Årgång 8, 1924–25

Första häftet

169. Att upprita en triangel, då man känner bissektrisen till en vinkel, samt höjderna mot de omfattande sidorna. *(Iter.)*

170. I varje triangel är den inskrivna cirkelns radie mindre än eller lika med hälften av den omskrivnas. *(M–r.)*

171. Visa att, om α är en spetsig vinkel, så är $\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\leq\frac{1}{8}$. *(M–r.)*

172. Visa att $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$.

173. För vilka x-värden blir x^2+30x en jämn kvadrat?

174. En cirkel har diametern $AB=2r$. Från A fälles en linje AS vinkelrätt mot cirkelns plan och lika med AB. På periferin tages en punkt M. Visa att tetraedern $SABM$ begränsas av fyra rätvinkliga trianglar, och sök läget av den omskrivna sfärens medelpunkt.

Andra häftet

175. En person håller vad och satsar 2 kr på att han i ett kast med två tärningar skall få upp antingen 4, 5 eller 6 ögon. Hur mycket kan hans motpart satsa för att båda skola få lika vinstchanser?

176. En triangel ABC är given, samt två godtyckliga punkter P och Q i rymden, sådana att $\frac{PA}{QA}=\frac{PB}{QB}=\frac{PC}{QC}$.
a) Visa, att PQ alltid måste råka en viss linje.
b) Om P är given, sök orten för Q.

177. Om a och b äro två sidor i en triangel, α och β motstående vinklar och $a>b$, så är $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{a}{b}$. *(X.)*

178. I en olikbent triangel är en vinkel 60°, och en närliggande sida mätes av primtalet $n>2$. Hur stora äro de övriga sidorna, om de mätas av hela tal?

179. 10 l luft, till 3/4 mättad med vattenånga, befinner sig vid 76 cm tryck och 60° temp. Om trycket ökas till 100 cm och temperaturen sänkes till 10°, hur stor blir volymen och hur mycket vattenånga utfaller?
(Ångans sp. vikt = 5/8, luftens sp. vikt = 0,001293, mättad vattenångas tryck vid 60° = 14,94 cm, vid 20° = 0,20 cm.) *(M–r.)*

180. En ström av 0,8 amp genomgår ett svavelsyrebad av 5 ohm motstånd. Hur stor del av den energi, som strömmen utvecklar i badet, kommer till synes såsom kemisk energi?
(1 amp utfäller 0,010 44 mg H per sek, Joulska konstanten 0,24, och vattnets termokemiska formel är $H_2 + O = H_2O + 68\,340$ grkal.)
(M–r.)

Tredje häftet

181. Produkten av fyra på varandra följande hela positiva tal kan ej vara en jämn kvadrat. *(Iter.)*

182. Tal med udda antal siffror och av följande beskaffenhet kunna ej vara primtal:
a) den första siffran 1, 5 eller 8 och de övriga treor,
b) den första siffran 7 och de övriga ettor,
c) den första siffran 8 och de övriga nior.
(Iter.)

183. Vilka tal x äro sådana, att $x+1$ och x^2+1 båda äro dubbelt så stora som två jämna kvadrater.

184. I en rätvinklig triangel är K skärningspunkten mellan höjden och den linje, som förenar de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter. Visa a) att K ligger på den linje som förenar de spetsiga vinklarnas bissektrisers fotpunkter, b) att K ligger på avståndet r från den räta vinkelns spets.

185. Uppgiv antalet reella rötter mellan 0 och 2π till ekvationen $4\sin^2 x + (1-m)\sin x + 1 = 0$ för olika reella värden av m.

186. Om genom höjdernas skärningspunkt i en triangel (sidor a, b, c, vinklar α, β, γ) drages en transversal, som skär sidorna under vinklarna α_1, β_1, γ_1 resp., och p, q, r äro tre icke sammanstötande segment av sidorna, så är

$$p \cdot q \cdot r = \pm abc \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma \cot\alpha_1 \cot\beta_1 \cot\gamma_1.$$

(M–r.)

Fjärde häftet

187. Att upprita en triangel, där två sidor äro givna och en vinkel skall vara dubbelt så stor som en annan. (3 fall.) *(M–r.)*

188. Sök orten för mittpunkterna till alla kordor i en cirkel, som från en given punkt synas under rät vinkel.

189. O är en cirkels medelpunkt, A en punkt inom cirkeln. Genom A dragas till periferin linjerna AB och AC, som med AO göra vinklarna α och $\pi-\alpha$ resp. och ligga på ena sidan av AO. Visa att BC skär OA:s förlängning i en punkt, som är konstant för olika α. *(X.)*

190. Vilken relation måste finnas mellan koefficienterna a, b, c i funktionen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, för att en andragradsfunktion $\phi(x)$ skall kunna finnas, sådan att andra derivatan av $f(x)\cdot\phi(x)$ är $= f(x)$?

191. Visa att

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

192. I ett tresidigt hörn är kantvinkeln γ rät och kantvinkeln α given och spetsig. Hur stor skall sidovinkeln a vara för att skillnaden $b-c$ mellan de övriga sidovinklarna skall bliva så stor som möjligt?