Årgång 28, 1945

Första häftet

1376. Visa, att i varje triangel är $27Rr \leq 2p^2$. *(Gösta Danielsson.)*

1377. Om fyra av sidorna i en femhörning äro parallella med var sin av diagonalerna, äro den återstående sidan och den återstående diagonalen parallella. Visa detta och konstruera en sådan femhörning, då tre hörn är givna. *(X.)*

1378. I triangeln ABC är avståndet mellan höjdernas skärningspunkt och den omskrivna cirkelns medelpunkt $= d$. Visa, att $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 9R^2$. *(R. Ingre.)*

Enklare matematiska uppgifter

1379. Lös ekvationen $4\cos x \cos 5x = 1$.
(Svar: $\pm 15° + n \cdot 90°$; $\pm 60° + n \cdot 180°$.)

1380. Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar sidan BC i D. Beräkna $\cos\dfrac{B}{2} : \cos\dfrac{C}{2}$, då $\sin\wedge BAD : \sin\wedge DAC = f$.
(Svar: $\sqrt{f}$.)

1381. Man drager linjer parallella med sidorna $a = 25$ cm, $b = 39$ cm, $c = 40$ cm i en triangel på avstånden 1, 9, 14 cm resp., alla utanför triangeln. De så dragna linjerna avgränsa en triangel. Beräkna dess yta.
(Svar: 1872 cm^2.)

1382. En parallellogram, där vinkeln mellan diagonalerna är A, delas av dessa i fyra trianglar. Kring var och en omskrives en cirkel. Cirklarnas medelpunkter bilda hörnpunkterna i en parallellogram. Visa, att förhållandet mellan parallellogrammernas ytor är $2\sin^2 A$.

1383. Vinkeln mellan bissektrisen till vinkeln $2A$ i en triangel och höjden från samma vinkels spets är α. Förhållandet mellan de omskrivna och inskrivna cirklarnas radier är n. Visa, att

$$2n\sin A(\cos\alpha - \sin A) = 1.$$

1384. I triangeln ABC är H höjdernas skärningspunkt. Den omskrivna cirkelns centrum är O. Visa, att $R^2 = HA \cdot BC \cdot HC + R \cdot \overline{HO}^2$.

1385. Två kordor i en cirkel, vars radie är r, skära varandra under räta vinklar i punkten P på avståndet d från medelpunkten. Tangenterna i kordornas ändpunkter bilda en fyrhörning. Visa, att en cirkel kan omskrivas kring fyrhörningen och att diagonalena råkas i P. Beräkna även den omskrivna cirkelns radie.

(Svar: $\frac{r^2\sqrt{2r^2-d^2}}{r^2-d^2}$.)

1386. Mätetalen för volym, total yta och den inskrivna sfärens radie för ett klot, en liksidig cylinder och en liksidig kon äro V_1, V_2, V_3; Y_1, Y_2, Y_3; r_1, r_2, r_3 respektive. Om talen i en trippel bilda en geometrisk serie, gäller detta även för de bägge andra. Specialfall: De senare kropparna äro båda omskrivna kring klotet eller båda inskrivna däri.

1387. En tangent till kurvan $9x^2y = 4$ bildar med koordinataxlarna en rätvinklig triangel, som tänkes rotera kring y-axeln. Beräkna den alstrade konens volym.

(Svar: π.)

1388. AA_1, BB_1, CC_1 äro sidokanterna i ett godtyckligt tresidigt prisma, vars basytor ABC och $A_1B_1C_1$ antagas vågräta. En rät linje utgår från läget AB och rör sig sedan horisontellt genom prismat, varvid den glider längs AB_1 och BC_1, så att den slutar i läget B_1C_1. Sök förhållandet mellan volymerna av de delar, vari prismat delas av den yta, som linjen alstrar.

(Svar: $1:5$.)

1389. Visa, att om de gemensamma tangenterna till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ och parabeln $y^2 = 2px$ bilda rät vinkel, så sammanfaller parabelns brännpunkt med en av brännpunkterna till hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Andra häftet

1390. I en rät stympad kon med basradierna R och r samt höjden h tänkas generatriserna vara elastiska trådar. Vrides den ena bascirkeln vinkeln $v \leq 180°$ omkring konens axel, tänjas trådarna och bilda en hyperboloidmantel. Beräkna volymen som inneslutes mellan denna och konmanteln. *(X.)*

1391. Om serien $\sum_1^\infty a_r^2$ är konvergent, så är $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n a_r = 0$ (Talen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ äro reella.) *(Hg.)*

1392. a) Att bestämma maximum för volymen av en cylinder, vars bascirklar ligga en på vardera av två givna koncentriska sfärer.
b) Att bestämma maximum för volymen av den öppna låda, som erhålles av en given rektangulär platta, om kvadrater utskäres ur hörnen och kanterna sedan vikes upp.

