Årgång 04, 1920

Första häftet

Matematiska uppgifter

73. I en rätvinklig triangel är hypotenusan a, kateterna b och c. Sök avståndet mellan de vidskrivna cirklarnas medelpunkter samt mellan dessa och den inskrivna cirkelns medelpunkt. *(C.H.)*

74. Om $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$ så satisfieras systemet endast av 0-värden på två av de obekanta och 1 på den tredje. *(S. B–n.)*

75. Varpå beror följande motsägelse: Sättes $x=\sqrt[3]{1+i}+\sqrt[3]{1-i}$, så är

$$\begin{aligned}
x &= \left[\sqrt{2}\cdot e^{i(\pi/4+2k\pi)}\right]^{1/3}+\left[\sqrt{2}\cdot e^{-i(\pi/4+2k_1\pi)}\right]^{1/3}\\
&= 2^{1/6}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k_1\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k_1\pi}{3}\right)\right\}\\
&= 2^{1/6}\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(k+k_1)\pi}{3}\right)\cos\frac{(k-k_1)\pi}{3}+i\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(k+k_1)\pi}{3}\right)\sin\frac{(k-k_1)\pi}{3}\right\}\\
&= 2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(k+k_1)\pi}{3}\right)\left\{\cos\frac{(k-k_1)\pi}{3}+i\sin\frac{(k-k_1)\pi}{3}\right\}\\
&= 2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}\right)\left\{\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right\}=2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}\right)\sqrt[6]{1}.
\end{aligned}$$

således 18 värden, nämligen 3 olika moduler, de positiva av $2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}\right)$ och vardera multiplicerad med de 6 värdena av $\sqrt[6]{1}$, under det att $\sqrt[3]{1+i}$ och $\sqrt[3]{1-i}$ vardera hava blott 3 värden, således x blott 9 värden. *(M–r.)*

76. Bestäm a och b så, att funktionen $\dfrac{x^2+1}{2ax+3b}$ har ett maximum $=-1$ och ett minimum $=1/4$. *(S. B–n.)*

77. Att konstruera en triangel, då man känner rektangeln av två sidor samt längderna av inre och yttre bissektriserna till mellanliggande vinkel. *(X.)*

78. $c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$ äro koefficienterna vid utvecklingen av $(a+b)^n$. Bevisa att

$$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Andra häftet

Matematiska uppgifter

79. Två räta linjer och en punkt O är givna. En rörlig linje genom O skär de fasta linjerna i P och Q. För vilket läge av OP blir ytan av rektangeln $OP \cdot OQ$ minst? *(Ruben Mattson.)*

80. Två raka, reguljära n-kantiga prismer med baskanterna a och a_1 hava lika volymer och lika totala ytor.

a) Sök deras höjder.

b) Sök förhållandet a/a_1 och största möjliga värde på n, om även summan av kanterna skall vara lika i båda.

81. En likbent triangel och en punkt P äro givna. Att genom P draga en rät linje, så att det stycke därav, som faller mellan triangelns ben (eller deras förlängningar) halveras av basen (eller dess förlängning). *(X.)*

82. Sök gränsvärdet för den oändliga produkten

$$\cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^n} \ldots$$

83. Diskutera problemet: a kg vatten av t °C blandas med b kg is av $-t_1$ °C. Isens smältningsvärme är ω, dess specifika värme är s. Sök blandningstemperaturen samt mängderna av is och vatten. *(M–r.)*

84. En elektricitetsmaskin laddar genom en kondensator av 1/2 mikrofarads kapacitet till en potential av 20 000 Volt. Med vilken hastighet skall den vridas för att dess effekt skall bliva 1 Watt?

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

85. En triangels vinklar bilda en aritmetisk progression, och summan av kuberna på deras sinus är $\frac{3}{8}(3+\sqrt{3})$. Beräkna vinklarna. *(G. R–k.)*

86. Om l, m och n är föreningslinjerna mellan spetsarna A, B och C i en triangel och inskrivna cirkelns medelpunkt, så är

$$\frac{l^2}{bc} + \frac{m^2}{ca} + \frac{n^2}{ab} = 1.$$

87. På en linje a tagas punkterna $A_0, A_1, A_2, \ldots$ och på linjen b punkterna $B_0, B_1, B_2, \ldots$ så, att för alla v linjerna $A_v B_{v+1}$ är parallella, och likaledes linjerna $B_v A_{v+1}$. Bevisa, att linjerna $A_{2v} B_{2v}$ äro sinsemellan parallella, och likaledes linjerna $A_{2v+1} B_{2v+1}$. *(X.)*

88. Två cirklar råkas i A och B. Man drager en gemensam tangent. Uttryck rektangeln av avstånden från A och B till denna i $AB = a$ och den vinkel v, varunder vinklarna skära varandra. *(X.)*

89. En inskrivbar fyrhörnings hörnpunkter ligga på en konisk sektion. Visa, att bissektriserna till vinklarna mellan diagonalerna, och likaledes till vinklarna mellan två motstående sidors förlängningar, äro parallella med den koniska sektionens axlar. *(C.E. Blom.)*

90. $ABCD$ är en inskrivbar fyrhörning. Diagonalerna AC och BD råkas i F, och förlängningarna av AB och DC i H. Bevisa, att bissektriserna till vinklarna vid F och H äro parvis parallella. *(C.E. Blom.)*

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

91. Produkten av 2 siffror och det av dem bildade 2-siffriga talet är ett flersiffrigt tal, innehållande endast en av de nämnda siffrorna såsom siffror. Sök dessa siffror. *(C.H.)*

92. $\frac{15}{8}$ av ett fyrsiffrigt tal är kvadraten på det tal som bildas av de två första siffrorna i halva talet. Sök talet.

93. Visa att $\lim_{n\to\infty}\left(1-\tan^2\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\tan^2\dfrac{x}{4}\right)\left(1-\tan^2\dfrac{x}{8}\right)\cdots\left(1-\tan^2\dfrac{x}{2^n}\right) = x\cot x$.

94. Om a och b äro koordinaterna för en punkt P i planet, var skall P ligga för att uttrycket

$$y = \frac{x^2 - 6bx + 4a}{4ax^2 - 6bx + 1}$$

ej skall hava något maximum eller minimum?

95. $ABCD$ är en konvex fyrhörning, omskriven kring en cirkel O. Visa att $\left(\dfrac{OA}{OB}\right)^2 = \dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$.

96. Två varandra skärande linjer och en punkt P i planet äro givna. Att genom P draga en linje, så att den bildade triangeln får given yta. *(X.)*