Årgång 10, 1926–27

Första häftet

229. Att upprita en triangel, då man känner en vinkel, summan av de båda omfattande sidorna och den inskrivna cirkelns radie. *(Iter.)*

230. Att konstruera brännpunkterna till ett kägelsnitt, då man känner de linjer, som innehålla axlarna och två normaler. *(X.)*

231. Alla sidotrianglar i en tetraeder ha samma yta. Uttryck i en sådan triangels element

a) den omskrivna sfärens radie,
b) volymen,
c) höjden mot samma triangel.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

232. Lös ekvationen

$$\left(\frac{0,7}{\sqrt{x}}\right)^{\log x} = \frac{1}{49}.$$

(Svar: $x_1 = 0,01$; $x_2 = 49$)

233. Eliminera α ur systemet

$$\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha \\ y = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha \end{cases}$$

(Svar: $2y = 3x - x^3$)

234. Två cirklar med radierna R och r tangera varandra utantill. Hur stor är radien i den cirkel, som tangerar såväl cirklarna som deras gemensamma yttre tangent.

(Svar: $\left(\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}\pm\sqrt{r}}\right)^2$)

235. I $\triangle ABC$ är $\wedge A = 30°$, $b = 3272$ cm och bissektrisen till $\wedge C$ 1687 cm. Beräkna $\wedge C$.

(Svar: $C_1 = 148{,}2°$, $C_2 = 91{,}8°$)

236. Sök toppvinkeln i en rät kon, i vilken en kub är inskriven på sådant sätt, att blott en kant ligger i basytan, men de övriga sex hörnen på manteln.

(Svar: 54,74°)

237. De tre linjerna $y = 0$, $x + y = 2$ och $y = kx + 1$ bilda en triangel av $2\frac{1}{4}$ ytenheter. Sök härav värdet på k.

(Svar: $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, $k_{3,4} = \frac{-17\pm3\sqrt{17}}{34}$)

Andra häftet

238. Av siffrorna 1 till och med 9 skola bildas två tal, vilkas produkt är den största möjliga. Vilka äro dessa tal? *(X.)*

239. Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner den ena katetens projektion på hypotenusan och hypotenusans överskott över den andra kateten. *(Iter.)*

240. Sök värdet av 1:a icke försvinnande $f^{(n)}(0)$ för $f(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$. *(X.)*

241. På hur många sätt kan talet 100 uppdelas i en summa av tre positiva tal? *(Iter.)*

242. Rektangeln av två sidor i en triangel är, som bekant, lika med kvadraten på bissektrisen till den mellanliggande vinkeln tillsammans med rektangeln av de båda segment, i vilka den tredje sidan delas av bissektrisen. Undersök, huruvida satsen är omvändbar. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

243. Lös ekvationen $5^{2x} + 5^{-2x} + 8 = 5^{1+x} + 5^{1-x}$.
(Svar: $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm 0{,}598$)

244. Lös ekvationen $\cos 2x = \sin^3 x + \cos^3 x$.
(Svar: $135° + n \cdot 180°$, $n \cdot 360°$, $270° + n \cdot 360°$)

245. I en rak, ihålig cylinder nedläggas tre lika klot, vilkas radier äro hälften av cylinderns radie. Hur hög måste cylindern minst vara för att ingen del av det översta klotet skall sticka över dess kant. Cylinderns radie = r.
(Svar: $\frac{r}{2}(2 + \sqrt{2})$)

246. Drag en korda i en cirkel parallell med en given tangent till cirkeln så, att om perpendiklar från kordans ändpunkter fällas mot tangenten, diagonalen i den så bildade rektangeln blir lika med cirkelns diameter.

247. Bestäm på en triangels median en punkt, sådan att summan av kvadraterna på avstånden till de tre hörnen blir ett minimum.
(Svar: Tyngdpunkten)

248. En rät linje (längd = l) rör sig så, att dess ena ändpunkt alltid befinner sig på y-axeln och dess andra ändpunkt alltid på cirkeln $x^2 + y^2 = l^2$. Sök orten för den punkt som delar linjen i förhållandet $m : n$.
(Svar: Ellipsen $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{(m+2n)^2} = \frac{1}{(m+n)^2}$)

Tredje häftet

249. A är ena brännpunkten till en hyperbel. B är en punkt på samma sida om den närmaste hyperbelgrenen som A. P är en rörlig punkt på hyperbeln (på den ena eller andra grenen). Var skall P ligga för att $AP + PB$ skall bli ett minimum? *(C. A. L.)*