Vilket enkelt samband finnes mellan a) och b)?

(Gösta Danielsson.)

Enklare matematiska uppgifter

1393. I en geometrisk serie med första termen 1 är summan av termerna med udda ordningsnummer 85 och summan av termerna med jämnt ordningsnummer 42. Sök serien.

(Svar: 1; 2; 4; 8, 16; 32; 64.)

1394. Visa, att ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$ satisfieras av $x = 2\sin 10°$ samt beräkna övriga rötter.

(Svar: $2\sin 50°$ och $2\sin 250°$.)

1395. Från punkterna A, B och C i samma horisontalplan synes ett torn rakt i öster. Toppens elevationsvinklar i A, B och C förhålla sig som $1:2:3$. Bestäm toppens höjd över horisontalplanet om $AB = a$ och $BC = b$.

(Svar: $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$.)

1396. Uttryck $\dfrac{(1-\sin 50°)(0,5+\cos 80°)}{4+8\sin 70°}$ som en funktion av $\sin 20°$.

(Svar: $\sin^4 20°$.)

1397. Ett regelbundet tresidigt prisma skäres av ett plan så, att snittytan blir en likbent och rätvinklig triangel.Sök vinkeln mellan snittytan och bottenytan.

(Svar: 54,73°.)

1398. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro utplacerade sex punkter: $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$, $D(d;c)$ och $E(e;c)$. Visa, att skärningspunkterna mellan OD och AC, OE och BC samt AE och BD ligga i rät linje.

1399. Visa, att de gemensamma tangenterna till kurvorna $x^2 + y^2 = 1$ och $y^2 = 4x - 4$ tillsammans bilda en liksidig triangel samt beräkna dennas yta.

(Svar: $3\sqrt{3}$ ytenheter.)

1400. I en likbent triangel, vars bas och höjd äro lika, inskrives en ellips, vars ena axel faller utefter höjden. Sök ellipsens excentricitet, om dess yta skall vara ett maximum.

(Svar: $e = \frac{1}{2}$.)

1401. En korda genom ena brännpunkten i en hyperbel bildar 60° vinkel med transversalaxeln och delas av brännpunkten i två delar, som föhålla sig som $1:n$. Bestäm hyperbelns excentricitet.

(Svar: $e = \frac{2(n-1)}{n+1}$; $n > 3$.)

1402. Från ena ändpunkten av storaxeln i en ellips upptager den närmaste parametern samma synvinkel som lillaxeln sedd från en av brännpunkterna. I en annan ellips synes från lillaxelns ena ändpunkt storaxeln under dubbelt så stor synvinkel som brännpunktsavståndet. Vilken av ellipserna har den största excentriciten?
(Svar: Den förra, som har $e > \frac{1}{2}$, medan den senare har $e < \frac{1}{2}$.)

1403. Från en punkt på sidan AB i en given triangel ABC drages en normal. Denna råkar sidan BC i D. Var skall P väljas för att ytan av triangeln PDA skall bli ett maximum?
(Svar: Mitt på AB.)

1404. Vilken är den största spetsiga vinkel, som medianerna mot kateterna i en rätvinklig triangel kunna bilda med varandra?
(Svar: 36,87°.)

Tredje häftet

1405. Kurvan $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ förutsättes ha två reella inflexionspunkter. Då kan man på ∞^1 sätt utvälja tre punkter A, B, C på kurvan, i vilka tangenterna äro parallella. Visa, att triangeln ABC:s tyngdpunkt är fix. Berstäm maximivärdet av dess yta. *(X.)*

1406. Visa, att $2(x+y+z)^3 - 54xyz = \sum(x+y+az)(x-y)^2$ för lämpligt siffervärde på a och cyklisk permutation av summans typterm.
(Gösta Danielsson.)

1407. Till parabeln $y = x^2$ ritas krökningscirkeln i punkten A. Denna cirkel skär parabeln på nytt i punkten B. Sök enveloppen för AB.
(C. E. Fröberg.)

