triangels sidor tangera en parabel, råkas de tre linjer, som förena ett hörn med motstående sidas tangeringspunkt, i en punkt. Sök orten för denna, om de tre tangentena äro fasta och parabeln variabel. *(Less.)*

1470. I en cirkel med radien R äro $AC = 2a$ och $BD = 2b$ två mot varandra vinkelräta kordor. AB och DC råkas i U, AD och BC i V. Beräkna avståndet UV. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1471. I en ellips med axlarna AA_1 och BB_1 inskrivas två rektanglar med lika stora ytor. Deras på bågen AB belägna hörn äro P och Q. Visa, att PQ är parallell med AB.

1472. Normalen i punkten P på en ellips skär storaxeln i Q. Visa, att en cirkel med PQ som diameter av vardera brännpunktsradien till P avskär en korda lika med halva parametern.

1473. Parallellogrammen $OABC$ har hörnet O i en hyperbels centrum samt A och C på var sin av asymptoterna. Sidorna AB och CD skära hyperbeln i resp. D och E. Visa, att DE är parallell med AC.

1474. I en ellips äro OP och OQ två konjugerade halvdiametrar samt OA och OB de lägen som OP intar efter $\pm 90°$ vridning. Uttryck AQ och BQ i halvaxlarna a och b.

(Svar: $a+b$ och $|a-b|$)

1475. Kordan AB i en parabel med fokus i F skär styrlinjen i P. A_1 och B_1 äro projektionerna av A och B på styrlinjen. Visa, att $PA_1 \cdot PB_1 = \overline{PF}^2$.

1476. Två rörliga tangenter till en parabel råka en fix tangent i A och B samt varandra i C. Sök orten för hörnet D i parallellogrammen $ABCD$.

(Svar: Den till den fixa tangenten hörande diametern)

1477. Beräkna $y'' : yy'$ till funktionen

$$y = \left(\sin\frac{x}{2} + a\cos\frac{x}{2}\right) : \left(\cos\frac{x}{2} - a\sin\frac{x}{2}\right).$$

(Svar: 1)

1478. Från en punkt på y-axeln dragas två mot varandra vinkelräta tangenter till kurvan $y = x + \dfrac{4}{x^2}$. Vilka vinklar bilda dessa med asymptoten $y = x$?

(Svar: 22,5° och 67,5°)

1479. En tangent till kurvan $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ skär axlarna i A och B. Sök minimum för ytan av triangeln ABC, om C ligger i $(1; 0,5)$.

(Svar: $\frac{7}{32}$)

1480. Bestäm vinkelkoefficienten för en linje som är både tangent och normal till kurvan $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

(Svar: $\pm\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (4 st.))

1481. Tangenterna i punkterna A och B på kurvan $y = \dfrac{4}{x^2} - 1$ äro vinkelräta mot varandra. Kordan AB skär x-axeln i P och y-axeln i Q. Visa, att $AP = BQ$.

1482. Vilka tangenter till kurvan $x^2+24y=0$ äro normaler till kurvan $y=x^2$?
(Svar: $x-2y+3=0$ och $x+2y-3=0$)

1483. Två regelbundna tetraedrar med samma kantlinje a ligga på samma sida om det gemensamma basplanet. Basytorna ABC och $A_1B_1C_1$ äro placerade med A i mittpunkten av B_1C_1 och A_1 i mittpunkten av BC. Beräkna volymen av deras gemensamma del.
(Svar: $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$)

Fjärde häftet

1484. Termerna t_1, t_2, $t_3\ldots$ säges bilda en harmonisk serie, om deras inverterade värden bilda en aritmetisk serie. Visa, att om en av serierna

1) a^2, b^2, c^2
2) $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$
3) $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$

är harmonisk, detsamma gäller de båda återstående. *(X.)*

1485. I triangeln ABC tangera de vidskrivna cirklarna resp. sidor i A_1, B_1, C_1. Om deras ytor äro i aritmetisk serie, gäller detsamma de cirklar, som ha radierna AA_1, BB_1, CC_1. *(X.)*