250. I en likbent triangel ligga höjdernas skärningspunkt, inskrivna cirkelns medelpunkt, tyngdpunkten och toppvinkelns spets harmoniskt och i angiven ordning. Sök vinklarna. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

251. Lös ekvationen $\sin^4 x + \cos^4 x - 1 = \frac{1}{14}(\cos 5x - \cos 3x)$.
(Svar: $n \cdot 90°$, $\pm 104{,}48° + n \cdot 360°$)

252. Vilken form har ett sfäriskt segment, där den buktiga ytan är konstant ($= \pi a^2$) och volymen ett maximum?
(Svar: Ett halvklot)

253. Till hyperbeln $x^2 - y^2 = 9$ är en tangent dragen parallellt med räta linjen $5x - 4y + 7 = 0$. Beräkna omskrivna cirkelns radie i den triangel, vars hörn äro tangeringspunkten och brännpunkterna.
(Svar: $5\frac{1}{8}$)

254. Giv ekvationerna för de normaler, som från punkten (18; 12) dragas till parabeln $y^2 = 8x$.
(Svar: $y = x - 6$, $y = 2x - 24$, $y = -3x + 66$)

255. Vid uträknandet av en produkt av 2 hela tal kan man gå till väga på följande sätt. Man tager hälften av multiplikatorn och får sålunda en ny multiplikator; vidare fördubblar man multiplikanden och får sålunda en ny multiplikand , motsvarande den nya multiplikatorn. Med dessa nya faktorer förfar man på samma sätt som med de ursprungliga, då nya samhöriga faktorer uppkomma o.s.v. tills man fått multiplikatorn 1. Om en multiplikator är ett udda tal, avrundas dess hälft (den nya multiplikatorn) till närmast lägre heltal. Nu adderas alla de multiplikander, vilkas motsvarande multiplikatorer äro udda tal. Man får då den sökta produkten (s.k. rysk multiplikation).

Ex. 1				*Ex. 2*			
	76	·	13		52	·	*23*
	38	·	26		26	·	46
	19	·	*52*		13	·	*92*
	9	·	*104*		6	·	184
	4	·	208		3	·	*368*
	2	·	416		1	·	*736*
	1	·	*832*				1 219
			988				

Bevisa metodens riktighet.

Fjärde häftet

256. En ellips roterar kring sin medelpunkt. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna i de punkter på ellipsen, i vilka denna skäres av en fast rät linje.
(Briot et Bouquet, Leçons de Géométrie analytique.)

257. En rät cirkulär stympad kon, vars plana ändytor ha radierna R och r, skäres av ett plan, som genomskär mantelytan utefter en ellips, vars toppar ligga i varsin av de båda plana ändytorna. Bestäm förhållandet mellan volymerna av de båda delar, i vilka den stympade konen delas av planet. *(Matematisk Tidskrift, 1932, uppg. 141.)*

258. En godtycklig punkt P på ett kägelsnitt förenas med de båda brännpunkterna F och F_1. Sök orten för triangeln PFF_1:s in- och vidskrivna cirklars medelpunkter. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

259. I en likbent triangel är tangenten för vinkeln vid spetsen 3 gånger så stor som sinus för vinkeln vid basen. Hur stor är basvinkeln?
(Svar: 55,96°)

260. Två cirklar, båda med 9 cm:s radie, tangera varandra utantill. Dessa cirklar tangera innantill en cirkel med 50 cm:s radie. Beräkna radien i den cirkel, som tangerar alla tre.
(Svar: $2\frac{12}{19}$ cm och $40\frac{10}{11}$ cm)

261. Diskutera kurvan $y = \dfrac{x^3+7x-3}{2x^2}$.

262. A är spetsen i en regelbunden tetraeder $ABCD$. Höjden från A träffar den omskrivna sfären i E. Visa, att sidovinklarna i hörnet $E(BCD)$ äro räta.

263. F är fokus till parabeln $y^2 = 2px$; A och B två fixa punkter på axeln, så belägna, att $FA = FB = a$. Visa, att skillnaden mellan kvadraterna på dessa punkters avstånd till en rörlig tangent är konstant $= 2pa$.

264. Att upprita en triangel, då man känner basen, höjden mot basen samt förhållandet mellan de övriga sidornas medianer.