Enklare matematiska uppgifter

1408. Bestäm den ekvation, vars rötter äro summan av de inverterade värdena av rötterna till ekvationen $x^3 + px + q = 0$, tagna två och två.
(Svar: $q^2x^3 + 2pqx^2 + p^2x - q = 0$.)

1409. Beräkna triangeln ABC:s vinklar, om $h_a : h_b : h_c = \sin 2B : \tan C : \sin(B+C)$.
(Svar: $A = 90°$, $B = 30°$ och $C = 60°$.)

1410. I en viss likbent triangel halverar bissektrisernas skärningspunkt avståndet mellan medianernas skärningspunkt och basen. Sök triangelns vinklar.
(Svar: 78,47°, 78,47° och 23,06°.)

1411. I triangeln ABC är $A = 90°$. P är en punkt på AB; $R_{PBC} : R_{PAC} = 13 : 5$ och $r_{PBC} : r_{PAC} = 6 : 5$. Bestäm punkten P:s läge.
(Svar: $AP : PB = 5 : 11$.)

1412. I triangeln ABC utdrages medianen AM. Medianen BN i triangeln MBA skär utdragen AC i P. Bestäm förhållandet $AP : PC$.
(Svar: $1 : 2$.)

1413. Genom ett hörn i en reguljär tetraeder lägges ett plan, som tangerar den inskrivna sfären och som är parallellt med en kant i tetraedern. Beräkna förhållandet mellan de delar vari tetraedern delas av planet.
(Svar: $1 : 8$.)

1414. Ett tangentplan till den inskrivna sfären i en reguljär tetraeder lägges parallellt med två men ej med tre kanter. I vilket förhållande delas tetraedern av planet?
(Svar: $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} = 0{,}13$.)

1415. I en reguljär tetraeder kan en kub inskrivas, så att två av kubens hörn faller på varje sidoyta i tetraedern. Om tetraederns kant $= a$, hur lång är kubens?
(Svar: $\dfrac{a(2-\sqrt{2})}{2} = 0{,}29a$.)

1416. I en regelbunden pyramid är bottenytan en reguljär n-hörning med sidan a, och sidokanten har längden $n \cdot a$. Mot vilket gränsvärde tenderar förhållandet mellan summan av alla sidoytorna och bottenytan för växande n?
(Svar: 2π.)

1417. En rotationskon skäres av ett plan parallellt med ett tangentplan. I snittet inskrives en likbent triangel, som till bas har kordan i konens bottenyta. Hur skall kordan dragas, för att den likbenta triangeln skall få så stor yta som möjligt?
(Svar: Avståndet till medelpunkten = halva radien.)

1418. Givet är en rät kon, i vilken vinkeln mellan generatris och basyta är 30°. I konen inskrives en oändlig följd av stympade koner, den understa stående med sin största basyta på konens basyta och de övriga i följd ovanpå varandra. I de stympade konerna är vinkeln mellan generatris och basyta 60°, och höjden = radien i den minsta av dess basytor. Sök summan av alla de stympade konernas mantelytor med den stora konens mantelyta som enhet.
(Svar: $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{3}$.)

1419. Vid segling från A till B vid rak motvind kryssade en segelbåt, dvs. den styrde först mot en punkt C och därefter från C mot B. Därvid var $AC = CB$. Sök vinkeln mellan AC och AB, om för de vinklar det här är fråga om båtens hastighet kan antagas vara proportionell mot sinus för denna vinkel och tiden för färden från A till B skall vara ett minimum.
(Svar: 45°.)

Fjärde häftet

1420. Ett obegränsat utdraget prismas normalsnitt har formen av en liksidig triangel. Prismat kan på två olika sätt skäras med plan, så att likbenta trianglar uppkomma. Två sådana trianglar antagas ha lika stora ytor. Undersök, hur vinklarna mellan två sådana plan variera. *(B. Svenonius.)*

1421. Visa, att $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}$. *(Per Olof Fröman.)*

1422. En rymdpolygons sidor delas av ett plan i segmenten $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n$ i ordning tagna. Vilken relation består mellan dessa segment, om segmenten räknas med samma tecken vid inre, med motsatta tecken vid yttre delning. *(N. Juringius.)*

Enklare matematiska uppgifter

1423. Vilken är summan av alla positiva egentliga bråk med täljaren 1, vilka kunna skrivas som ändliga decimalbråk?
(Svar: $1,5$.)