1486. Om en fyrhörning med diagonalerna e och f är inskriven i en cirkel med diametern D och omskriven kring en cirkel med diametern d, så är $e^2f^2=d^2(ef+D^2)$. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1487. Lös ekvationen $\cos 4x+\cos 2x+\sin 2x=\cos 3x+\cos x$.
(Svar: $n\cdot 360°$, $90°+n\cdot 180°$, $30°+n\cdot 120°$)

1488. Visa, att man kan bestämma ett sådant värde på a, att ekvationen $a(\tan x+\cot x)=\tan x+\cot 2x$ gäller för alla värden på x.
(Svar: $a=1/2$)

1489. I en viss likbent triangel delar basen avståndet mellan höjdernas skärningspunkt och den vid basen vidskrivna cirkelns medelpunkt i förhållandet 3 : 8. Vilket är förhållandet mellan triangelns sidor?
(Svar: 5 : 5 : 6)

1490. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB=2\,\text{cm}$, $BC=2\,\text{cm}$, $CD=3\,\text{cm}$ och $DA=1\,\text{cm}$. Diagonalen AC delar vinkeln BAD i förhållandet 1 : 2. Hur stor är vinkeln BAD?
(Svar: 135°)

1491. I varje triangel är $p^2 = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c$.

1492. Skillnaden mellan abskissorna för två punkter på kurvan $y = 3x^2$ är 3 längdenheter. Tangenterna i dessa punkter skära varandra i en punkt med abskissan = 1/2. Angiv koordinaterna för de båda punkterna.
(Svar: (−1; 3) och (2; 12))

1493. Från en punkt P på positiva y-axeln dragas tangenten PT och normalen PN till kurvan $3y = x^3$. Hur stor är ytan av triangeln NPT, när vinkeln NPT är 90°?
(Svar: 2 ytenheter)

1494. Genom medelpunkten i ett klot läggas två mot varandra vinkelräta plan. Klotet delas av dessa i fyra kongruenta delar. I en sådan del kunna på två sätt kuber inskrivas. Sök förhållandet mellan deras ytor.
(Svar: 11 : 9)

1495. Mittpunkten på kanten BC i den reguljära tetraedern $ABCD$ är M. På BD tages punkten P, så att planet AMP blir vinkelrätt mot sidoytan ABD. I vilket förhållande delas BD av P?
(Svar: $BP : PD = 1 : 4$)

1496. Två kongruenta, liksidiga koner stå på ett plant bord, så att basytorna tangera varandra. Bestäm radien i den sfär, som tangerar bordet, ett gemensamt tangentplan till konerna samt bådas mantlar. Basradien är 1 cm.
(Svar: $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{6}}{4} = 1{,}478\,\text{cm}$ eller $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{4} = 0{,}254\,\text{cm}$)

1497. En diagonalkvadrat i en reguljär oktaeder betecknas med $ABCD$, de övriga hörnen äro P och Q. Sök radien i den sfär, som går genom A, B och P och vars centrum ligger på sidoytan CDQ.
(Svar: Radien = oktaederns kant)

1498. I en regelbunden fyrsidig pyramid äro höjden och baskanten lika stora. Genom två närliggande baskanters mittpunkter Q och R dragas linjerna QQ_1 och RR_1 vinkelrätt mot basytan. Bådas längd är 1/4 av höjden. Q_1R_1 skär två av pyramidens sidoytor i Q_2 och R_2. Sök förhållandet mellan QQ_2R_2R och QQ_1R_1R.
(Svar: 3 : 4)

1499. I en cirkelsektor med radien r och medelpunkten O inskrives en cirkel med centrum i P. Cirkeln tangerar radierna i T_1 och T_2. Sök maximum för ytan av fyrhörningen OT_1PT_2.
(Svar: $\frac{r^2\sqrt{3}}{9}$)