1424. Vilken är summan av alla decimalbråk mellan 0 och 1, vilkas period börjar med första decimalen och omfattar ett antal siffror, som går jämnt upp i n?
(Svar: $5 \cdot 10^{n-1} - 1$.)

1425. Bevisa formlerna

$$\sin(a-b)\sin(c-d) + \sin(a-c)\sin(d-b) + \sin(a-d)\sin(b-c) = 0$$

och

$$\begin{aligned}&\sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d)\\&\quad+\sin(a+c)\sin(a-c)\sin(d+b)\sin(d-b)\\&\quad+\sin(a+d)\sin(a-d)\sin(b+c)\sin(b-c) = 0.\end{aligned}$$

1426. Lös ekvationerna

a) $\cos 3x = \cos^2 x \cos x$,

b) $\cos 5x = \cos 3x \cos 4x$,

c) $\cos^2 5x = \cos 7x \cos x$,

d) $\cos(a+b)x \cos(a-b)x = \cos^2 ax \cos^2 bx$.

(Svar: a) $n \cdot 90°$; b) $n \cdot 60°$, $n \cdot 90°$; c) $n \cdot 45°$, $n \cdot 60°$; d) $\dfrac{n\pi}{a}$, $\dfrac{n\pi}{b}$.)

1427. Visa, att i en kub varje hörn är centrum för en vidskriven sfär till en tetraeder, som till hörn har fyra andra av kubens hörn.

1428. I romben $ABCD$ äro hörnet A och den inskrivna cirkelns kontaktpunkt E med sidan AB fasta. Sök orten för B, C och D.
(Svar: Orten är för D en parabel med A som fokus och E som vertex, för C parabelns styrlinje och för B dess axel.)

1429. Sök orten för hörnen i ett likbent parallelltrapets, omskrivet kring en cirkel, som tangerar benen i givna punkter.
(Svar: Hörnen på samma ben beskriva en och samma parabel med punkten på benet som fokus och de givna punkternas mittpunktsnormal som styrlinje.)

1430. Genom en godtycklig punkt på kurvan $2y = x^2$ drager man en normal och avsätter på denna inåt kurvan en sträcka PQ, som är 8 längdenheter. Hur nära x-axeln kan punkten Q komma?
(Svar: Minsta avståndet är $5,5$.)

1431. Genom punkten $(-1;\, 1)$ drages en normal till kurvan $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{9}{8}\right)$. Avståndet mellan denna normal och en med densamma parallell parabelkorda är $\sqrt{5}$. Angiv kordans ekvation.
(Svar: $x + 2y = 6$.)

1432. Man ritar ett antal ellipser E_1, E_2, $E_3, \ldots$. Samtliga ellipser har origo till medelpunkt och sina axlar utefter koordinataxlarna. För en godtycklig ellips E_n gäller, att den går genom brännpunkterna för E_{n-1} och tangerar E_{n-1} i två punkter. Hur många sådana ellipser finnas, om ekvationen för E_1 är $16x^2 + 9y^2 = 144$?
(Svar: Antalet ellipser är 6 (E_1 t.o.m. E_6). E_7 är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.)

1433. Två punkter A och B med utgångslägena $(8;\, 0)$ och $(0;\, 2)$ resp. börja i ett visst ögonblick röra sig med samma hastighet, 2 längdenheter per sekund. A rör sig genom första kvadranten utefter linjen $x = 8$ och B genom andra och tredje kvadranterna utefter linjen $4x - 3y + 6 = 0$. Efter hur lång tid ligga de båda punkterna i rät linje med origo?
(Svar: Efter 2 sek och $3\frac{1}{3}$ sek.)

1434. En liksidig triangel ABC var given. I ett visst ögonblick började sidan BC växa likformigt, så att den för varje sekund ökades med 30% av sin ursprungliga längd. Samtidigt började även sidorna AB och AC växa, så att var och en ökades per sekund med 10% av den ursprungliga längden. Sträckorna hängde härvid ihop och bildade en likbent triangel, så länge detta var möjligt. Hur länge existerade triangeln, och efter hur lång tid hade den uppnått sitt maximala ytinnehåll?

(Svar: Triangeln existerade i 10 sek. Maximal yta uppnåddes efter $\frac{1}{8}\left(\sqrt{304}+2\right) = 6,48$ sekunder.)